



Università degli Studi di Trieste

DIPARTIMENTO DI FISICA

Corso di Laurea in Fisica

**Reti neurali applicate
ad analisi multiparametriche
di simulazioni climatiche
esoplanetarie**

Candidato:

Tommaso Marsonet

Relatore:

prof. Giovanni Vladilo

Correlatore:

dott. Giuseppe Murante

Anno Accademico 2018-2019

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 1 |
| 1 Nozioni Preliminari | 2 |
| 1.1 Abitabilità | 2 |
| 1.2 Il modello ESTM | 4 |
| 1.3 L'archivio <i>ARTECS</i> | 5 |
| 1.4 Breve introduzione alle reti neurali | 7 |
| 1.4.1 Perceptrons | 8 |
| 1.4.2 Apprendimento supervisionato | 8 |
| 1.4.3 Reti feed forward e back propagation | 11 |
| 2 Analisi dei dati | 14 |
| 2.1 Selezione del campione | 14 |
| 2.2 Interpolazione multilineare | 16 |
| 2.2.1 Individuazione dei ranges | 16 |
| 2.2.2 Descrizione dell'algoritmo | 19 |
| 2.2.3 Risultati | 20 |
| 2.3 Analisi con le reti neurali | 26 |
| 2.3.1 Architettura della rete | 26 |
| 2.3.2 Training-Test e risultati | 28 |
| 2.4 Confronto tra i due metodi | 36 |
| 3 Conclusioni e sviluppi futuri | 38 |

Introduzione

In questi ultimi decenni è diventato di grande interesse lo studio degli *esopianeti* per la cui rivelazione sono state introdotte notevoli innovazioni tecnologiche nell'ambito della strumentazione astronomica. Tra le finalità di questo tipo di studi vi sono la comprensione della formazione e dell'evoluzione dei sistemi planetari e anche lo sviluppo e sostentamento della vita su altri pianeti, uno dei principali obiettivi dell'astrobiologia. L'individuazione dei pianeti extrasolari è un compito molto difficoltoso che richiede l'utilizzo di tecniche osservative quali il *metodo delle velocità radiali* o il *metodo dei transiti*. Grazie all'utilizzo di tali e altre tecniche si sono individuati finora migliaia di esopianeti che presentano una grandissima varietà di proprietà orbitali e planetarie. Grazie a missioni spaziali come *Kepler*, possiamo studiarne le proprietà statistiche. Si è trovato che i pianeti extrasolari si trovano in maniera frequente attorno a diversi tipi di stelle e utilizzando tecniche osservative più sofisticate possiamo cercare di caratterizzarne le proprietà fisiche. Pianeti più massivi, solitamente giganti gassosi, vengono trovati più frequentemente perché più facili da rivelare. Tuttavia l'analisi statistica indica che i pianeti rocciosi sono intrinsecamente molto frequenti, anche se sono più difficili da scoprire.

Questi ultimi sono di particolare importanza: basandoci sulla Terra, l'unico pianeta che ospita la vita a noi noto, è più probabile trovare pianeti abitabili tra quelli simili al nostro. Uno dei criteri più utilizzati per la ricerca della vita in altri pianeti è la presenza di acqua sulla sua superficie, perché sappiamo che questa è importantissima per lo sviluppo degli organismi viventi nel caso della vita terrestre. Anche tra le stelle che ospitano pianeti abbiamo una gran varietà di tipologie, ma di particolare interesse sono quelle simili al Sole in quanto i pianeti attorno a stelle più fredde, benché più facili da scoprire, presentano condizioni fisiche non particolarmente favorevoli a ospitare la vita.

Si presenta quindi il problema di quantificare l'abitabilità di un pianeta: per capire se ci sono le condizioni fisiche atte alla presenza di acqua liquida abbiamo bisogno di conoscere dettagliatamente un insieme di proprietà orbitali, planetari e atmosferiche, molte delle quali non sono per il momento misurabili. Possiamo però parametrizzare tali proprietà e studiare l'impatto che le loro variazioni hanno sull'abitabilità degli esopianeti. Per fare ciò sono stati sviluppati modelli climatici semplificati, come l'EBM o *Energy-Balance Model*, atti a calcolare le proprietà superficiali di un pianeta che ne determinano l'abitabilità dato un set di parametri. Nel corso degli anni questi modelli sono stati adattati per fare simulazioni climatiche con basso consumo di tempo di calcolo permettendo così di esplorare lo spazio dei parametri planetari. Un esempio è il modello ESTM (*Earth-like planets Temperature Models*) sviluppato a Trieste per pianeti rocciosi, attualmente applicato per stelle simili al Sole. Con questi modelli climatici, effettuando numerose simulazioni, possiamo studiare come varia l'abitabilità in funzione dei vari parametri planetari, alcuni dei quali ancora non osservabili.

In questo elaborato vedremo come le reti neurali possono aiutare a questo scopo: insieme alle migliaia di simulazioni ottenute con l'ESTM, possiamo dare una stima quantitativa dell'abitabilità dei pianeti dato un set di parametri di input. Con questo strumento efficace è possibile costruire delle curve di abitabilità in funzione delle diverse caratteristiche planetarie e orbitali.

Capitolo 1

Nozioni Preliminari

Prima di presentare il lavoro svolto è necessario introdurre alcuni concetti e dare una breve descrizione degli strumenti utilizzati. Per prima cosa vedremo la definizione di *abitabilità* di un pianeta (Vladilo et al. 2013[7]) e descriveremo brevemente il modello utilizzato per simulare come evolve la temperatura superficiale (Vladilo et al. 2015[8]). Introdurremo poi l'archivio *ARTECS*[1], realizzato con i dati ottenuti dalle simulazioni disponibile on line all'indirizzo web <http://wwwuser.oats.inaf.it/exobio/climates/>; infine verrà spiegato brevemente cos'è una rete neurale e come funziona.

1.1 Abitabilità

Definire l'abitabilità di un pianeta è tanto difficile quanto definire la vita stessa; ad oggi esistono più definizioni, in quanto si tratta di un concetto estremamente complesso. In maniera scientifica e basandoci su quella terrestre possiamo intenderla come un insieme organizzato di molecole o composti chimici in grado di compiere un insieme di processi che permettono lo sviluppo e la replicazione di un organismo capace di trasmettere alla generazione successiva le informazioni necessarie per ripetere il ciclo. Esistono molte teorie sull'origine della vita, ma tutte prevedono l'*abiogenesi*, cioè la teoria secondo la quale i primi organismi si siano formati a partire da semplici molecole organiche. Questi costituenti base erano presenti nel *brodo primordiale*, una miscela di acqua, sali ed altri composti organici ed inorganici a base di carbonio, azoto, ossigeno e idrogeno (ad esempio metano, ammoniaca o anidride carbonica). In questa soluzione si sarebbero poi aggregate le prime molecole, formando così i costituenti base delle cellule e della vita, come l'RNA e il DNA.

L'acqua è quindi alla base per la formazione della vita e non c'è alcun dubbio che sia fondamentale per il sostentamento della vita terrestre. Pertanto, per trovare ambienti che possano ospitare vita al di fuori della Terra, classificandoli così come abitabili, ci concentreremo su un criterio di abitabilità basato sulla presenza di acqua liquida.

Sulla base di queste considerazioni daremo ora la definizione di "liquid-water habitability" (Vladilo et al. 2013[7]). Osservando il diagramma di stato dell'acqua in Figura 1.1 si nota che a pressioni diverse il range di temperatura alla quale l'acqua si trova in stato liquido è variabile. Considerando un corpo sferico irradiato da una sorgente luminosa, come per i pianeti irradiati dalle stelle, la temperatura alla superficie dipende sia dal tempo che dalla latitudine, cioè $T = T(\varphi, t)$. Allora viene definita la funzione di abitabilità

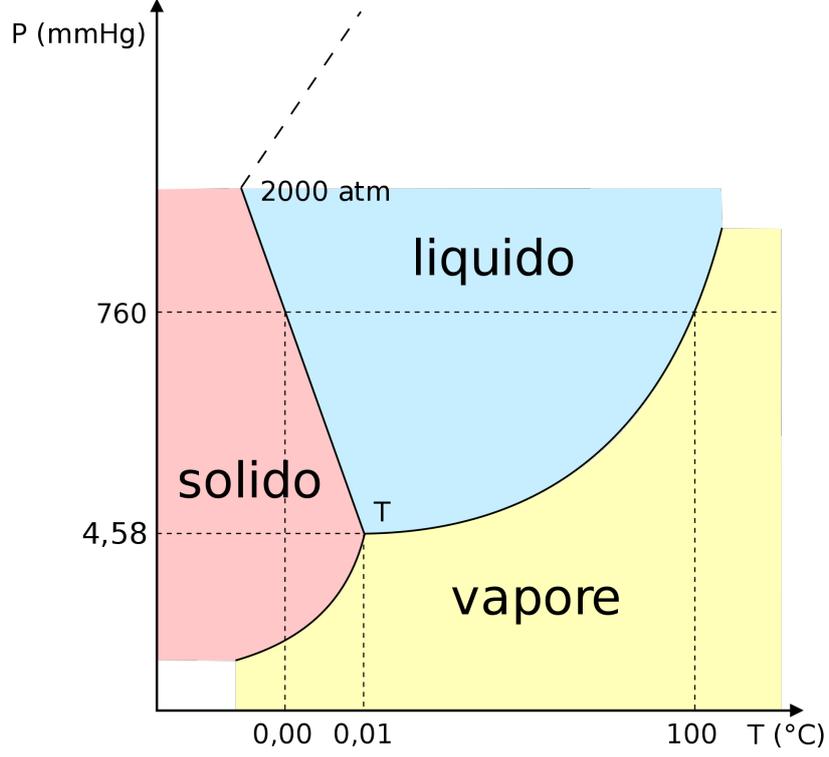


Figura 1.1: *Diagramma di stato dell'acqua. Immagine presa da Wikipedia.*

$$H(\varphi, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } T(\varphi, t) \in [T_{cong}(P), T_{evap}(P)] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.1)$$

dove φ è l'angolo di latitudine e $T_{cong}(P), T_{evap}(P)$ sono i limiti per l'acqua liquida, dipendenti ovviamente dalla pressione. $T(\varphi, t)$ è la temperatura superficiale a una data latitudine mediata su un periodo di rotazione, quindi la variabile t indica un dato momento dell'anno. Sulla base del criterio di acqua liquida viene allora definita l'abitabilità di un pianeta come

$$h_{lw} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^P [H(\varphi, t) \cos\varphi] dt}{2P} \quad (1.2)$$

Questa espressione ci fornisce la frazione di superficie e periodo orbitale in cui è possibile trovare acqua liquida in un pianeta extrasolare, quantificandone cos' l'abitabilità. Per applicare questa definizione è però necessario conoscere la temperatura superficiale in ogni momento dell'anno e per ogni latitudine; per questo motivo sono stati sviluppati modelli climatici per ricostruire l'andamento superficiale della temperatura per pianeti di tipo terrestre, tra cui il modello ESTM o *Earth-like planet Surface Temperature Model* (Vladilo et al. 2015[8]).

1.2 Il modello ESTM

L'indice di abitabilità definito dall'equazione (1.2) richiede una modellizzazione della temperatura superficiale in funzione della latitudine; a sua volta la temperatura dipende da molte proprietà stellari, orbitali e planetarie, alcune delle quali ancora non osservabili per gli esopianeti. Le grandezze che oggi si riescono a caratterizzare con le osservazioni astronomiche, tra cui semiasse maggiore, eccentricità e luminosità della stella, ci permettono di calcolare l'insolazione media annuale ricevuta dal pianeta, uno dei parametri più importanti per determinarne il clima. Sorge quindi la necessità di costruire dei modelli climatici flessibili per esplorare lo spazio dei parametri non vincolato dalle osservazioni e gli effetti che hanno sul clima al variare delle grandezze planetarie che invece si possono conoscere. Sono stati quindi sviluppati degli Energy-Balance Models (EBMs, Williams & Kasting 1997[9]), che calcolano l'ammontare di energia in funzione di latitudine e della posizione sull'orbita (o periodo dell'anno) di un pianeta usando un formalismo di diffusione del calore per il trasporto orizzontale, mentre per quello verticale vengono usate funzioni della temperatura superficiale. Nei modelli EBM l'equazione differenziale che governa l'evoluzione della temperatura è

$$C \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[D (1 - x^2) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + I = S(1 - A) \quad (1.3)$$

con $x = \sin\varphi$. Tutte le grandezze sono calcolate per unità d'area. Il lato sinistro dell'equazione rappresenta il calore immagazzinato dal pianeta: C è la capacità termica, il primo termine rappresenta quindi la quantità di calore immagazzinata in ogni zona e come questo evolve nel tempo. Il secondo è il *termine di diffusione*, la quantità di calore che viene trasmessa ad una fascia latitudinale adiacente per unità di superficie e di tempo. Il termine I rappresenta la quantità di radiazione zonale persa dal pianeta, detta OLR, acronimo per *Outgoing Longwave Radiation*.

Il lato destro dell'equazione è invece la frazione di radiazione proveniente dalla stella che viene assorbita dal pianeta; parte di essa viene riflessa alla sommità dell'atmosfera del pianeta dall'albedo A .

I vari parametri orbitali, planetari e stellari influiscono sulla temperatura superficiale attraverso i coefficienti dell'equazione (1.3); parametrizzando questi coefficienti e utilizzando i modelli climatici abbiamo gli strumenti che ci permettono di risolverla per studiare la temperatura superficiale di una grande diversità di esopianeti.

A partire dai modelli EBM, implementando alcune importanti modifiche, è stato sviluppato a Trieste il modello ESTM (Vladilo et al. 2015). Come si vede in Figura 1.2 i vari coefficienti che governano l'equazione differenziale (1.3) vengono parametrizzati in modo da ottenere risultati specifici per un vasto set di condizioni fisiche planetarie rappresentative della varietà di pianeti extrasolari. La differenza più importante rispetto ad il modello EBM è nella parametrizzazione del coefficiente di diffusione D . Questo non viene più considerato come una costante, ma viene parametrizzato come una funzione di pressione, accelerazione di gravità, periodo di rotazione, raggio del pianeta, albedo sulla sommità dell'atmosfera e distanza zenitale dalla stella; questo metodo viene calibrato e testato con esperimenti climatici 3D risultanti in buon accordo. Con questo tipo di modelli climatici e risolvendo l'equazione (1.3), possiamo valutare la temperatura superficiale al variare dei parametri che ancora non si riescono ad osservare, come pressione, accelerazione di gravità alla superficie, raggio del pianeta, periodo di rotazione, distanza zenitale della stella, composizione atmosferica e proprietà radiative delle nuvole. Per il trasporto

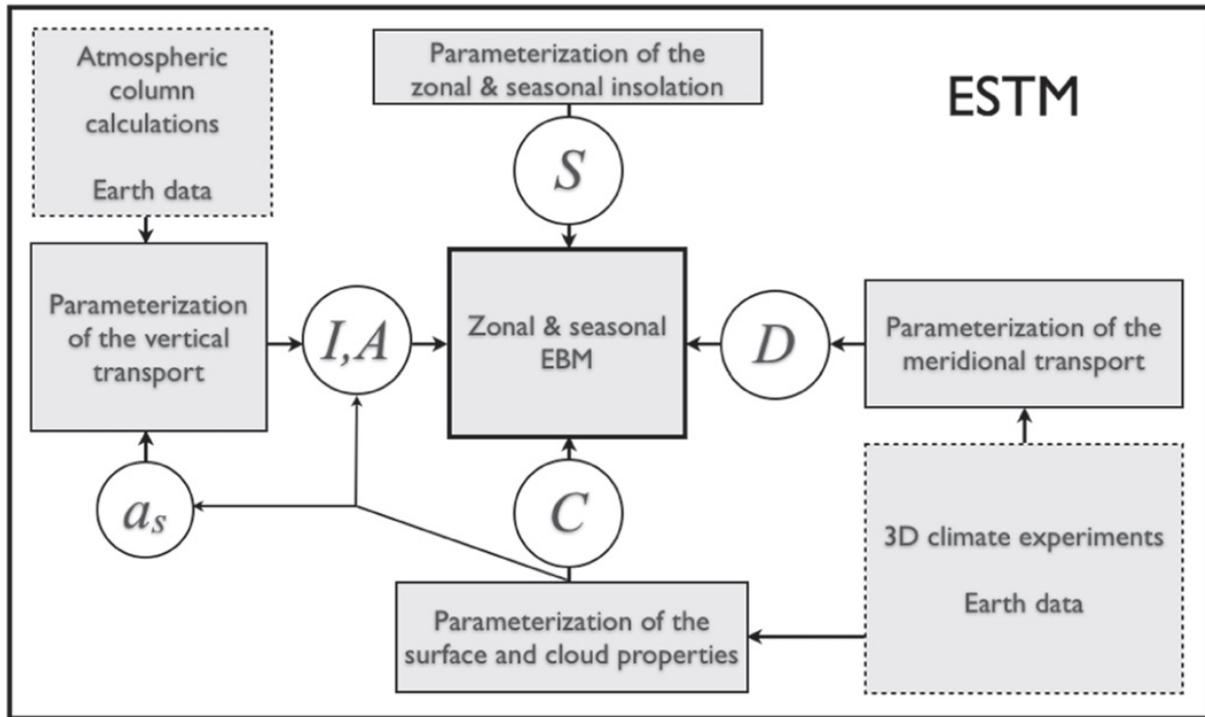


Figura 1.2: *Rappresentazione schematica del modello: alla base si trova il modello EBM; le lettere nei cerchi rappresentano i vari parametri che entrano in gioco nella risoluzione dell'equazione differenziale; i vari rettangoli ai margini descrivono le implementazioni aggiuntive al modello EBM.*

verticale di energia vengono usati calcoli di singola colonna atmosferica così da avere una parametrizzazione anche per l'albedo e l'OLR (NCAR, Kiehl et al. 1998[5]).

Il modello ESTM presenta dei vincoli, come ad esempio per l'inclinazione dell'asse di rotazione, essendo alcune caratteristiche limitate a pianeti simili alla Terra. Questo però non impedisce di implementare nel modello esperimenti climatici che descrivono anche condizioni stellari, orbitali e planetarie diverse da quelle terrestri, ricoprendo così una vasta gamma di tipologie di esopianeti.

1.3 L'archivio *ARTECS*

Utilizzando il modello ESTM sono state effettuate migliaia di simulazioni per calcolare la temperatura superficiale di esopianeti di tipo terrestre e da questa dare una stima dell'abitabilità in maniera iterativa definita in (1.2). Dati i parametri orbitali e planetari iniziali, il sistema viene fatto evolvere secondo l'equazione (1.3). La temperatura superficiale del pianeta viene calcolata ogni 10 orbite e al raggiungimento dell'equilibrio, stabilito quando la variazione è $< 0.01 K$ rispetto al ciclo precedente, la simulazione viene fermata. Vengono dati anche dei limiti sulle condizioni planetarie; il primo è la temperatura di ebollizione dell'acqua che ne causerebbe la totale evaporazione, il secondo è la pressione atmosferica di vapor acqueo che innescerebbe un effetto serra incontrollato o "runaway-greenhouse" (Hart 1978[3]; Kasting 1988[4]).

In tabella 1.1 sono riportati i vari valori dei parametri utilizzati nelle simulazioni, che sono state fatte con ogni possibile combinazione di questi. Non è presente il tipo di geografia continentale, ma si sono considerate quattro varietà di pianeti diversi: continenti polari, equatoriali, pianeti di tipo terrestre e un'ultima classe in cui la frazione degli oceani varia in modo costante

Exoclimates archive

Explanation page (<http://wwwuser.oats.inaf.it/exobio/climates/>)

Stellar parameters

| | | | | | |
|---|------|--|----|--|--------------|
| <input type="checkbox"/> Solar masses | | | | | 1.9891e30 |
| <input type="checkbox"/> Luminosity | | | | | 3.8247196e26 |
| <input checked="" type="checkbox"/> Semi-major axis | From | | To | | |
| <input checked="" type="checkbox"/> Eccentricity | From | | To | | |
| <input type="checkbox"/> Argument of pericenter | | | | | -77.06300354 |

Planet astrophysical parameters

| | Min | Max |
|--|-----|-----|
| <input type="checkbox"/> Planet radius | | |
| <input type="checkbox"/> Planet rotation period | | |
| <input checked="" type="checkbox"/> Obliquity of rotation axis | | |
| <input type="checkbox"/> Surface gravity | | |

Results of the simulation

| | | |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> Mean temperature | | |
| <input type="checkbox"/> Mean albedo | | |
| <input type="checkbox"/> Mean cloud coverage | | |
| <input type="checkbox"/> Liquid-water habitability | | |
| <input type="checkbox"/> Complex-life habitability | | |
| <input type="checkbox"/> Continuous habitability | | |
| <input type="checkbox"/> Nr. of orbits before convergence | | |
| <input type="checkbox"/> Mean ice coverage | | |
| <input type="checkbox"/> Equator-pole temperature difference | | |
| <input type="checkbox"/> Mean OLR | | |
| <input type="checkbox"/> Mean ASR | | |

Planet geophysical parameters

| | Min | Max |
|--|-----|----------|
| <input type="checkbox"/> Planet geography | | |
| <input type="checkbox"/> Const. fraction of oceans | | |
| <input checked="" type="checkbox"/> Pressure | | |
| <input type="checkbox"/> O2 Partial pressure | | 209460.0 |
| <input type="checkbox"/> O3 Partial pressure | | 0.0 |
| <input type="checkbox"/> N2 Partial pressure | | 780840.0 |
| <input type="checkbox"/> CO2 partial pressure | | |
| <input type="checkbox"/> CH4 partial pressure | | |
| <input type="checkbox"/> Relative humidity | | 0.6 |

Model parameters

| | |
|---|----|
| <input type="checkbox"/> Nr. of latitude zones | 54 |
| <input type="checkbox"/> Nr. of outputs per orbit | 48 |
| <input type="checkbox"/> Object name | |
| File name | |

Figura 1.3: Come si presenta la pagina dell'archivio; nei riquadri accanto alle caratteristiche planetarie, orbitali e stellari possiamo inserire i limiti di interesse per la ricerca degli esopianeti.

| Parametro | Valori selezionati per le simulazioni |
|--|--|
| Pressione atmosferica (Pa) | $1.003 \cdot 10^3$; $1.003 \cdot 10^4$; $5.016 \cdot 10^4$ $1.003 \cdot 10^5$; $3.009 \cdot 10^5$; $5.016 \cdot 10^5$ |
| Semiasse maggiore (UA) | 0.9 ; 1.0 ; 1.1 ; 1.2 ; 1.3 ; 1.4 ; 1.5 |
| Eccentricità | 0 ; $1.671 \cdot 10^{-2}$; 0.1 ; 0.2 ; 0.3 0.4 ; 0.5 ; 0.6 ; 0.7 ; 0.8 |
| Inclinazione dell'asse di rotazione ($^{\circ}$) | 0 ; 15 ; 23.439 ; 30 ; 40 ; 45 |
| Pressione parziale di CO_2 (ppm) | 38 ; $3.8 \cdot 10^2$; $3.8 \cdot 10^3$; $3.8 \cdot 10^4$ |

Tabella 1.1: *Combinazioni di caratteristiche planetarie e orbitali con le quali si sono ottenute le simulazioni nell'archivio artecs; oltre a queste quantità è stato variato anche il tipo di geografia planetaria in 4 classi differenti.*

in ogni zona latitudinale. Alcune caratteristiche planetarie e stellari, quali massa, raggio, periodo di rotazione, gravità superficiale, pressione parziale di CH_4 del pianeta e luminosità stellare sono fissati ai valori terrestri e solari.

I parametri che possiamo variare per filtrare la ricerca sono quindi quelli riportati in tabella 1.1 oltre alla tipologia dei continenti. Escludendo la tipologia in cui viene variata costantemente la frazione di oceani in ogni zona latitudinale, la geografia del pianeta non è una variabile che si può far variare in maniera continua a differenza delle altre caratteristiche fisiche e chimiche; di conseguenza non può essere trattata come le altre grandezze fisiche e chimiche che determinano il clima, poiché distingue le simulazioni in classi differenti.

Queste simulazioni sono state archiviate on-line e in figura 1.3 vediamo come appare la pagina web da cui è possibile estrarre i risultati di tali simulazioni. È possibile filtrare i parametri per la ricerca degli esopianeti entro i range di interesse e scaricare le informazioni di cui si necessita per il nostro studio. Grazie a questa varietà di dati possiamo provare a comprendere come l'abitabilità degli esopianeti viene influenzata da quantità che ancora non riusciamo a fissare tramite le osservazioni astronomiche.

1.4 Breve introduzione alle reti neurali

Facendo riferimento alle note del corso accademico di *Introduzione alla Teoria delle Reti Neurali* (Budinich, M. 2014[6]) verranno ora introdotte alcune nozioni base riguardanti il loro funzionamento.

Una rete neurale è un insieme di neuroni matematici interagenti tra loro, che emula in maniera semplificata il comportamento dei neuroni biologici. Grazie all'implementazione di algoritmi di apprendimento sono uno strumento efficace quando bisogna analizzare campioni di dati particolarmente complessi; esaminando degli esempi di "addestramento" la rete aggiorna i "collegamenti sinaptici" dei suoi neuroni per poter risolvere un dato problema. Le loro applicazioni sono molteplici e si possono usare per molti scopi diversi; con un particolare tipo di rete, le reti feed forward, si può approssimare qualsiasi funzione continua facendole addestrare su un set di esem-

pi che rappresentano la funzione cercata. Per studiare come l'abitabilità degli esopianeti dipenda dai parametri orbitali e planetari, questa proprietà insieme alla moltitudine di esempi presenti nell'archivio *ARTECS* si rivela essere molto utile.

1.4.1 Perceptrons

Vediamo come si può implementare in maniera semplice il comportamento biologico di un neurone in maniera matematica. I neuroni sono cellule che comunicano tra di loro tramite le sinapsi. Quando un neurone riceve un segnale da un suo vicino, al suo interno avvengono delle reazioni chimiche che, in base all'intensità del segnale ricevuto, possono farlo attivare. In questo caso il neurone trasmetterà il segnale ai suoi vicini attivando una reazione a cascata che trasporta ed elabora l'informazione iniziale.

Identifichiamo l'input $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ come l'informazione iniziale ricevuta, dove n indica il numero di collegamenti sinaptici che entrano nel neurone, e l'output y come il segnale trasmesso dal neurone. Allora possiamo descrivere in maniera semplificata il comportamento biologico con la formula

$$y = \Theta \left(\sum_{i=1}^n x_i \omega_i + \theta \right) \quad (1.4)$$

con $\Theta(x)$ la funzione a scalino

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

. Le funzioni di risposta dei neuroni matematici, che come vedremo possono anche essere diverse da Θ , prendono il nome di *funzioni di attivazione*.

θ rappresenta la soglia di attivazione: se la somma tra l'input e la soglia è sufficientemente alta, allora il neurone risponderà all'input generando e propagando a sua volta un segnale ai neuroni adiacenti, altrimenti rimarrà silente. Le varie sinapsi del neurone non contribuiscono in maniera uguale all'attivazione del segnale di risposta, infatti i segnali di ingresso sono moltiplicati per i pesi ω_i . Il neurone appena schematizzato con la funzione di attivazione $\Theta(x)$ è il modello proposto da McCulloch e Pitts nel 1943. Questo tipo di neurone può essere usato ad esempio per classificare una serie di ν dati \vec{x}_ν di dimensione n in due categorie diverse, poichè gli output y_ν possono avere solo due valori essendo generati dalla funzione a scalino.

Il perceptron è un neurone che funziona nella maniera appena descritta con una regola di apprendimento associata; inoltre possiamo avere una funzione di attivazione generica, solitamente continua, come la tangente iperbolica *tanh* o una funzione lineare. Con perceptron di tipo diverso o connettendoli tra loro è possibile risolvere una gran varietà di problemi differenti.

1.4.2 Apprendimento supervisionato

Far apprendere qualcosa ai neuroni matematici significa correggere i pesi in ingresso ω_i in modo che un dato problema venga risolto in maniera sempre più precisa e corretta. Esistono principalmente due metodi di apprendimento: supervisionato e non supervisionato; nel primo si conoscono le risposte corrette del problema scelto, mentre nel secondo i pesi vengono aggiornati solo in funzione dell'input in quanto non si conoscono le soluzioni esatte. Con i molteplici esempi disponibili prodotti dai risultati delle simulazioni dell'ESTM è opportuno aggiornare i

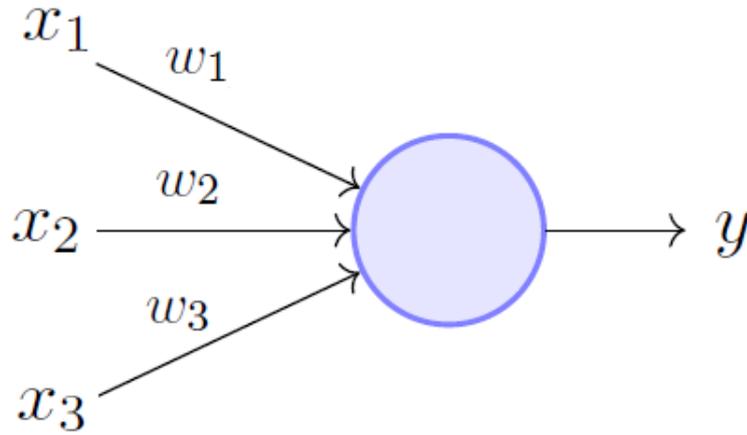


Figura 1.4: Schematizzazione di un neurone matematico; in questo caso la dimensione dell'input \vec{x} è 3. Ad ogni componente dell'input viene associato un peso ω_i per il calcolo dell'output y (Fonte:<https://towardsdatascience.com/perceptron-the-artificial-neuron-4d8c70d5cc8d>).

pesi tramite l'apprendimento supervisionato. Il neurone (o una rete neurale) analizza una parte dei dati, il *train set*, e aggiorna i suoi pesi con questo insieme di esempi. Successivamente si testa la capacità di risolvere il problema scelto su un set di dati non analizzati in precedenza, il *test set*, per controllare la qualità e la veridicità delle risposte previste. Il test è particolarmente importante in questo tipo di apprendimento, in quanto può accadere che il neurone o la rete impari ad imitare bene il set di esempi ma non sia in grado di riprodurre correttamente i casi non computati; in questo caso il problema non è stato generalizzato al di fuori dei dati di addestramento e di conseguenza non viene risolto correttamente.

Diamo un formalismo a questo metodo di apprendimento usando il perceptron descritto sopra. Sia \vec{x}_ν un dato insieme di m esempi con dimensione n , cioè

$$\nu = 1, 2, \dots, m \text{ e } \vec{x}_\nu = (x_{1\nu}, x_{2\nu}, \dots, x_{n\nu}) \quad (1.6)$$

e associamo a ogni esempio la risposta corretta ξ_ν . L'output del neurone, in generale diverso dalla risposta corretta, sarà invece

$$y_\nu = \Theta \left(\sum_{i=1}^n x_{i\nu} \omega_i + \theta \right) \quad (1.7)$$

Possiamo riscrivere in maniera più compatta questa formula inglobando la soglia θ all'interno della sommatoria e associandole un peso $\omega_{n+1} = 1$. Scegliendo una generica funzione f come funzione di attivazione per il neurone otteniamo

$$y_\nu = f \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_{i\nu} \omega_i \right) \quad \text{con } x_{n+1} = \theta \quad (1.8)$$

Osserviamo che la sommatoria ora si può associare al prodotto scalare tra il vettore dei pesi del neurone e il vettore di input dell'esempio \vec{x}_ν , quindi in notazione vettoriale

$$f_1 = f_2 = \vec{\omega}_{1i} = \vec{\omega}_{2j} = y_\nu = f(\vec{x}_\nu \cdot \vec{\omega}) \quad (1.9)$$

Si può dunque definire una funzione degli errori, che si basa sul numero di risposte corrette con

$$E(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m (\xi_\nu - y_\nu)^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m (\xi_\nu - f(\vec{x}_\nu \cdot \vec{\omega}))^2 \geq 0 \quad (1.10)$$

Il minimo valore di questa funzione si ha quando gli output calcolati per tutti gli esempi y_ν coincidono con le risposte esatte ξ_ν , quindi trovare i pesi giusti per risolvere un dato problema significa ricercare il minimo della funzione degli errori.

Il metodo più comunemente usato per minimizzare la funzione $E(\vec{\omega})$ è la *discesa lungo il gradiente*; viene calcolato il gradiente della funzione degli errori rispetto ai pesi, che vengono spostati nella direzione in cui questo è negativo, in modo da ottenere un valore sempre minore dell'errore. La regola di aggiornamento dei pesi dunque è

$$\omega_i = \omega_i + \Delta\omega_i = \omega_i - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial \omega_i} \quad (1.11)$$

ε è il learning rate e quantifica la correzione che viene fatta sui pesi. Calcolando le derivate

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_i} = - \sum_{\nu=1}^m [\xi_\nu - f(\vec{x}_\nu \cdot \vec{\omega})] f'(\vec{x}_\nu \cdot \vec{\omega}) x_{i\nu} \quad (1.12)$$

possiamo infine scrivere l'algoritmo di aggiornamento dei pesi

$$\vec{\omega} = \vec{\omega} + \varepsilon \sum_{\nu=1}^m \delta_\nu \vec{x}_\nu \quad \text{con } \delta_\nu = (\xi_\nu - y_\nu) f'(\vec{x}_\nu \cdot \vec{\omega}) \quad (1.13)$$

Dato un problema per cui esista almeno una soluzione, con questa regola di apprendimento

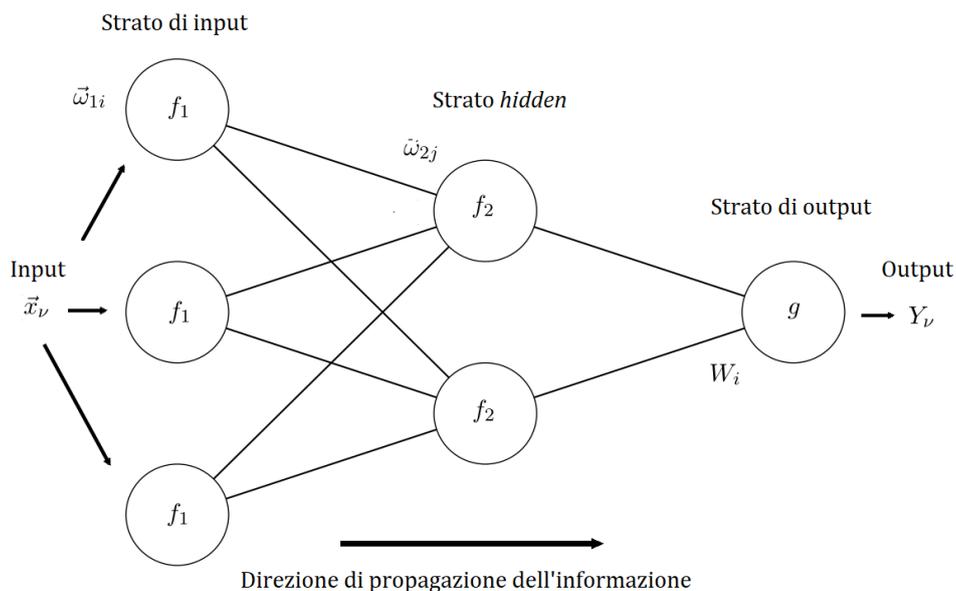


Figura 1.5: Rappresentazione di una rete feed forward. In questo caso ci sono 3 neuroni nello strato di input, 2 in quello hidden e 1 neurone in output. Ogni neurone riceve l'informazione da tutti quelli presenti nello strato precedente.

si può dimostrare che il perceptron con funzione di attivazione a scalino, partendo dai pesi $\omega_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$, riesce a costruire un vettore dei pesi che risolve il problema applicando un numero finito di volte l'algoritmo. Purtroppo nella maggior parte dei casi non esiste un vettore tale da trovare la soluzione corretta, ma collegando più neuroni tra loro aumentiamo notevolmente il numero di problemi risolvibili.

Questa regola per aggiornare i pesi si può applicare anche scegliendo una funzione degli errori definita diversamente; per problemi differenti può essere utile usare funzioni diverse da quella sopra definita.

1.4.3 Reti feed forward e back propagation

Quanto appena visto per il singolo perceptron si può generalizzare per reti con più neuroni connessi tra di loro, le *reti feed forward*: sono successioni di strati di neuroni, in cui gli ingressi dei neuroni di uno strato sono gli output generati dallo strato precedente, in modo che l'informazione iniziale fluisca in una sola direzione; gli strati intermedi prendono il nome di strati *hidden*. Considerando una semplice rete con h neuroni in ingresso e un neurone di uscita si può scrivere l'output complessivo come

$$Y_\nu = g \left(\sum_{i=1}^h W_i f(\vec{x}_\nu \cdot \vec{\omega}_i) \right) \quad (1.14)$$

dove W_i sono i pesi del neurone in uscita, mentre $\vec{\omega}_i$ sono i pesi dei neuroni in ingresso (i è l'indice che identifica il neurone); g è la funzione di attivazione del neurone singolo e f quella dei neuroni nello strato hidden. Definiamo anche le h risposte dei neuroni nello strato intermedio

come

$$y_{i\nu} = f(\vec{x}_\nu \cdot \vec{\omega}_{i\nu}) \quad \text{con } i = 1, \dots, h \quad (1.15)$$

Se usiamo una funzione di trasferimento con risposta lineare per il neurone in uscita, cioè $g(x) = x$, possiamo applicare il seguente

Teorema 1. *Sia f una funzione continua, monotona, limitata e non costante e $C(H_n)$ l'insieme delle funzioni continue definite sull'ipercubo H_n . Per ogni $F(\vec{x}) \in C(H_n)$ ed $\varepsilon > 0$ esistono delle costanti h , \vec{W} e $\vec{\omega}_i$ tali che:*

$$\left| F(\vec{x}) - \sum_{i=1}^h W_i f(\vec{x} \cdot \vec{\omega}_i) \right| < \varepsilon \quad \forall \vec{x} \in H_n \quad (1.16)$$

Questo ci dice che possiamo approssimare qualsiasi funzione continua $F(\vec{x})$ facendo una somma pesata di funzioni note con una precisione arbitraria ε ; questo teorema si può generalizzare per un numero qualsiasi di strati hidden e di neuroni di output. Purtroppo non c'è un modo per stabilire quanto debba essere grande h per un determinato problema o quali devono essere i pesi; possiamo però applicare l'algoritmo di apprendimento usato per il singolo perceptron. Vogliamo quindi minimizzare la funzione degli errori, in questo caso data da

$$E(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_h, \vec{W}) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m (\xi_\nu - Y_\nu)^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m \left(\xi_\nu - \sum_{i=1}^h W_i f(\vec{x}_\nu \cdot \vec{\omega}_i) \right) \quad (1.17)$$

Le regole di apprendimento per i neuroni della rete sono

$$\begin{cases} W_i = W_i - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial W_i} \\ \omega_{ij} = \omega_{ij} - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial \omega_{ij}} \end{cases} \quad (1.18)$$

Sviluppando le derivate della funzione degli errori e definendo $\delta_\nu = (\xi_\nu - Y_\nu) f'(\vec{y}_\nu \cdot \vec{W})$ si vede facilmente che, in forma vettoriale si ottiene

$$\begin{cases} \vec{W} = \vec{W} + \varepsilon \sum_{\nu=1}^m \delta_\nu \vec{y}_\nu \\ \vec{\omega}_j = \vec{\omega}_j + \varepsilon \sum_{\nu=1}^m \delta_\nu W_j f'(\vec{x}_\nu \cdot \vec{\omega}_j) \vec{x}_\nu \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, h \end{cases} \quad (1.19)$$

Invece di far visualizzare alla rete tutti gli m esempi possiamo decidere di aggiornare i pesi

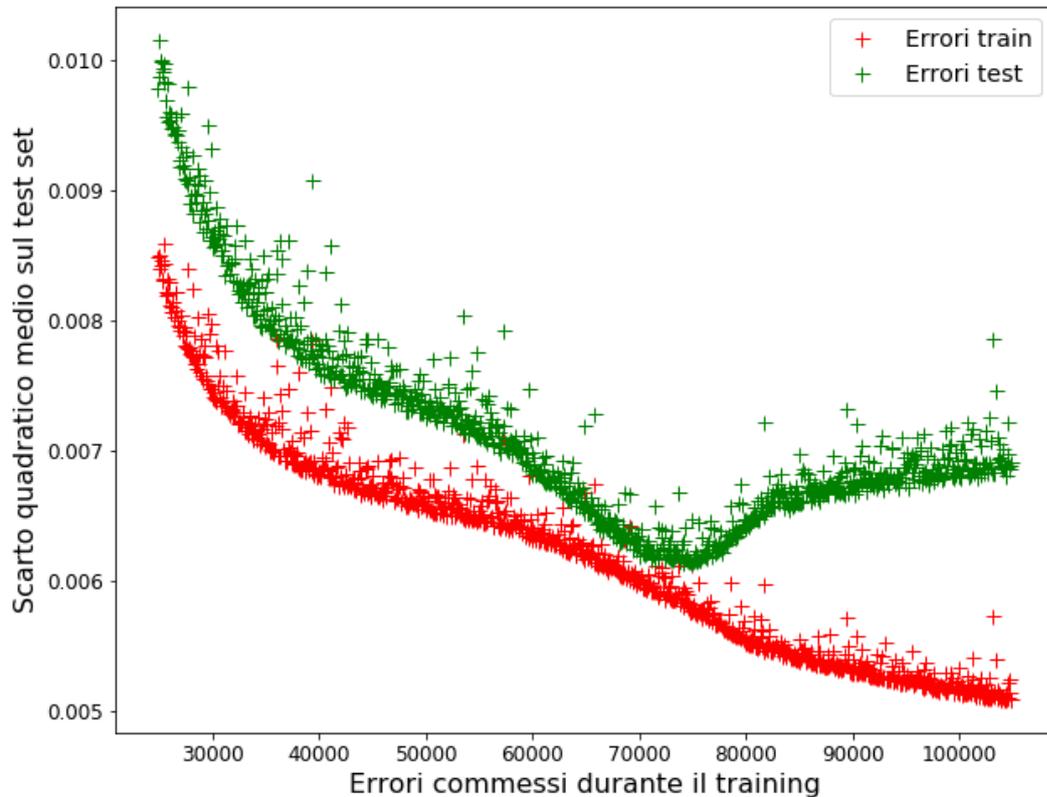


Figura 1.6: In questa figura si può vedere un esempio di overfitting; nell'asse delle ascisse il numero di ripetizioni compiute, sull'asse delle ordinate gli errori commessi su training e test. Si può osservare che gli errori sul training raggiungono un valore minimo per poi aumentare.

a nostro piacimento. Ad esempio potremmo aggiornare i pesi dopo aver fatto esaminare alla rete un singolo esempio scelto casualmente e ripetere l'operazione un numero arbitrario di volte, oppure fare in modo che vengano esaminati piccoli sottocampioni dei dati a nostra disposizione, denominati *batch*, prima di applicare l'algoritmo.

Come già detto aggiungendo neuroni e quindi parametri alla rete, questa diventa sempre più efficiente nell'apprendere gli esempi del training set. Infatti un maggior numero di parametri rende la rete più adattabile ai dati in ingresso ma c'è il rischio che un set di dati non elaborati in precedenza non venga ben ricostruito. In questo caso si dice che c'è stato *overfitting*: la rete "impara" bene gli esempi senza però generalizzare. Se invece set di dati mai esaminati prima vengono ricostruiti fedelmente estrapolando il risultato dalle informazioni ricevute durante l'addestramento, il problema in questione è stato ben generalizzato. Mettendo in grafico l'errore sul test, quando si ha overfitting si vede chiaramente che questo raggiunge un minimo per poi risalire; ne riportiamo un esempio in Figura 1.6, dove sono mostrati gli errori commessi sugli esempi del training e del test. In caso di overfitting il momento migliore per fermare l'addestramento è quando si raggiunge il minimo dell'errore sul test set.

Capitolo 2

Analisi dei dati

I parametri esplorati per l'analisi sono alcuni di quelli che è possibile variare nell'archivio *AR-TECS*, che raccoglie i risultati simulati dal modello ESTM. Quindi vogliamo provare a stimare l'abitabilità calcolata con il criterio di acqua liquida conoscendo semiasse maggiore, eccentricità dell'orbita, inclinazione dell'asse di rotazione, pressione atmosferica e pressione parziale di CO₂ del pianeta in questione. La stima viene data in due maniere differenti: il primo modo consiste nell'eseguire un'interpolazione multilineare del tipo

$$h = A \cdot a + B \cdot e + C \cdot \alpha + D \cdot P + E \cdot P_{CO_2} \quad (2.1)$$

con A, B, C, D, E i coefficienti da determinare, h il valore di abitabilità e $a, e, \alpha, P, P_{CO_2}$ i parametri elencati sopra. In questo modo, una volta trovati i coefficienti, possiamo calcolare l'abitabilità per qualsiasi combinazione iniziale dei parametri. Il problema però è che anche ad un'analisi visuale risulta che la relazione tra i parametri e l'abitabilità non è lineare e si devono quindi cercare degli intervalli nello spazio dei parametri in cui appare lineare e calcolare i coefficienti in questi intervalli. Il secondo metodo utilizzato è quello di far stimare l'abitabilità ad una rete neurale dopo averla fatta addestrare sui dati dell'archivio. La rete utilizzata è una rete feed forward, descritta nel capitolo precedente. Vogliamo quindi usare il teorema di approssimazione universale valido per questo tipo di reti e stimare la funzione che fornisce il valore di h a partire dai 5 parametri. Una volta fatto non otterremo una semplice espressione per il calcolo dell'abitabilità, ma si possono salvare i pesi e la rete intera che effettivamente contiene la stima cercata.

2.1 Selezione del campione

Il numero totale di simulazioni presenti nell'archivio è 20284; sono stati computati 40320 casi, ma molti non sono presenti nell'archivio in quanto le simulazioni si interrompono quando il clima dell'esopianeta simulato va in runaway da effetto serra. Conoscendo le combinazioni dei parametri utilizzate per tutte le simulazioni potremmo capire quali rientrano in questi casi per esclusione. La Figura 2.1 mostra la distribuzione delle abitabilità calcolate con le simulazioni dell'ESTM; notiamo che pianeti con abitabilità bassa sono molto frequenti, mentre quelli che presentano un'abitabilità intermedia sono pochi. Esaminando meglio questi dati si scopre che la maggior parte delle simulazioni ha un'abitabilità pari a zero; se usassimo questi punti per estrapolare una funzione lineare che stima l'abitabilità, sicuramente sottostimeremo le abitabilità diverse da zero. I casi in questione sono stati rimossi dal campione ottenendo un insieme di 7460 punti. Inoltre, per grandi inclinazioni dell'asse di rotazione il modello ESTM può non essere affidabile. Quindi sono state considerate solo le simulazioni con un angolo di inclinazione inferiore

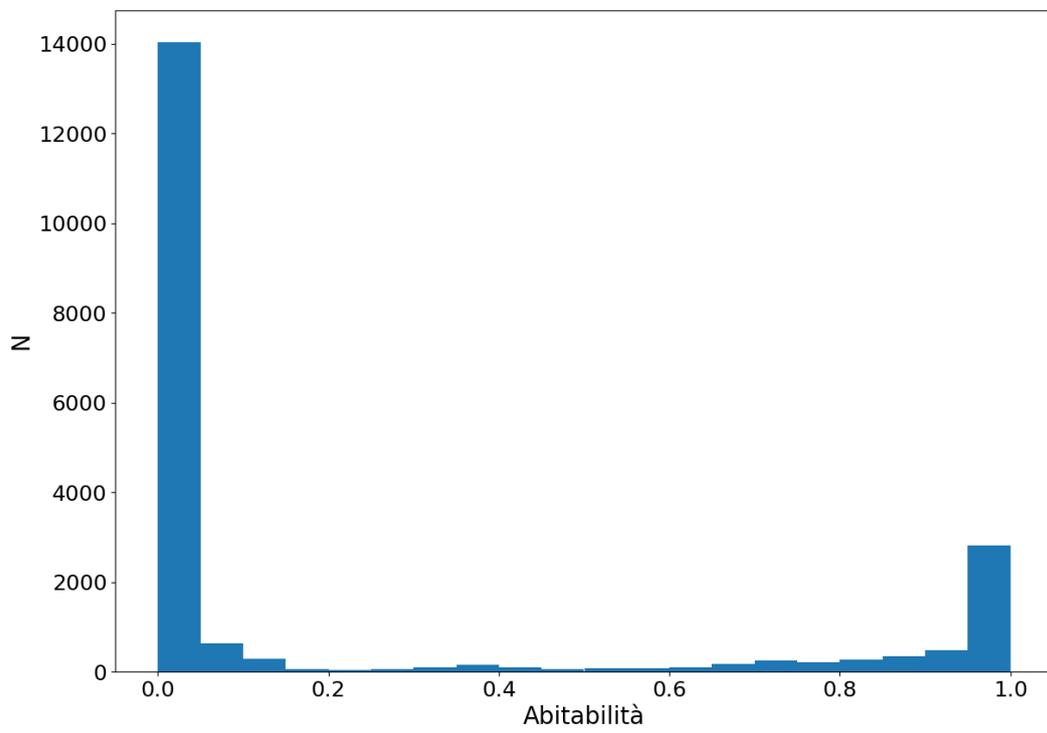


Figura 2.1: Distribuzione delle abitabilità del campione iniziale, in totale sono presenti 20284 casi; si nota chiaramente l'abbondanza delle simulazioni con abitabilità calcolata pari a zero.

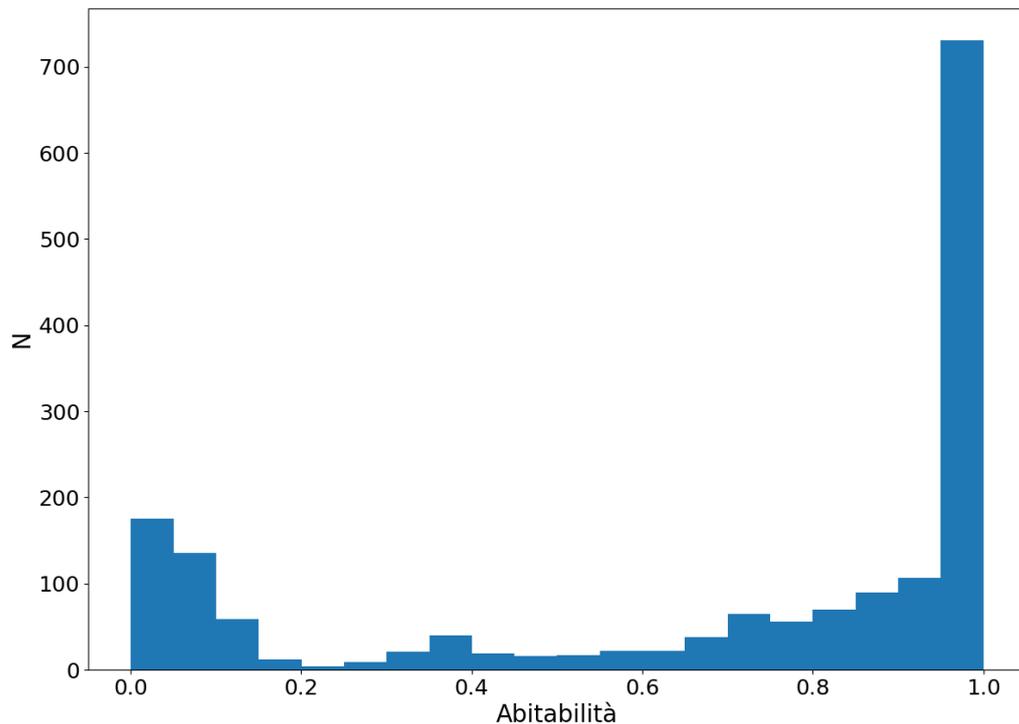


Figura 2.2: *Distribuzione delle abitabilità una volta selezionato il campione come descritto nel testo.*

ai 40 gradi. Un parametro non ancora considerato qui, ma presente nel database, è la geografia del pianeta; questa indica un'appartenenza a una certa tipologia di pianeta e di conseguenza non può essere trattata come gli altri parametri. Si è quindi scelto di utilizzare solo i pianeti con geografia di tipo terrestre, ottenendo per il campione finale un insieme di 1709 casi. La Figura ?? mostra la distribuzione delle abitabilità per il campione scelto.

2.2 Interpolazione multilineare

Come detto in precedenza con questo metodo ci prefissiamo di trovare una relazione del tipo (2.1) spezzando in più intervalli i parametri che vogliamo esplorare per stimare l'abitabilità. In questo modo non troveremo un solo set dei coefficienti (A, B, C, D, E) , perchè questi saranno diversi a seconda dei range in cui si trovano i parametri che descrivono le grandezze planetarie e orbitali. Vedremo ora come sono stati scelti i ranges, in che modo viene fatta l'interpolazione e i risultati ottenuti.

2.2.1 Individuazione dei ranges

Per cercare la divisione in intervalli più appropriata sono stati fatti più tentativi; inizialmente si è provato a dividere in tre intervalli le abitabilità osservando l'istogramma in Figura 2.2, che riporta la distribuzione del campione. Per la suddivisione sono stati considerati gli intervalli in cui l'istogramma appare avere una forma lineare; in questo caso si sono trovati 3 intervalli: $[0.0, 0.2[$, $[0.2, 0.98[$ e $[0.98, 1.0]$. Così facendo otteniamo 3 set di coefficienti diversi, ognuno dei

| Parametro | Intervalli |
|-----------|--|
| P (Pa) | [1003.1 , 10031.0] ; [50155. 0 , 501550.0] |
| a (UA) | [0.9 , 1.0] ; [1.1 , 1.5] |
| e | [0 , 0.2] ; [0.3 , 0.6] ; [0.7 , 0.8] |

Tabella 2.1: *Intervalli scelti per effettuare le interpolazioni separatamente; ne sono stati individuati 2 per a , 3 per e e 2 per P .*

quali associato al range di abitabilità in cui è stato calcolato. Dato che il numero di simulazioni che ricade nei vari intervalli non è lo stesso, per la stima finale dell'abitabilità viene calcolata la media pesata con le percentuali di simulazioni ricadenti nei limiti di abitabilità stabiliti. Questo metodo di suddivisione non ha portato però a buoni risultati e si è deciso di adottare una nuova strategia: invece di dividere le abitabilità è più opportuno spezzare in intervalli i parametri, in quanto vogliamo trovare una funzione che stima le abitabilità a partire da questi.

Bisogna quindi studiare come varia l'abitabilità in funzione delle caratteristiche planetarie e orbitali e individuare gli intervalli dei parametri in cui la relazione tra questi e l'abitabilità appare lineare. Per produrre i fit di cui necessitiamo viene considerato un parametro alla volta vengono mostrate le abitabilità in funzione di uno solo di questi. Per ogni valore del parametro avremo quindi tutte le simulazione effettuate al variare delle altre caratteristiche planetarie e orbitali e la media dell'abitabilità è calcolata su tutte queste simulazioni. In questo modo possiamo vedere come variano le medie in funzione dei singoli parametri e studiare gli eventuali trends. I grafici in Figura 2.3 sono ottenuti come detto sopra; le croci rosse corrispondono alle simulazioni effettuate con un particolare valore di uno dei 5 parametri, mentre i triangoli rossi sono le medie dell'abitabilità. Osservandole possiamo individuare i differenti trends e di conseguenza i diversi intervalli; per la pressione e la pressione parziale di CO_2 l'andamento è crescente e all'incirca lineare mentre per l'obliquità il trend è decisamente piatto. Nel caso del semiasse maggiore invece sono chiaramente visibili almeno 2 intervalli con due pendenze diverse. Anche per l'eccentricità si riescono ad individuare diverse zone in cui troviamo andamenti delle medie differenti. Nella tabella 2.1 sono presenti gli intervalli scelti.

Per l'inclinazione dell'asse di rotazione la pressione parziale di CO_2 , non essendo evidenti grandi cambiamenti di pendenza nelle medie delle abitabilità, si è scelto di evitare di dividere ulteriormente i casi simulati.

Quindi in totale abbiamo 12 intervalli diversi in cui viene eseguita l'interpolazione e di conseguenza troveremo 12 set diversi di coefficienti. In 3 di questi intervalli non ricade nemmeno una simulazione e per ciò non è possibile fare l'interpolazione multilineare per questa combinazione di parametri; per come abbiamo selezionato i dati inizialmente possiamo decidere che questo è uno dei casi in cui troveremmo solo abitabilità nulle, in quanto abbiamo selezionato solo le simulazioni con $h > 0$.

In tabella 2.2 viene riportato il numero di casi che rientra in ciascuna combinazione degli intervalli stabiliti. Nell'intervallo 8 e 9 l'unico valore riscontrato di pressione tra i due possibili è il più alto. Infatti in questi intervalli abbiamo alti valori per il semiasse maggiore, da cui consegue una minore insolazione e un'abbassamento della temperatura; in queste condizioni

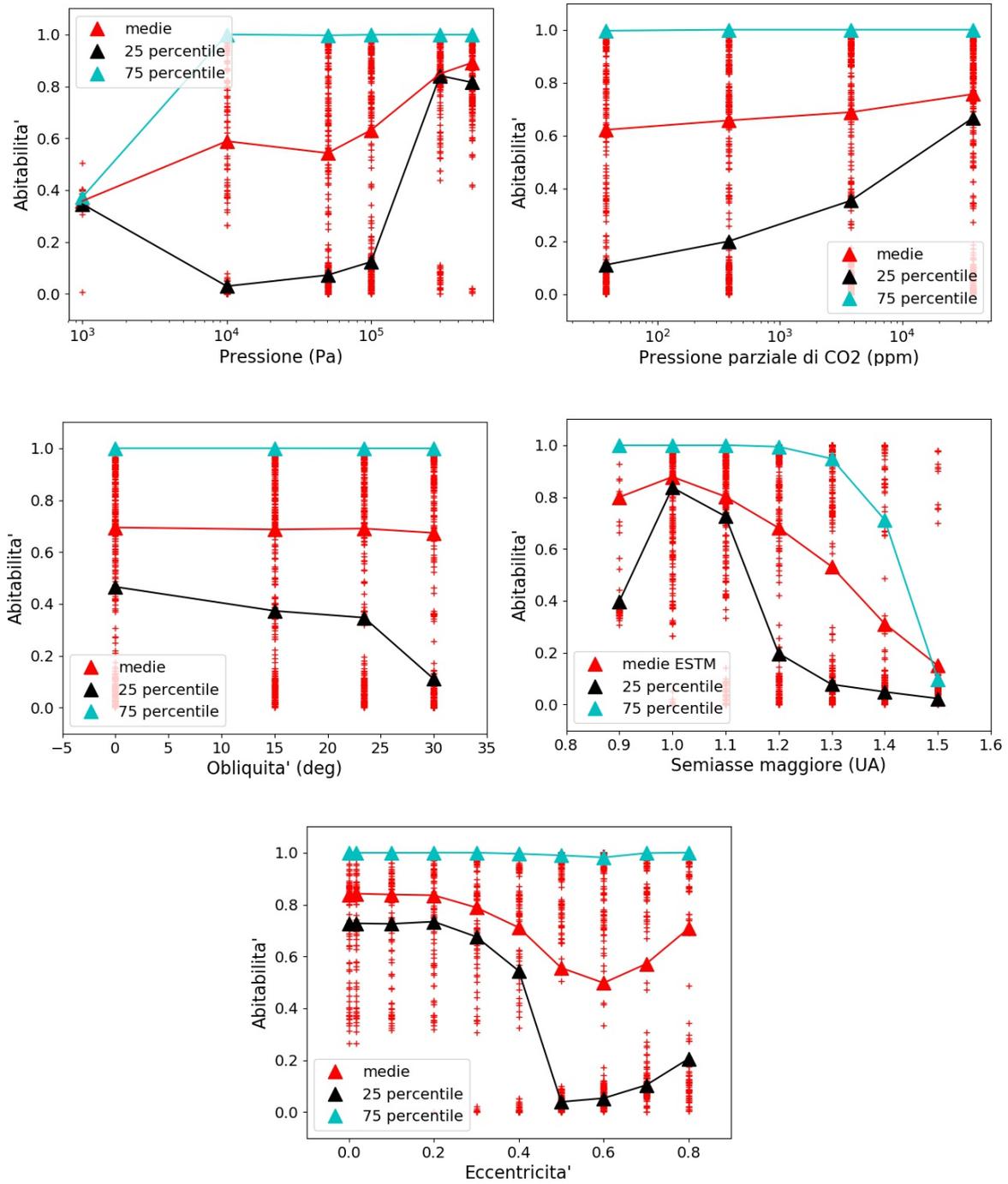


Figura 2.3: Dipendenza delle medie dell'abitabilità in funzione dei vari parametri, calcolate come descritto nel testo. Le croci rosse indicano le singole simulazioni, i triangoli rossi le medie e i triangoli nero e azzurro rappresentano rispettivamente i percentili 25 e 75. Possiamo osservare alcuni trends nei grafici per il semiasse maggiore, per l'eccentricità e per la pressione; l'andamento delle medie in funzione della pressione parziale di CO₂ è rettilineo crescente, mentre per le obliquità il trend è piatto.

| # intervallo | Limiti a (UA) | Limiti P (Pa) | Limiti e | # di casi ritrovati | # di casi nell'intervallo |
|-----------------|--------------------|--------------------|---------------|------------------------|------------------------------|
| 1 | 0.9 , 1.0 | 1003.1 , 10031.0 | 0 , 0.2 | 129 | 256 |
| 2 | 0.9 , 1.0 | 1003.1 , 10031.0 | 0.3 , 0.6 | 72 | 256 |
| 3 | 0.9 , 1.0 | 1003.1 , 10031.0 | 0.7 , 0.8 | 0 | 128 |
| 4 | 0.9 , 1.0 | 50155.0 , 501550.0 | 0 , 0.2 | 247 | 512 |
| 5 | 0.9 , 1.0 | 50155.0 , 501550.0 | 0.3 , 0.6 | 144 | 512 |
| 6 | 0.9 , 1.0 | 50155.0 , 501550.0 | 0.7 , 0.8 | 0 | 256 |
| 7 | 1.1 , 1.5 | 1003.1 , 10031.0 | 0 , 0.2 | 0 | 640 |
| 8 | 1.1 , 1.5 | 1003.1 , 10031.0 | 0.3 , 0.6 | 62 | 640 |
| 9 | 1.1 , 1.5 | 1003.1 , 10031.0 | 0.7 , 0.8 | 18 | 320 |
| 10 | 1.1 , 1.5 | 50155.0 , 501550.0 | 0 , 0.2 | 169 | 1280 |
| 11 | 1.1 , 1.5 | 50155.0 , 501550.0 | 0.3 , 0.6 | 480 | 1280 |
| 12 | 1.1 , 1.5 | 50155.0 , 501550.0 | 0.7 , 0.8 | 388 | 640 |
| | | | | $Tot_{h>0} = 1709$ | $Tot = 6720$ |

Tabella 2.2: *Intervalli scelti per effettuare i diversi fit lineari e il numero di simulazioni con abitabilità non nulla che ci rientrano.*

troviamo pochi casi con acqua liquida sulla superficie del pianeta e abbassando la pressione ci spostiamo verso condizioni ancora meno favorevoli all'abitabilità. Inoltre nell'intervallo 9, come nel 10 ad eccezione di una ventina di casi, si trovano quasi esclusivamente abitabilità maggior a 0.7 e semiasse minore di 1.3 UA; anche per il decimo intervallo valgono le considerazioni fatte sull'insolazione e la distanza del pianeta dalla stella fatte poco sopra.

In alcuni intervalli si trovano solo una piccola parte dei casi totali simulati e quelli mancanti rispecchiano le combinazioni di parametri che danno abitabilità nulla. Possiamo interpretarli come dei casi limite e non particolarmente favorevoli per l'abitabilità.

2.2.2 Descrizione dell'algoritmo

Per trovare i 5 coefficienti abbiamo quindi bisogno di un sistema di 5 equazioni.

$$h_i = A \cdot a_i + B \cdot e_i + C \cdot \alpha_i + D \cdot P_i + E \cdot P_{CO_2i} \quad \text{con } i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2.2)$$

dove la procedura seleziona casualmente dall'archivio cinque set di quintupletti di parametri ($a, e, \alpha, P, P_{CO_2}$) ed i corrispondenti valori di abitabilità ottenuti con l'ESTM. Il sistema ottenuto può essere però impossibile; se è risolvibile la procedura trova il set di coefficienti cercato. Come abbiamo visto la distribuzione delle abitabilità non è uniforme; le simulazioni, vengono scelte con una probabilità che è inversamente proporzionale al numero di volte che si verificano, come ottenuto dalla Figura 2.2, in modo da non introdurre tendenze spurie legate alla selezione dei valori di abitabilità. I dati per le pressioni vengono inoltre normalizzati ai valori terrestri

Un solo sistema però non è sufficiente, perchè vogliamo considerare il maggior numero di simulazioni possibili per avere una migliore stima dei coefficienti, dato che ogni sistema darà dei risultati diversi. Il programma in *python* che risolve il sistema (2.2) è fatto in modo che possiamo scegliere quanti sistemi devono essere impostati, chiaramente tutti diversi. Questo numero viene impostato in base alla quantità di casi che rientrano nell'intervallo da interpolare; alla fine

| | Semiassse $A \pm \sigma_A$ | Eccentricità $B \pm \sigma_B$ | Inclinazione $C \pm \sigma_C$ | Pressione $D \pm \sigma_D$ | Pressione CO_2 $E \pm \sigma_E$ |
|---------------|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|
| Intervallo 1 | -0.635 ± 0.064 | -0.926 ± 0.278 | 0.006 ± 0.001 | 17.561 ± 1.182 | 0.004 ± 0.001 |
| Intervallo 2 | -1.116 ± 0.359 | 1.676 ± 0.221 | -0.002 ± 0.003 | 11.469 ± 3.002 | 0.002 ± 0.0004 |
| Intervallo 4 | 0.598 ± 0.175 | 9.148 ± 10.577 | 0.006 ± 0.004 | 0.045 ± 0.005 | -0.015 ± 0.019 |
| Intervallo 5 | 0.775 ± 0.01 | 0.298 ± 0.021 | 0.0 ± 0.003 | 0.037 ± 0.002 | 0.004 ± 0.0001 |
| Intervallo 8 | -0.488 ± 0.029 | 1.220 ± 0.119 | 0.002 ± 0.0004 | -0.214 ± 0.564 | 0.001 ± 0.0001 |
| Intervallo 10 | 0.020 ± 0.027 | -0.046 ± 0.196 | -0.001 ± 0.001 | 0.109 ± 0.006 | 0.005 ± 0.0003 |
| Intervallo 11 | -0.737 ± 0.140 | 1.561 ± 0.242 | -0.004 ± 0.003 | -0.201 ± 0.011 | 0.006 ± 0.001 |
| Intervallo 12 | -2.400 ± 0.066 | 4.666 ± 0.106 | -0.006 ± 0.004 | 0.083 ± 0.015 | 0.006 ± 0.001 |

Tabella 2.3: *Coefficienti trovati con l'interpolazione lineare nei vari intervalli parametrici.*

troveremo tanti set di coefficienti quanti sono i sistemi risolti e la soluzione per quel particolare range di parametri sarà la media di questi; viene calcolata anche la deviazione standard. In realtà il numero di coefficienti finale sarà minore perchè questi valori verranno ulteriormente mediati. Nel primo intervallo di distanze $[0.9, 1.0]$ UA ad esempio non rientra 1 solo intervallo di quelli scelti; dobbiamo quindi fare la media tra tutti i valori del coefficiente trovato per $a \in [0.9, 1.0]$ UA pesandola con il numero degli elementi presenti nei singoli intervalli utilizzati nell'interpolazione; lo stesso vale per gli altri coefficienti. In questo modo troveremo 2 soluzioni per A, 3 per B e 2 per D corrispondenti ai diversi trends individuati, mentre per C ed E, non avendo diviso i valori in intervalli diversi per l'interpolazione, troveremo un solo valore.

2.2.3 Risultati

In Figura 2.4 mostriamo il grafico della ricostruzione delle abitabilità ottenute con l'interpolazione; sugli assi abbiamo le abitabilità simulate dall'ESTM e quelle ricostruite, quindi la retta rossa $y = x$ rappresenta una corrispondenza perfetta. Con questo tipo di grafico abbiamo una stima qualitativa ma immediata della qualità dei risultati ottenuti. In generale si osserva una corrispondenza tra i valori calcolati con le simulazioni e quelli ricostruiti; infatti la disposizione dei punti, anche se con una grossa dispersione, segue l'andamento della retta. Le abitabilità ricostruite presentano una dispersione molto ampia; con i coefficienti ritrovati si calcolano abitabilità comprese nell'intervallo $[-0.87, 2.84]$; essendo l'abitabilità un numero 0 e 1 questi valori non hanno significato. Il calcolo dei coefficienti nel caso dell'intervallo comprendente meno punti non ha avuto successo dal momento che non sono stati trovati sistemi risolvibili e le regioni dello spazio dei parametri dove non si trovano abitabilità > 0 non sono stati considerati. Questo ha portato a una sovrastima complessiva dei risultati; i punti ricostruiti presentano un allontanamento dalla retta ideale maggiore quando le abitabilità calcolate con l'ESTM vengono sovrastimate. In tabella 2.3 riportiamo i coefficienti e le deviazioni standard calcolati nei vari intervalli.

Osservando i grafici in Figura 2.3 descritti precedentemente, ci aspetteremmo coefficienti negativi dove le medie decrescono e viceversa; per il semiassse maggiore negli intervalli 1,2 e 10 sono stati calcolati coefficienti con segno opposto alla pendenza del tratto di curva e si riscontrano numerosi casi analoghi anche per l'eccentricità. Osservando le tabelle 2.2 e 2.3 ci accorgiamo che per il calcolo del coefficiente B nell'ultimo range di eccentricità viene interpolato solamente l'Intervallo 12, riducendo di molto la statistica di questi punti; inoltre non possiamo fare affidamento sul risultato ottenuto nell'intervallo 4 poiché il valore ritrovato è molto diverso dagli altri

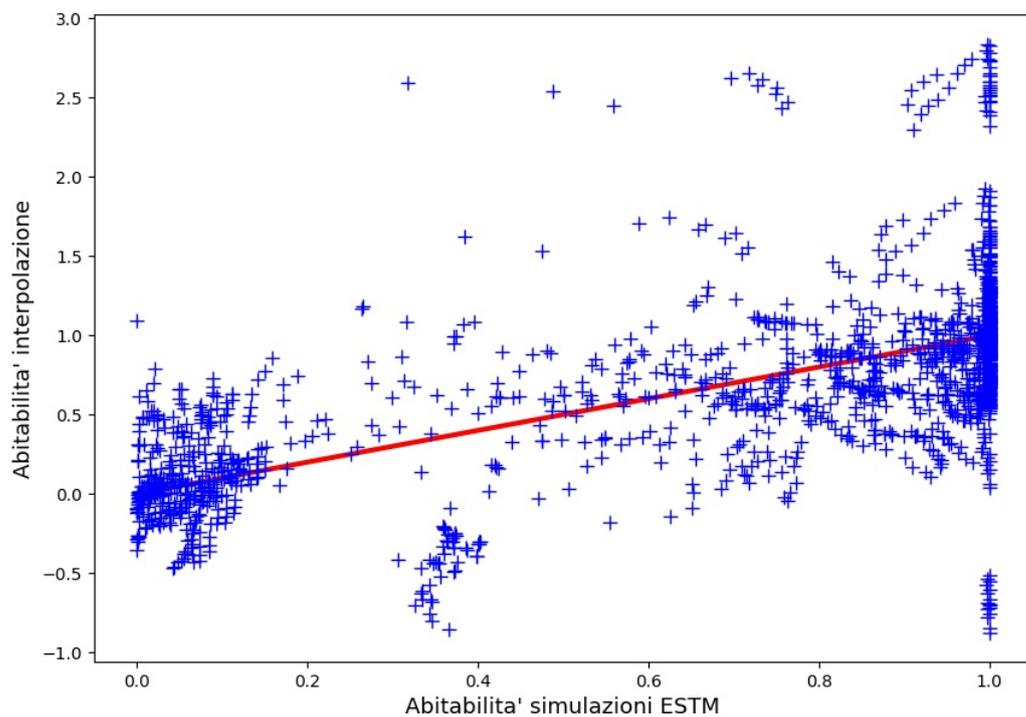


Figura 2.4: Ricostruzione delle abitabilità ottenute dall'interpolazione multilineare; sugli assi i valori di abitabilità ottenuti dal database e quelli ricostruiti con l'algoritmo descritto, la retta rossa $y = x$ rappresenta una ricostruzione perfetta. Si nota che i punti della ricostruzione seguono l'andamento della retta, ma sono presenti anche valori di abitabilità molto distanti da quelli ricavati con le simulazioni climatiche e al di fuori dell'intervallo di validità.

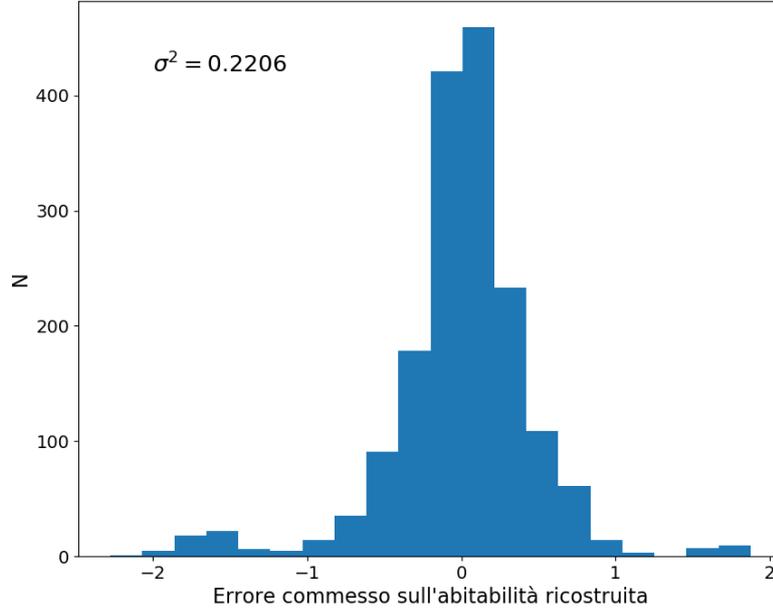


Figura 2.5: *Distribuzione degli errori sulle abitabilità calcolate con l'interpolazione multilineare; lo scarto quadratico della ricostruzione è pari a $\sigma^2 = 0.221$.*

e affetto da un grande errore.

L'inclinazione dell'asse di rotazione, tra i parametri esaminati, è quello che influisce di meno sulla temperatura superficiale media e sull'abitabilità, almeno tra i limiti di 0° e 30° ; questo spiega il fatto che i coefficienti ritrovati per l'obliquità e gli errori associati sono molto piccoli. I valori ritrovati per la pressione di CO_2 , anche se molto piccoli, sono quasi sempre positivi, simili tra loro e presentano gli errori minori; aumentando la concentrazione di CO_2 nell'atmosfera abbiamo anche un aumento complessivo della temperatura e, se la simulazione non incorre in un "runaway greenhouse", l'abitabilità cresce perché l'intervallo di temperature in cui è possibile trovare acqua allo stato liquido si allarga. Anche per la pressione atmosferica complessiva abbiamo risultati quasi sempre positivi: osservando i risultati specifici di ESTM, sappiamo che un aumento di pressione riduce le variazioni di temperatura tra le regioni del pianeta diminuendo così la possibilità di avere fasce congelate ed aumentando l'abitabilità.

In Figura 2.5 sono mostrati gli istogrammi degli errori commessi nella ricostruzione, calcolati come la differenza tra l'abitabilità ottenuta dalle simulazioni e quella ricostruita mediante l'interpolazione. Nonostante si riscontrino errori relativi anche superiori al 100% la distribuzione risulta piccata sullo zero. Lo scarto quadratico medio sugli errori è $\sigma^2 = 0.221$ e la deviazione standard associata ad esso è pari a $\sigma = 0.470$. Prendendo questo intervallo di confidenza, ci aspettiamo che stimando l'abitabilità mediante questa interpolazione multilineare si possano ottenere errori di quasi 0.5 e un'incertezza del 50% sul valore massimo possibile dell'abitabilità.

Dalla tabella 2.2 osserviamo che in molti intervalli ritroviamo gli stessi estremi per alcuni dei parametri; ad esempio il primo intervallo individuato per il semiasse maggiore $a \in [0.9, 0.1]$ si ritrova negli intervalli da 1 a 6. Ipotizzando che nel calcolo delle abitabilità le varie carat-

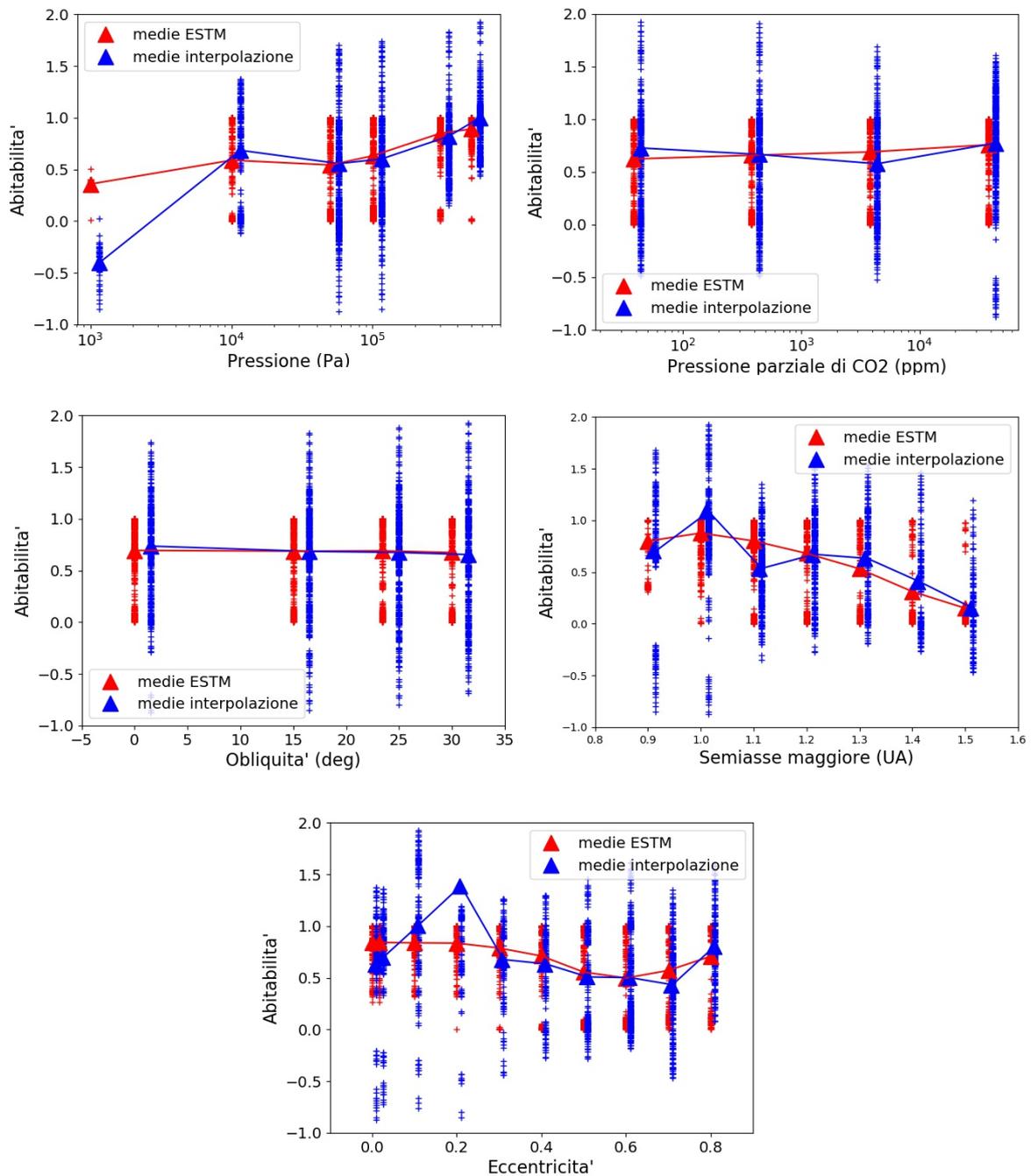


Figura 2.6: Ricostruzione e andamento delle medie a confronto con le simulazioni; il grafico è stato ottenuto come quelli per l'individuazione degli intervalli. Possiamo vedere che molti dei trends sono stati ben rappresentati, soprattutto per i casi più lineari quali obliquità, pressione e pressione parziale di CO₂; per il semiasse maggiore e l'eccentricità invece in molti intervalli i valori delle medie ricostruiti si discostano da quelli delle simulazioni.

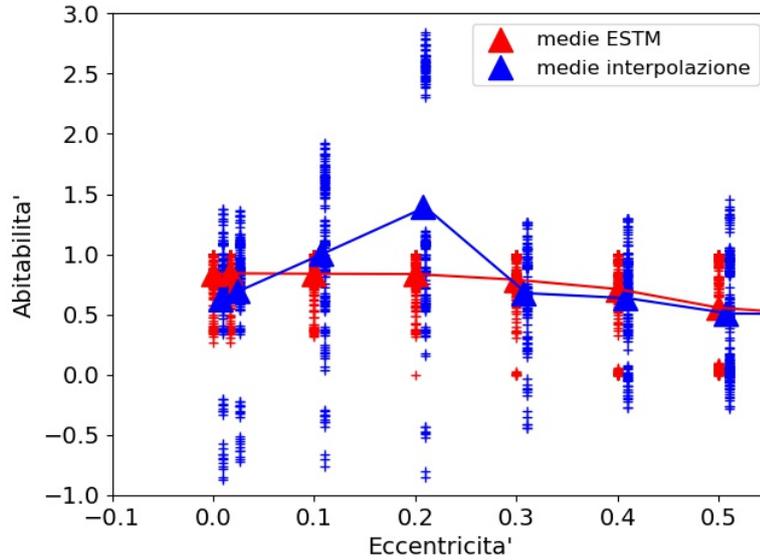


Figura 2.7: particolare delle ricostruzioni in funzione di e ; la concentrazione di ricostruzioni di abitabilità non riuscite per $e = 0.2$ porta ad un'abbondante sovrastima della media.

| | a | | e | | | α | P | | P_{CO_2} |
|--------------|-------|--------|---------|-------|-------|----------|--------|--------|------------|
| | A1 | A2 | B1 | B2 | B3 | C | D1 | D2 | E |
| Media | 0.164 | -1.194 | -0.0395 | 1.304 | 4.666 | 0.0001 | 11.702 | -0.021 | 0.0001 |
| $(\sigma)^2$ | 0.710 | 0.910 | 0.202 | 0.306 | 0.106 | 0.00002 | 58.792 | 0.014 | 0.00002 |

Tabella 2.4: Coefficienti medi per gli intervalli in cui si sono individuati i trends; per l'obliquità e la pressione parziale di CO_2 si trova un solo valore perché questi parametri non sono stati suddivisi durante l'interpolazione.

teristiche planetarie e orbitali siano indipendenti possiamo mediare i valori dei coefficienti dei parametri negli intervalli in cui abbiamo gli stessi limiti. Nel calcolo del coefficiente medio per le eccentricità non è stato incluso l'intervallo 4 poiché affetto da un errore decisamente elevato. Nel grafico in Figura 2.8 sono rappresentati i risultati così ottenuti; di nuovo nei due assi abbiamo le abitabilità simulate dall'ESTM e quelle ricostruite. L'andamento lievemente lineare non è più visibile e risulta anzi molto disordinata, sintomo del fatto che la ricostruzione non è andata a buon fine. Se così non fosse stato avremmo potuto dire che tra i vari parametri che influiscono nel calcolo dell'abitabilità c'è poca correlazione, dato che potremmo mediarli separatamente senza considerare gli altri contributi, ma dati i risultati ottenuti possiamo affermare che invece i parametri non sono indipendenti tra di loro e influiscono sul calcolo dell'abitabilità in maniere differenti a seconda del valore degli altri parametri.

Nella tabella 2.4 sono riportiamo i valori dei coefficienti calcolati con questo metodo; fatta eccezione per B2 e D2 le medie presentano all'incirca i valori attesi per le osservazioni fatte sui grafici in Figura 2.6, dove possiamo osservare gli andamenti delle medie dell'abitabilità in funzione dei diversi parametri.

Il risultato migliore raggiunto con questo metodo è quindi l'interpolazione in intervalli separati, senza mediare i vari coefficienti. Conviene quindi utilizzare i coefficienti trovati separa-

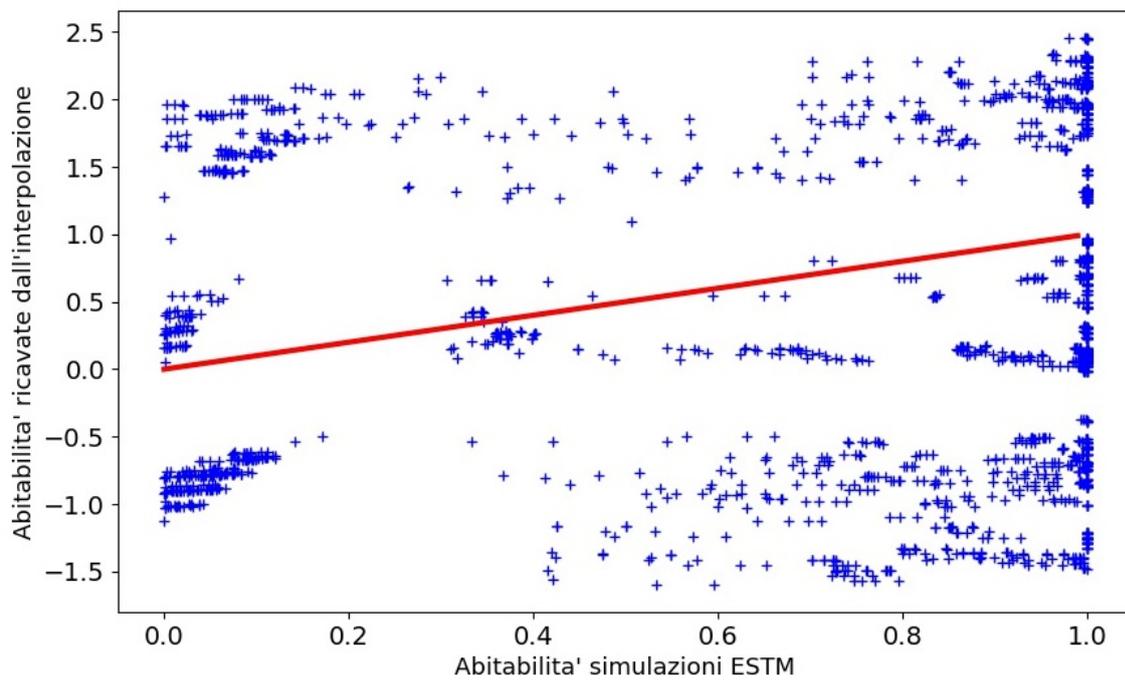


Figura 2.8: Ricostruzione effettuata dall'interpolazione con i coefficienti mediati nei vari intervalli; in ascissa abbiamo le abitabilità simulate dall'ESTM e in ordinata quelle calcolate mediante interpolazione; la retta rappresenta una ricostruzione perfetta e le croci blu le ricostruzioni effettuate. Dal grafico si vede chiaramente che con questo metodo la ricostruzione è fallita, in quanto i punti non seguono nessun particolare andamento.

tamente, anche se sono stati calcolati per lo stesso intervallo parametrico; questo ci dice che la dipendenza da un dato parametro cambia variando le altre caratteristiche planetari e orbitali e che quindi c'è una qualche correlazione. Nella Figura 2.6, dove sono graficate le medie delle abitabilità calcolate con l'ESTM e con l'interpolazione in funzione dei parametri, si nota comunque che buona parte dei trends individuati inizialmente sono stati rispettati nella ricostruzione; i risultati peggiori ottenuti si hanno per le abitabilità in funzione dell'eccentricità. In Figura 2.7 vediamo che il massimo anomalo sulle medie ricostruite è dovuto ad un addensamento di punti con abitabilità ricostruite decisamente troppo elevata. Per quanto riguarda pressione, inclinazione dell'asse e pressione parziale sembra che questo tipo di analisi porti invece a risultati ragionevoli, conseguenza del fatto che per questi parametri le medie dell'abitabilità presentano un comportamento quasi lineare. Attuando una divisione in intervalli dei parametri più fine, soprattutto per l'eccentricità si potrebbero ottenere risultati di miglior qualità.

2.3 Analisi con le reti neurali

Utilizziamo ora il teorema (1.16) per approssimare la funzione che dai parametri ricava l'abitabilità. Ci limitiamo ad analizzare i risultati per le reti descritte precedentemente. Per prima cosa si sono costruite più reti diverse, per verificare qualitativamente quale si addicesse di più alla risoluzione del nostro problema; di queste solo le due che presentavano un errore minore sul test sono state addestrate in maniera più approfondita, per poi analizzare i risultati ottenuti alla fine del training e stimare le abitabilità.

2.3.1 Architettura della rete

Il linguaggio di programmazione utilizzato per scrivere la rete è *python*. Tra le librerie fornite da questo linguaggio possiamo trovarne una adatta all'implementazione delle reti neurali, *keras*[2]. Grazie ad essa compilare una rete neurale diventa relativamente semplice, in quanto basta chiamare delle funzioni definite nella libreria per costruire strati di neuroni. Si possono inoltre cambiare le funzioni di attivazione, l'errore utilizzato per aggiornare i pesi e il tipo di algoritmo di apprendimento.

Ho quindi scritto il codice in *python* che implementa le varie reti descritte sotto. Prima di poter addestrare la rete bisogna innanzitutto normalizzare i dati in input; ogni parametro è stato quindi diviso per il suo massimo, in modo da ottenere dati normalizzati a 1.

Il passo successivo consiste nello strutturare gli strati della rete. Abbiamo detto che un numero maggiore di neuroni aumenta la capacità della rete ad adattarsi ai dati di addestramento, ma ne peggiora la generalizzazione in quanto aumenta il rischio di avere overfitting. Dobbiamo scegliere un numero di neuroni equilibrato, in modo da avere una buona rappresentazione dei dati e delle buone previsioni su dati esterni al training set. Per farlo si studiano gli errori compiuti da reti diverse addestrate sullo stesso train set dopo lo stesso numero di volte che è stato applicato l'algoritmo di aggiornamento dei pesi.

Si divide dunque il set di dati in train set e test set; l'80% degli esempi disponibili viene utilizzato per il training della rete, mentre il restante 20% ha il ruolo di testare la capacità di generalizzazione della rete alla fine dell'addestramento. Dopo aver aggiornato i pesi sul training set si calcola l'errore compiuto sul test set come controllo. Come funzioni di attivazione per il neurone in uscita è stata usata una funzione lineare, in maniera da verificare le ipotesi del teorema di approssimazione universale, mentre negli strati precedenti la funzione usata è la

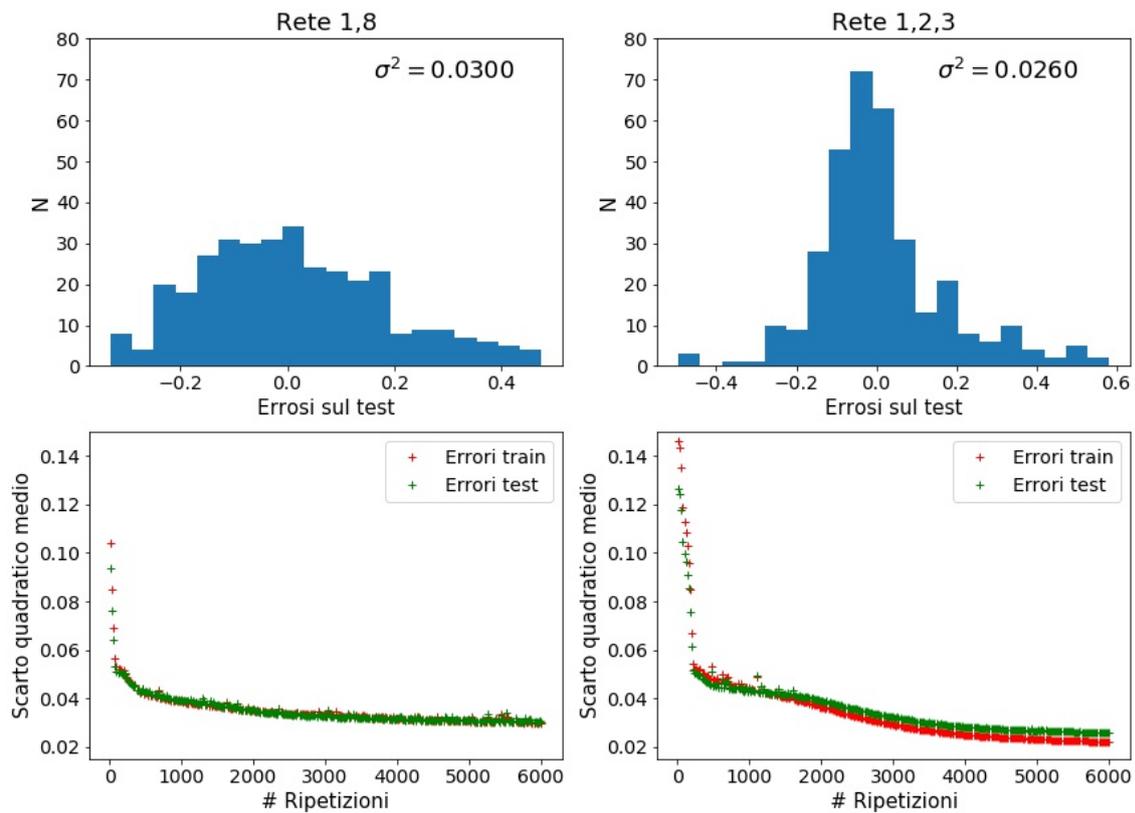


Figura 2.9: Risultati ottenuti dalle reti con 1,2,3 e 1,8 neuroni. Nei pannelli in alto le distribuzioni degli errori commessi sul test alla fine dell'apprendimento; in quelli in basso sono presenti gli errori commessi durante l'allenamento delle due reti, in rosso per il training set e in verde per il test set. Per entrambe le reti abbiamo distribuzioni piccate in zero, ma per quella con più strati il picco è decisamente più marcato e l'errore finale sul test risulta minore.

tangente iperbolica \tanh . La regola di aggiornamento usata è quella vista in precedenza, che usa la discesa lungo il gradiente della funzione degli errori. Per quest'ultima si è scelto lo scarto quadratico medio sul test, cioè

$$E(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_h, \vec{W}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\xi_\nu - Y_\nu)^2 \quad (2.3)$$

dove M è il numero di esempi presenti nel campione scelto.

Il learning rate è stato impostato a $\varepsilon = 0.01$ e gli esempi vengono fatti esaminare alla rete a gruppi (o *batches*) di 20 alla volta, scelti casualmente nel training set; i pesi dei neuroni vengono aggiornati dopo aver esaminato in parallelo gli esempi nella batch e una ripetizione si ritiene conclusa quando tutti gli esempi nel training set sono stati analizzati. Vogliamo inoltre essere sicuri che la rete computi ogni esempio un numero di volte sufficientemente alto; considerando che nel train set troviamo 1367 valori, eseguiamo 6000 ripetizioni. Eseguire una ripetizione significa quindi far utilizzare alla rete tutto il training set aggiornando i pesi utilizzando 20 esempi alla volta.

Nelle Figure 2.9 e 2.10 sono riportati gli errori commessi durante l'allenamento e le distribuzioni di quelli effettuati sul test dopo le 6000 ripetizioni; si osserva che a parità di numero di neuroni si ottengono risultati migliori con una rete a più strati: la distribuzione degli errori si restringe, il picco in zero si alza e lo scarto quadratico medio finale sul test è minore. In tutti e quattro i casi l'errore alla fine delle 6000 ripetizioni è ancora in discesa; questo ci dice che possiamo provare ad addestrare ulteriormente le reti per ottenere un errore minore.

Esaminando invece i casi con tre strati, aumentando sempre più il numero di neuroni si ottiene un errore finale sul test più piccolo. La differenza più grande si nota tra le reti a 1/3/5 e 1/5/10 neuroni; reti più grandi, essendo più adattabili, "imparano" più in fretta e necessitano di meno iterazioni dell'algoritmo di apprendimento per raggiungere un certo errore rispetto alle altre, però non è detto che alla fine del training il risultato sia migliore, poiché è più probabile che si abbia overfitting; bisogna anche tenere in considerazione il fatto che più è grande la rete e più sono i pesi da aggiornare, quindi generalmente con più neuroni il tempo impiegato a fare un aggiornamento aumenta; compiere meno iterazioni dell'algoritmo quindi non sempre significa ridurre i tempi.

Dopo queste osservazioni preliminari si è deciso di addestrare ulteriormente le reti a 1/3/5 e 1/5/10 neuroni per studiarne la qualità dei risultati e farne un confronto.

2.3.2 Training-Test e risultati

Una volta scelte le reti da ottimizzare, si è deciso di fermare l'apprendimento dopo ulteriori 100000 iterazioni dell'algoritmo, a meno che, ovviamente, non si presenti un caso di overfitting o lo scarto quadratico medio sul test scenda al di sotto di una soglia impostata a $E = 0.005$. Per prima cosa osserviamo gli errori commessi durante l'addestramento come controllo e la distribuzione finale dello scarto quadratico medio sul test.

Nei pannelli in alto della Figura 2.11 sono riportate le distribuzioni dell'errore finale sul test, mentre in quelli in basso possiamo vedere quelli commessi nella fase di addestramento; da questi grafici vediamo che l'errore finale sul test minore, pari a $\sigma^2 = 0,0054$, viene raggiunto dalla

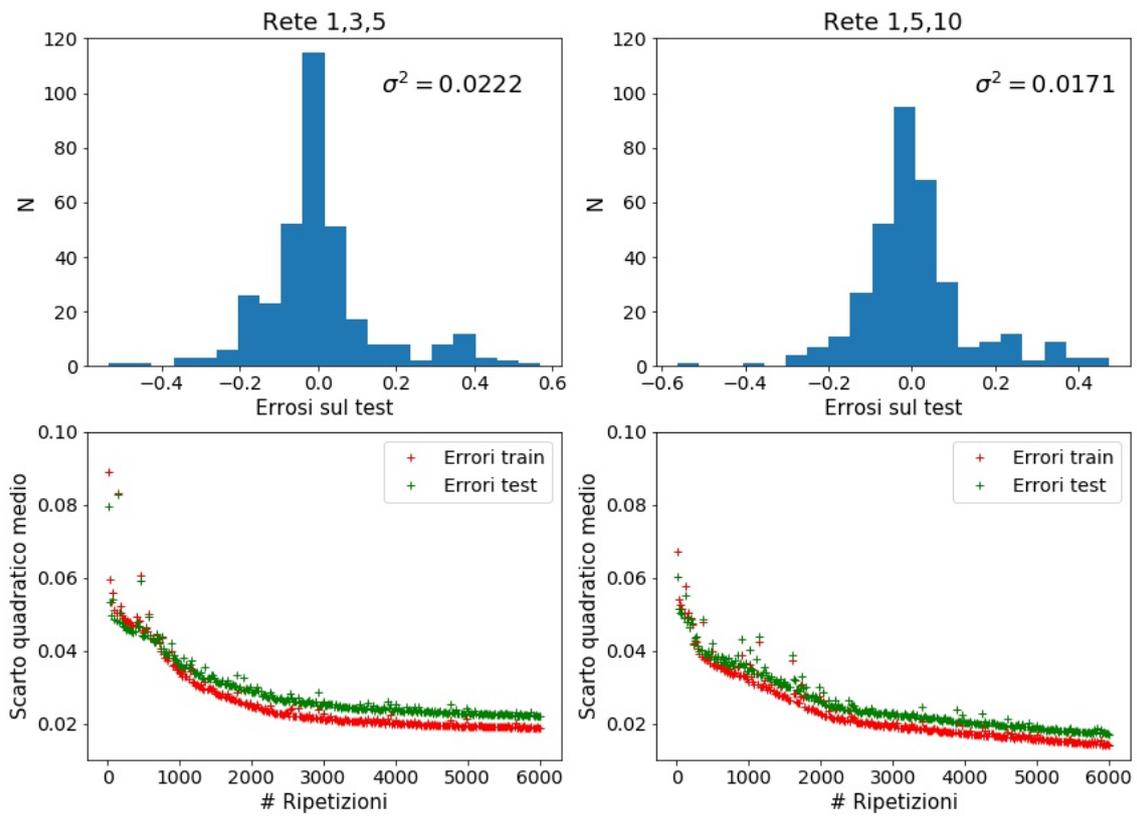


Figura 2.10: Risultati ottenuti dalle reti con 1,3,5 e 1,5,10 neuroni. Come prima in alto le distribuzioni degli errori e sotto la loro discesa durante l'addestramento. In questo caso non si notano grandi variazioni nella distribuzione degli errori finali e la pendenza delle curve che rappresentano l'errore durante il training è molto simile.

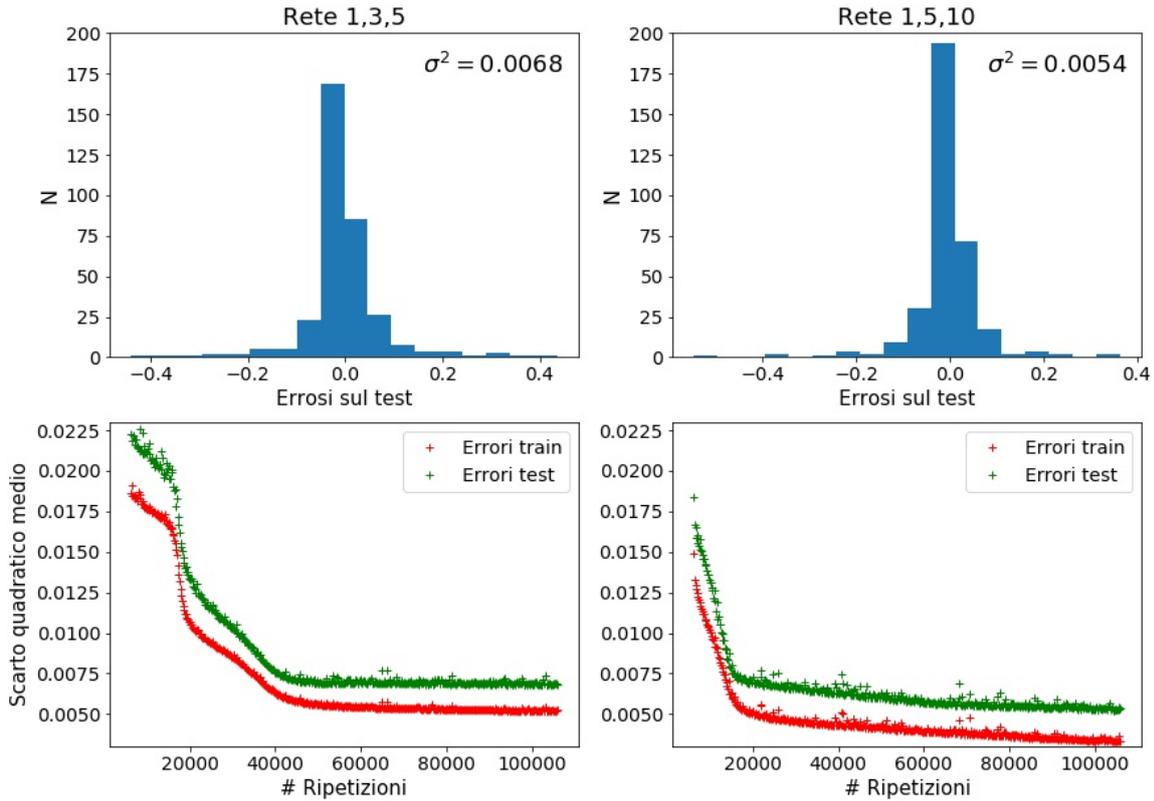


Figura 2.11: Risultati delle due reti scelte alla fine delle 106000 iterazioni dell'algoritmo di aggiornamento. Nei pannelli in alto le distribuzioni degli errori commessi sul test, in quelli in basso gli errori sul train set e sul test set ad ogni aggiornamento. Non si notano grandi differenze tra le due distribuzioni e anche l'errore finale raggiunto è molto simile.

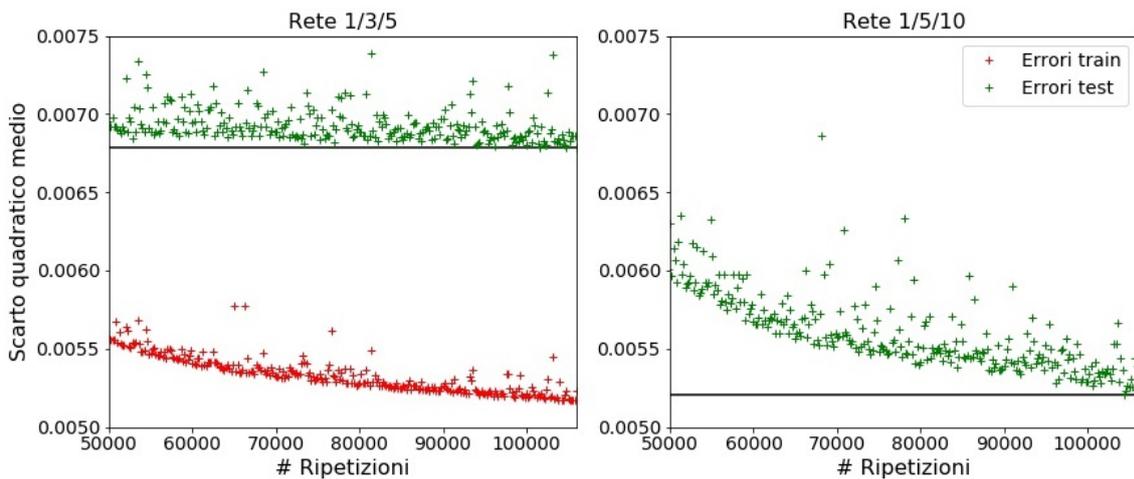


Figura 2.12: Errori commessi dalle due reti dopo le prime 50000 iterazioni. La retta nera rappresenta un addestramento concluso, poiché mostra la situazione in cui non si stanno più riducendo gli errori sul test. Per la rete 1/3/5 a sinistra non si notano miglioramenti significativi, mentre l'errore della rete 1/5/10 a destra è ancora in discesa; in questo caso gli errori sul train set non sono visibili perché, essendo minori, si trovano al di fuori della scala del grafico.

rete più grande e la distribuzione degli errori risulta leggermente più piccata sullo zero. Controllando l'andamento dell'errore su train e test possiamo affermare che non c'è stato overfitting perché non si vedono peggioramenti, in quanto l'errore decresce sempre. Per la rete 1/3/5 però l'apprendimento si può dire all'incirca concluso dopo 40/50 mila aggiornamenti dei pesi perché l'andamento degli errori da questo momento in poi diventa all'incirca piatto; in Figura 2.12 vengono mostrati gli errori commessi dalle due reti dopo le prime 50 mila ripetizioni; si vede chiaramente che mentre la rete neurale più grande sta ancora migliorando i risultati sul test set, la rete 1/3/5 non riduce più in maniera significativa l'errore.

Le ricostruzioni effettuate sono promettenti; in Figura 2.13 mostriamo le abitabilità ricostruite dalla rete in funzione di quelle simulate dal modello ESTM. La retta mostra il caso ideale in cui la ricostruzione è perfetta. I valori ricostruiti approssimano bene quelli ottenuti dalle simulazioni climatiche, con solo alcuni punti in cui osserviamo forte discrepanza. Ciò significa che le previsioni fatte dalle due reti, entro un certo errore, sono fedeli ai valori di abitabilità calcolati dal modello ESTM. I punti fittati dalla rete 1,5,10 risultano più vicini alla retta, come ci si aspettava noto lo scarto quadratico medio finale, ma in generale entrambi i risultati sono di buona qualità.

Nella Figura 2.14 sono mostrati gli stessi tipo di grafici utilizzati per l'interpolazione multi-lineare e sono visibili le abitabilità e le medie calcolate su ogni valore dei parametri in funzione di questi. Gli andamenti delle medie sono riprodotti piuttosto fedelmente e anche la distribuzione complessiva delle abitabilità è ben ricostruita; osserviamo però che effettivamente vengono commessi numerosi errori, anche se piccoli: alcuni punti della ricostruzione si trovano in zone dove non c'è alcun caso simulato con l'ESTM.

Con questi risultati possiamo ora provare a calcolare le curve di abitabilità in funzione dei vari parametri. Si prepara un file in cui teniamo costanti quattro variabili, mentre la quinta varia in maniera continua; in questo modo, utilizzando la rete per predire i valori di abitabilità, possiamo osservare l'andamento dell'abitabilità in funzione di uno dei parametri.

Nelle Figure 2.15, 2.16 e 2.17 vengono riportati alcuni esempi delle curve di abitabilità calcolate dalle due reti rispettivamente in funzione di pressione, obliquità, e semiasse maggiore; i punti rossi sono le abitabilità calcolate con le simulazioni. Per produrre questi grafici ho fissato quattro dei parametri a valori predefiniti, in questo caso a quelli terrestri, variando solo il quinto. In questo modo ottengo le curve dell'abitabilità in funzione di una sola caratteristica orbitale o planetaria. Osserviamo subito che dove dovremmo avere abitabilità pari a zero le reti non fittano bene i dati delle simulazioni; questo perché nel training set sono stati inclusi solo pianeti con abitabilità diversa da zero e dunque dove questa si annulla le reti falliscono nella ricostruzione non avendo mai computato questi set. Possiamo però notare come l'apprendimento sull'intero set, che comunque include valori di abitabilità bassi, anche se non nulli, abbia portato ad un funzionamento accettabile anche in queste configurazioni, dove le ricostruzioni non si distaccano di molto dalle simulazioni dell'ESTM.

I risultati della rete 1,5,10 appaiono meno regolari rispetto alla rete più piccola; nei casi in cui il valore di abitabilità è nulla si osservano dei minimi nei casi della pressione atmosferica e della distanza dalla stella. Questo risultato è errato poiché le curve di abitabilità per questi parametri devono presentare un solo massimo per poi scendere a zero spostandosi a destra o a sinistra di questo devono essere funzioni monotone. Possiamo dare una spiegazione a questo risultato ricordando quanto detto per reti con molti neuroni: è stato ottenuto un risultato migliore sul test a discapito però della generalizzazione al di fuori del sottospazio cinque-dimensionale individuato

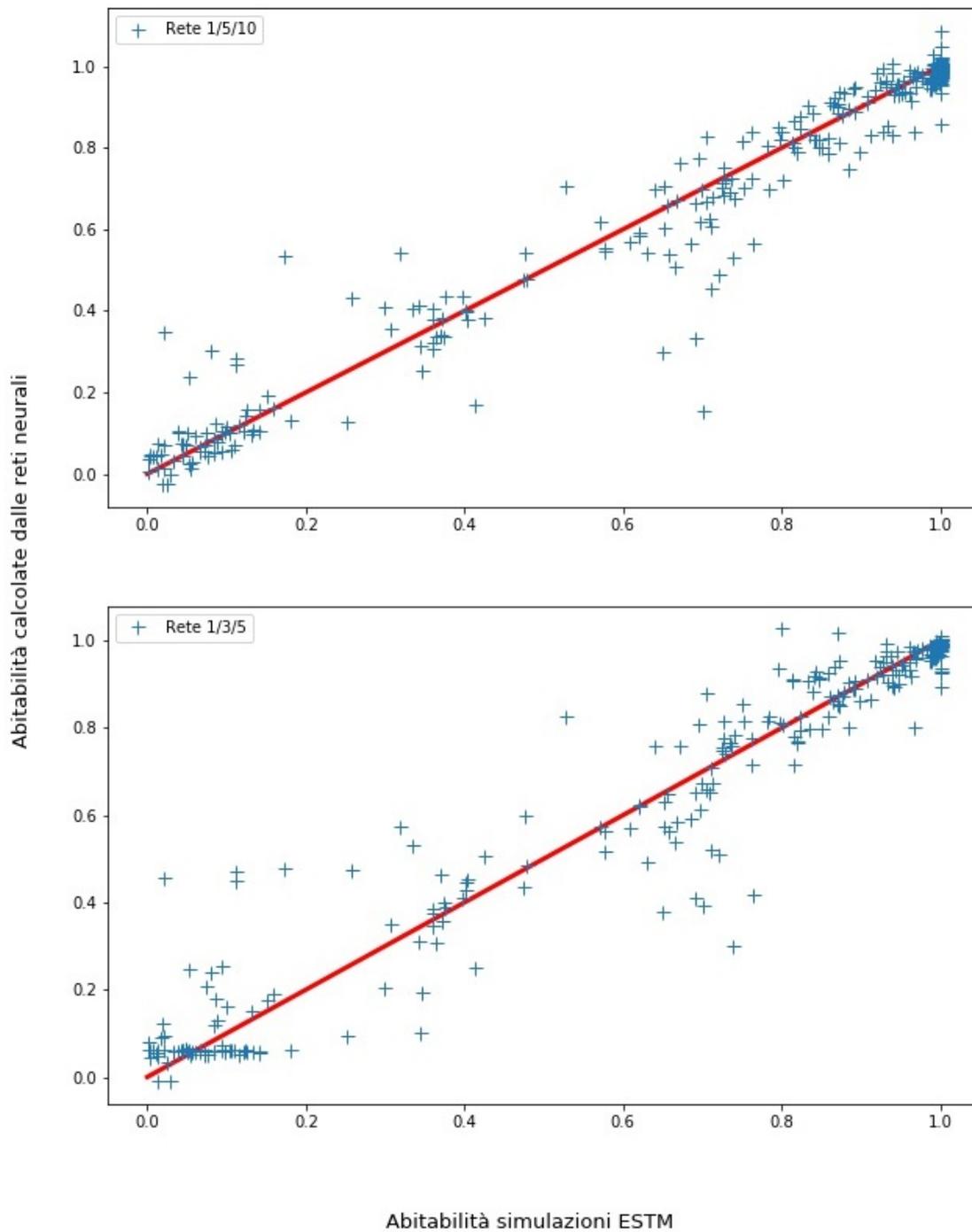


Figura 2.13: *Abitabilità ricostruite a partire dai parametri del data test dalle 2 reti verso quelle calcolate dal modello ESTM; sopra per la rete 1/5/10 e sotto per quella con 1/3/5 neuroni. Come nelle Figure 2.4 e 2.8 la retta rappresenta una ricostruzione perfetta. Le abitabilità ricostruite riproducono bene quelle delle simulazioni climatiche e in generale si nota un maggior addensamento di punti sulla retta per la rete con più neuroni.*

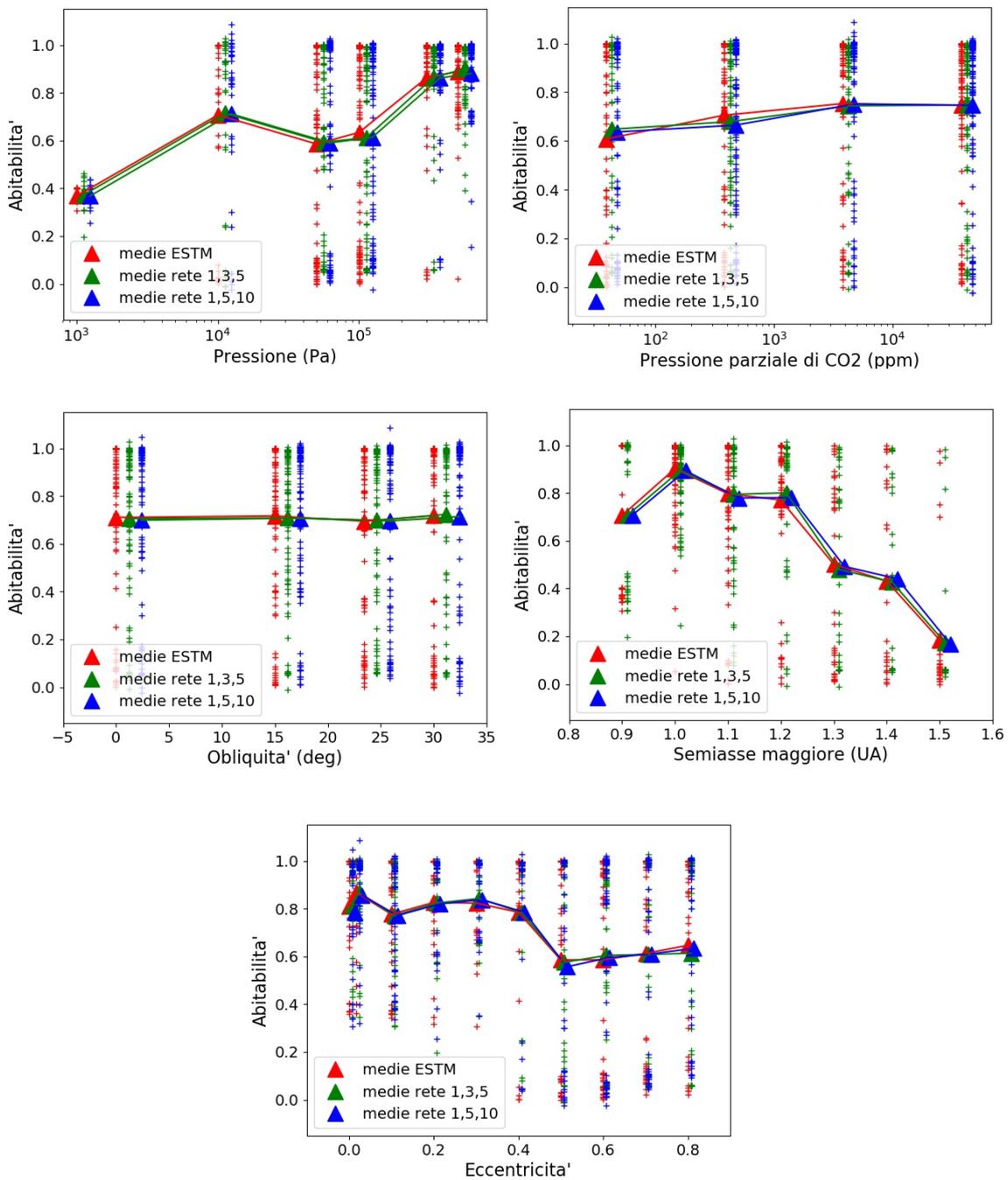


Figura 2.14: I cinque pannelli mostrano i grafici delle abitabilità in funzione di pressione, pressione di CO₂, obliquità, semiasse maggiore ed eccentricità per i campioni presenti nel test set. Le croci rosse rappresentano le singole simulazioni, quelle verdi i risultati della rete 1,3,5 e quelli blu le abitabilità ricostruite dalla rete 1,5,10. I triangoli sono le medie calcolate come detto nel capitolo precedente.

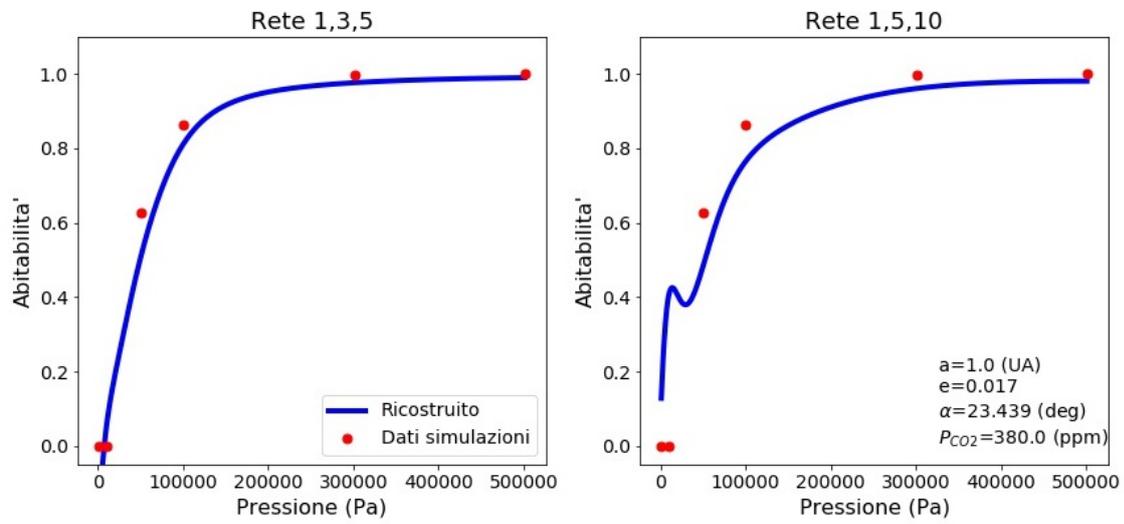


Figura 2.15: Curve di abitabilità in funzione della pressione. I parametri fissi sono stati impostati ai valori terrestri.

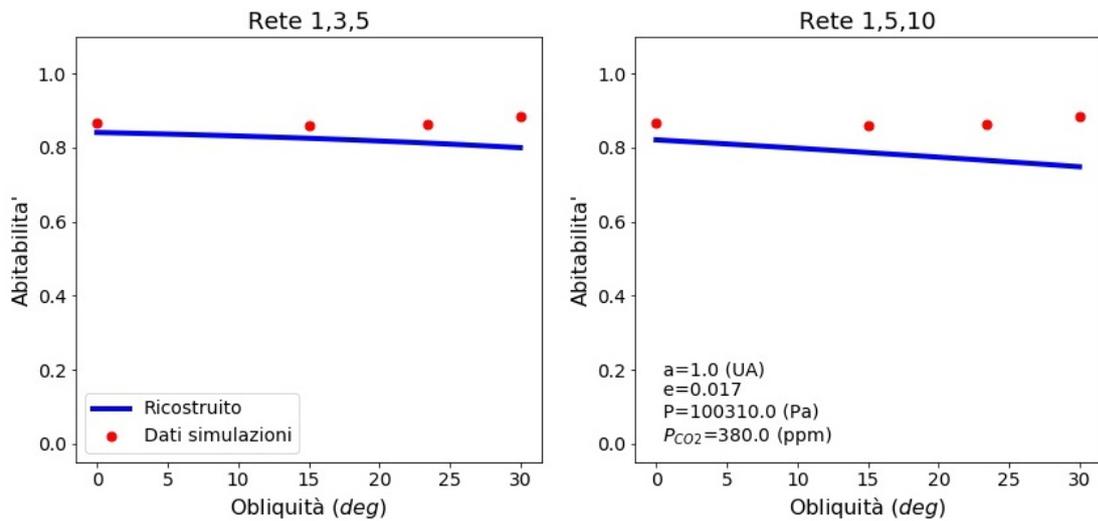


Figura 2.16: Curve di abitabilità in funzione del semiasse maggiore. Anche in questo caso gli altri parametri sono quelli terrestri.

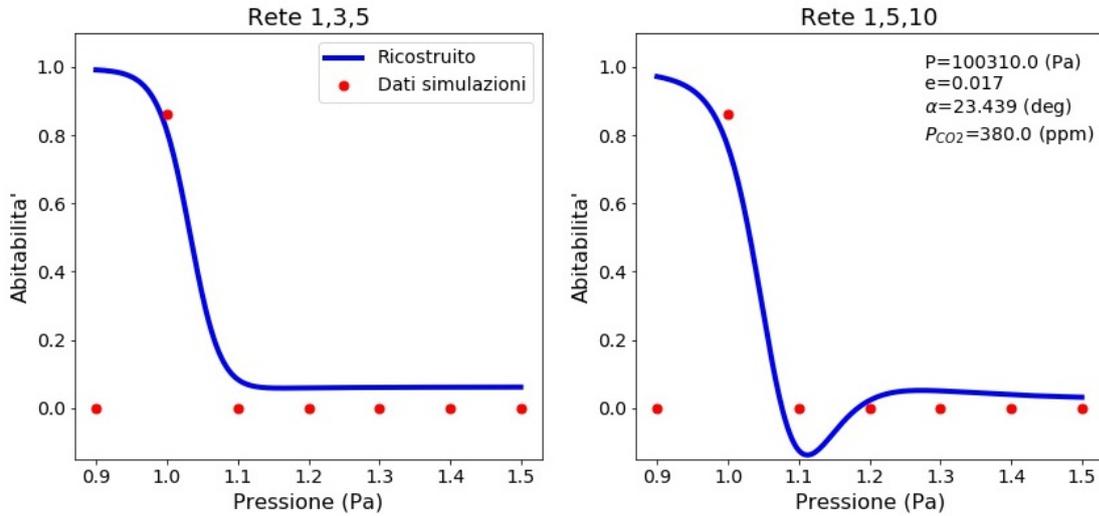


Figura 2.17: Curve di abitabilità in funzione del semiasse maggiore. Anche in questo caso gli altri parametri sono quelli terrestri.

dalle combinazioni di parametri che danno $h > 0$, usati per l'addestramento. Avendo un numero di pesi maggiore, le funzioni ricostruite dalla rete più grande risultano più complesse e, di conseguenza, hanno una forma meno regolare causando previsioni meno veritiere al di fuori dei ranges dei dati di addestramento. All'interno di questi intervalli invece entrambe le reti hanno ottenuto una buona generalizzazione, in quanto dove l'abitabilità è diversa da zero le curve sono ben ricostruite.

Nonostante gli errori commessi sul test da parte della rete più grande siano minori, le curve di abitabilità più verosimili vengono costruite quindi dalla rete a 1,3,5 neuroni. A priori non possiamo però dire se, continuando l'addestramento delle reti, troveremo un risultato diverso, ma l'errore sul test finale raggiunto è già molto piccolo ed è improbabile riuscire ad ottenere risultati migliori con queste reti e i dati di cui disponiamo. Considerando che l'errore della rete 1,5,10 è ancora in discesa e non si è presentato overfitting, molto probabilmente se prolungassimo l'addestramento potremmo raggiungere risultati migliori e magari una migliore generalizzazione.

Per fare in modo che le reti riescano a fittare correttamente le curve dove l'abitabilità è nulla in modo corretto dovremmo aggiungere anche i punti dove $h = 0$; in questo modo, con la moltitudine di zeri nei dati e il numero più elevato di esempi da computare, aumentiamo il numero di operazioni necessarie per aggiornare adeguatamente i pesi e il tempo di addestramento. Inoltre, come per l'interpolazione multilineare, la gran quantità di abitabilità nulle porterebbe a una sottostima generale delle abitabilità. In alternativa è possibile tentare di ottenere risultati migliori cambiando struttura della rete, funzioni di attivazione, algoritmo di aggiornamento dei pesi e funzione degli errori.

Con i dati a nostra disposizione possiamo cercare un modo per prevedere anche le abitabilità nulle, così da ampliare l'insieme dei casi risolvibili in maniera accurata. L'idea è quella di costruire un altro tipo di rete neurale che classifichi i pianeti in tre categorie: abitabili, pianeti ghiacciati o "snowball" e pianeti in cui il clima è andato in "runaway greenhouse"; gli ultimi

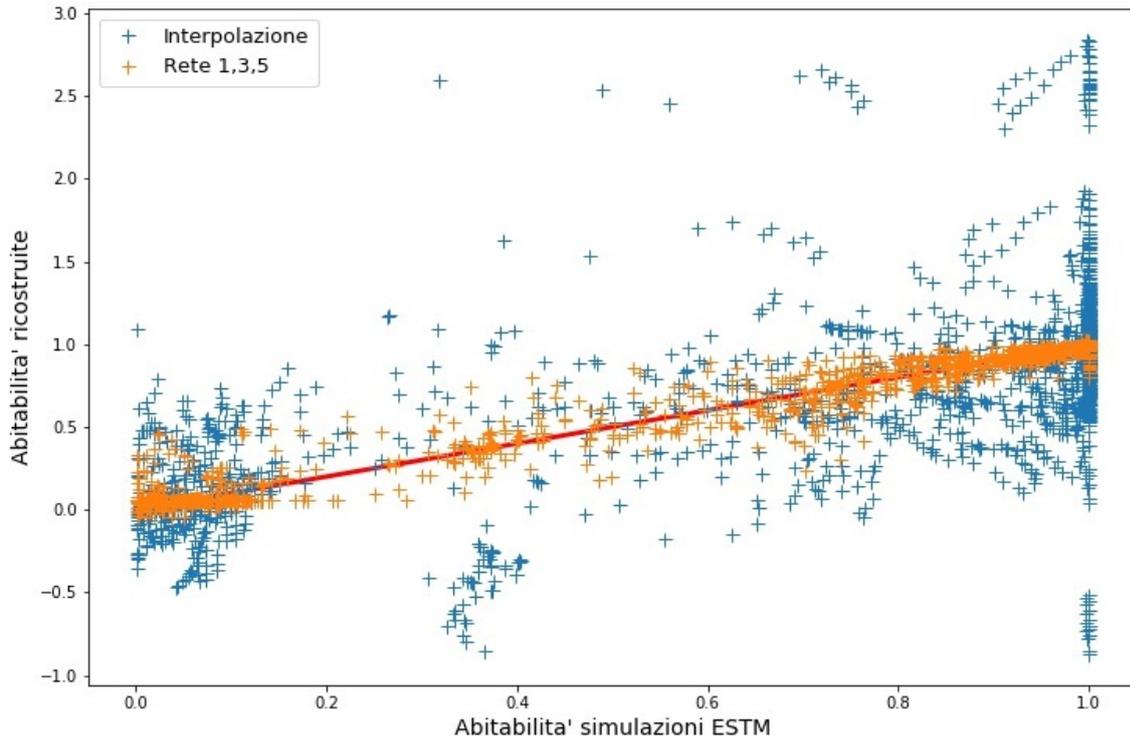


Figura 2.18: Ricostruzioni effettuate dall'interpolazione (in blu) e dalla rete 1,3,5 (in arancione). La retta rossa, come nelle Figure 2.4, 2.8 e 2.13, rappresenta una ricostruzione delle abitabilità perfetta.

due sono i casi di abitabilità pari a zero. In questo modo, una volta classificato il pianeta, se questo può presentare un'abitabilità non nulla procederemo con il calcolo dell'abitabilità.

2.4 Confronto tra i due metodi

Le ricostruzioni effettuate con le reti risultano di qualità notevolmente superiore rispetto a quelle ottenute mediante interpolazione lineare. Come possiamo vedere nei grafici delle figure 2.6 e 2.14 nel primo caso infatti gli andamenti delle medie non sono sempre ben ricostruiti, mentre le reti presentano solo dei lievi discostamenti. Lo scarto quadratico medio sulle abitabilità ricostruite nel caso dell'interpolazione è molto superiore a quelli calcolati sul test alla fine dell'addestramento delle 2 reti, come si può vedere nella tabella 2.5.

Nella figura 2.18 sono riportati i grafici delle ricostruzioni effettuate con entrambi i metodi messi a confronto: le croci blu rappresentano i risultati dell'interpolazione ottenuti con i coefficienti calcolati nei singoli intervalli, mentre quelli arancioni le previsioni date dalla rete 1,3,5; non sono state utilizzate le medie pesate dei coefficienti per questo confronto poiché le abitabilità ritrovate in questo modo sono inaffidabili. Nel grafico è ben visibile un maggior addensamento vicino alla retta di ricostruzione ideale da parte dei punti ricostruiti con la rete neurale. Ciò indica un netto miglioramento dei risultati, in quanto le abitabilità ricostruite risultano notevolmente fedeli a quelle calcolate con le simulazioni dell'ESTM rispetto alle ricostruzioni mediante interpolazione lineare. Questo soi poteva già evincere dalla Figura 2.18 e dalla tabella 2.5. Qui notiamo però, anche visivamente, una netta diminuzione nel caso della rete neurale del numero degli "outliers", i casi in cui la ricostruzione si allontana di molto dal valore calcolato mediante

| | Interpolazione | Rete 1,3,5 | Rete 1,5,10 |
|------------|-----------------------|-------------------|--------------------|
| σ^2 | 0.221 | 0.007 | 0.005 |
| h_{min} | -0.87 | -0.010 | -0.024 |
| h_{max} | 2.84 | 1.027 | 1.087 |

Tabella 2.5: *scarto quadratico medio sulle ricostruzioni ed estremi dell'abitabilità calcolate nei 3 casi.*

simulazioni.

In tabella 2.5 sono riportati gli errori e i range di ricostruzione, per l'interpolazione sono stati inseriti i risultati calcolati con i coefficienti non mediati, in quanto di migliore qualità; oltre a presentare un errore quadratico medio molto maggiore, i valori di abitabilità ricavati linearmente escono ampiamente dall'intervallo di definizione dell'abitabilità, come si può già vedere nel grafico delle ricostruzioni in figura 2.18. Al contrario entrambe le reti neurali collocano quasi tutti i casi ricostruiti entro l'intervallo corretto e nei pochi casi in cui ciò non si verifica comunque lo scarto è molto piccolo.

Capitolo 3

Conclusioni e sviluppi futuri

In questa tesi si sono introdotti e testati degli algoritmi per ricostruire l'abitabilità di un esopianeta dato un set di caratteristiche orbitali e planetarie. I valori di abitabilità sono stati estratti dal database *ARTECS* (<http://wwwuser.oats.inaf.it/exobio/climates/>) che contiene i risultati del calcolo della temperatura superficiale ottenuti con il modello ESTM. Per l'abitabilità abbiamo usato la definizione di "liquid-water habitability", dunque un pianeta risulta abitabile nella fascia latitudinale ed ai tempi orbitali in cui $T_{congelamento} < T_{superficiale}(\varphi, t) < T_{evaporazione}$, dove le temperature limite dipendono dalla pressione atmosferica. Allo scopo di stabilire una relazione tra parametri di input e abitabilità sono stati utilizzati due metodi differenti: il primo consiste in un'interpolazione multilineare nello spazio dei parametri per trovarne i coefficienti e usarli poi nella ricostruzione delle abitabilità; il secondo prevede l'utilizzo delle reti neurali e la loro capacità di approssimare funzioni continue. I parametri che si sono considerati per la ricostruzione sono: semiasse maggiore, pressione, pressione parziale di CO_2 , eccentricità e obliquità dell'asse di rotazione. Uno studio iniziale del campione ci ha portato ad escludere i casi in cui il pianeta risulta inabitabile.

L'implementazione di algoritmi di interpolazione multilineare e di reti neurali rappresentano alcuni contributi del presente lavoro di tesi. I principali risultati raggiunti in questo lavoro sono:

- usando una ricostruzione di tipo multilineare è necessario dividere il campione in sottospazi dello spazio cinque-dimensionale dei parametri in cui l'andamento dell'abitabilità appare lineare;
- così facendo la ricostruzione risulta accettabile, ma con grosso errore statistico, molti casi di errata ricostruzione ("outliers") e valori estremi non fisici, con abitabilità negative o molto maggiori di uno;
- utilizzando l'approccio delle reti neurali invece, non occorre suddividere lo spazio dei parametri ed è possibile trovare reti relativamente semplici che forniscono buoni risultati;
- in particolare si è mostrato come due reti, con un neurone di output, tre nascosti e cinque di input oppure sempre con un neurone di output ma cinque e dieci neuroni per gli altri strati, forniscono ricostruzioni a media zero e deviazione standard minore di 0.01 rispetto allo scarto quadratico medio della differenza tra abitabilità calcolate e ricostruite;
- tali reti producono ricostruzioni con un numero di "outliers" molto inferiore a quella multilineare e con valori estremi vicino a quelli fisici;
- la rete con un numero minore di neuroni (1,3,5) si mostra efficace nel ricostruire le curve di abitabilità in funzione di ognuno dei parametri studiati fissando gli altri al valore terrestre, nonostante l'errore sul test finale sia maggiore.

Lo scopo di questo elaborato è stato di fornire un utile strumento per calcolare la "Circumstellar Habitable Zone" di un esopianeta simulato o osservato, con caratteristiche note, così come stimata dal modello ESTM, senza dover eseguire tutte le simulazioni necessarie a coprire lo spazio dei parametri planetari. Questo ci permette di dare una definizione matematica più accurata dell'attuale di "Circumstellar Habitable Zone" che consideri anche le caratteristiche climatiche del pianeta, oltre alla sua distanza dalla stella.

Come possibile sviluppo futuro possiamo costruire delle reti neurali che approssimino ancora più fedelmente le abitabilità calcolate con i modelli climatici variando i vari parametri che controllano l'apprendimento della rete. Inoltre implementando una rete che escluda a priori pianeti in condizioni estreme di "runaway greenhouse effect" oppure di "snowball", risolveremmo la problematica dei casi con abitabilità nulla e potremmo ricostruire ancor meglio le curve di abitabilità. Una volta costruite tali curve, si potrebbero cercare delle funzioni analitiche che le approssimino e ricavare così una formula per calcolare l'abitabilità. Includendo nell'analisi anche altri parametri non considerati in questa tesi possiamo studiare l'abitabilità degli esopianeti anche in funzione di altre caratteristiche orbitali e planetarie, come la gravità superficiale, la densità del pianeta e il tipo di stella centrale.

I risultati trovati sono generalizzabili e si potranno applicare anche alle future simulazioni che verranno inserite nel database *ARTECS*¹ e non solo, così da avere una ricostruzione anche per i casi che non verranno esplicitamente calcolati tramite i modelli climatici.

Un possibile sviluppo è la creazione di un tool web che, date le caratteristiche di un esopianeta osservato (o teorico!), ne stimi autonomamente la "Circumstellar Habitable Zone".

¹il metodo presentato è naturalmente utilizzabile anche per modelli diversi da ESTM, a patto che essi forniscano un adeguato database per il training.

Bibliografia

- [1] Archivio dati *ARTECS*. <http://wwwuser.oats.inaf.it/exobio/climates/>.
- [2] Keras documentation. <https://keras.io/>.
- [3] Michael H Hart. The evolution of the atmosphere of the earth. *Icarus*, 33(1):23–39, 1978.
- [4] James F Kasting. Runaway and moist greenhouse atmospheres and the evolution of earth and venus. *Icarus*, 74(3):472–494, 1988.
- [5] JT Kiehl, JJ Hack, GB Bonan, BA Boville, DL Williamson, and PJ Rasch. The national center for atmospheric research community climate model: Ccm3. *Journal of Climate*, 11(6):1131–1149, 1998.
- [6] Budinich M. *Introduzione alla Teoria delle Reti Neurali*. 2014.
- [7] Giovanni Vladilo, Giuseppe Murante, Laura Silva, Antonello Provenzale, Gaia Ferri, and Gregorio Ragazzini. THE HABITABLE ZONE OF EARTH-LIKE PLANETS WITH DIFFERENT LEVELS OF ATMOSPHERIC PRESSURE. *The Astrophysical Journal*, 767(1):65, mar 2013.
- [8] Giovanni Vladilo, Laura Silva, Giuseppe Murante, Luca Filippi, and Antonello Provenzale. Modeling the surface temperature of earth-like planets. *The Astrophysical Journal*, 804(1):50, 2015.
- [9] Darren M Williams and James F Kasting. Habitable planets with high obliquities. *Icarus*, 129(1):254–267, 1997.