



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN ASTROFISICA E COSMOLOGIA

TESI DI LAUREA

---

*Vincoli sulla massa del neutrino  
da future survey  
di ammassi di galassie*

---

*Laureando:*  
COSTANZI ALUNNO CERBOLINI  
MATTEO

*Relatore:*  
PROF.  
BORGANI STEFANO  
*Correlatore:*  
DOTT. VIEL MATTEO

Anno Accademico 2010-2011

# INTRODUZIONE

---

Questi sono gli anni d'oro della cosmologia di precisione. Un'enorme quantità di dati, provenienti da accurate misurazioni delle anisotropie nella radiazione cosmica di fondo (CMB), come anche delle fluttuazioni di densità di materia nella struttura su grande scala dell'Universo, ottenute da osservazioni della distribuzione di galassie, delle foreste Lyman- $\alpha$ , del *weak lensing* gravitazionale e dell'evoluzione della popolazione di ammassi di galassie, sono in spettacolare accordo con il modello standard  $\Lambda$ CDM. Questi risultati assicurano che la teoria lineare delle perturbazioni è essenzialmente corretta, e che può quindi essere utilizzata per descrivere accuratamente l'evoluzione delle fluttuazioni dei fotoni, neutrini, barioni, e delle particelle di materia oscura, una volta note le perturbazioni primordiali generate dall'inflazione. Queste predizioni possono essere confrontate con le precise misurazioni cosmologiche oggi presenti, e con quelle che si otterranno dalle future mappature tridimensionali della distribuzione di galassie identificate in una vasta area di cielo (*surveys*), per inferire vincoli stringenti sui parametri cosmologici.

Le varie componenti dell'Universo (materia ed energia oscura, fotoni, barioni e neutrini) imprimono sullo spettro delle fluttuazioni delle impronte caratteristiche, legate alle modalità con cui interagiscono, alla diversa storia termica, equazione di stato e velocità del suono nel fluido. Un esempio lampante è dato dalle oscillazioni acustiche nel fluido fotoni-barioni generate prima del disaccoppiamento dei fotoni, a redshift  $z = 1088$  (circa 300.000 anni dopo il Big Bang), che sono state osservate sia nello spettro di potenza del CMB che nella distribuzione delle galassie.

Tuttavia questo grande numero di successi conferma ancora una volta la nostra scarsa comprensione dell'Universo. Il modello cosmologico  $\Lambda$ CDM prevede che l'Universo sia stato dominato da quattro componenti durante la sua storia; in ordine cronologico: l'energia oscura primordiale (ovvero un campo inflazionario), la radiazione, la materia oscura e l'energia oscura. Di queste quattro componenti l'unica di cui conosciamo a fondo la natura è la radiazione. Dunque l'obiettivo della cosmologia moderna è stato e sarà per i prossimi decenni quello di studiare la natura delle restanti tre componenti "oscure". Se da una parte si è fiduciosi che gli acceleratori di particelle di nuova generazione, come il Large Hadron Collider (LHC), possano aiutare nello studio

delle particelle candidate per contribuire alla materia oscura, dall'altra le proprietà dell'energia oscura possono essere vincolate solamente da osservazioni cosmologiche, come la distanza di luminosità delle supernove di tipo Ia (grazie alla quale è stata scoperta l'energia oscura) o l'evoluzione delle strutture cosmiche. Per quanto riguarda la natura del campo inflazionario, responsabile dell'accelerazione esponenziale dell'Universo nei suoi primissimi istanti di vita, il miglior modo per studiarla è quello di determinare dalle osservazioni lo spettro primordiale delle fluttuazioni. Infatti diversi modelli di inflazione forniscono predizioni specifiche per la forma dello spettro di potenza e di altre proprietà statistiche delle perturbazioni primordiali. Una comprensione più profonda della fisica dell'inflazione porterà probabilmente importanti implicazioni sulla natura dell'energia oscura.

La componente di radiazione, nell'epoca prossima all'equivalenza tra radiazione e materia, è costituita essenzialmente da fotoni e neutrini; tuttavia i neutrini smettono di essere relativistici quando la loro energia media uguaglia all'incirca la temperatura dell'Universo. La fisica dei neutrini è stata rivoluzionata negli ultimi decenni, grazie ad una serie di esperimenti condotti con osservazioni di neutrini solari, atmosferici, o prodotti in reattori nucleari e acceleratori, dalla conferma sperimentale che queste particelle posseggono una massa non nulla. Più precisamente questo risultato deriva dalla scoperta che i neutrini non conservano la propria carica di sapore, ma oscillano da una famiglia all'altra durante la loro propagazione. Questi esperimenti di oscillazione tuttavia sono sensibili solo alla differenza delle masse al quadrato delle varie specie di sapore, ma non al loro valore assoluto, che resta tutt'oggi sconosciuto. Il neutrino cosmologico, formatosi nel plasma primordiale dalle interazioni deboli, influenzano in vario modo la formazione delle strutture. Quando ancora relativistici la loro densità di energia influisce sulla storia di espansione dell'Universo. Quando divengono non relativistici, nell'era dominata dalla materia, sopprimono la crescita delle strutture su piccola scala a causa della loro alta dispersione di velocità. Dunque una qualsiasi sonda in grado di studiare la distribuzione e l'evoluzione delle strutture cosmiche può, anche se indirettamente, fornire dei vincoli sulla massa dei neutrini. La cosmologia quindi fornisce vari strumenti indipendenti, e complementari a quelli della fisica delle particelle elementari, per studiare la fisica dei neutrini.

Entro pochi anni saranno disponibili i risultati di diverse *surveys* in grado di sondare con grande accuratezza le strutture cosmiche in un ampio intervallo di scale e redshift. Alcune di queste sono state già avviate, come il satellite Planck [6] in orbita dal 2009, che sta rimisurando le anisotropie del CMB, o la Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) [2] avviata sempre nel 2009, che sta mappando

la distribuzione delle galassie luminose rosse ad alto redshift. Altre invece, recentemente approvate, partiranno entro una decina d'anni, come il radio telescopio Square Kilometer Array (SKA) o il telescopio spaziale per *survey* EUCLID. EUCLID è una missione di classe media, recentemente approvata dall'Agenzia Spaziale Europea (ESA) nell'ambito del programma *Cosmic Vision 2015-2025*, con l'obiettivo principale di comprendere l'origine dell'espansione dell'Universo. Equipaggiato con due strumenti che lavorano nel visuale e nel vicino infrarosso, e coprendo un'area di cielo superiore a  $15,000\text{deg}^2$ , questo telescopio sarà in grado di misurare la forma di miliardi di galassie e di misurare con accuratezza il redshift di decine di milioni di galassie. Queste osservazioni, oltre a dare la possibilità di mappare la distribuzione di materia tramite il *weak lensing* e la distribuzione delle galassie tramite redshift fotometrici e spettroscopici, permetteranno di identificare oltre 60,000 ammassi di galassie. Gli ammassi di galassie sono gli oggetti gravitazionalmente legati più massivi dell'Universo, e la distribuzione della loro popolazione conserva l'impronta della statistica delle fluttuazioni primordiali, della loro successiva crescita e della dinamica del collasso degli aloni di materia oscura. Questa triplice dipendenza fa degli ammassi di galassie un ottimo strumento per sondare l'evoluzione delle strutture nell'Universo.

La prospettiva di avere a disposizione questa enorme quantità di dati ha spinto molti autori a studiare le potenzialità che queste future *surveys* avranno nel vincolare i parametri cosmologici. Lo scopo di questa tesi in particolare è stato quello di far previsioni sui vincoli che sarà possibile porre sulla massa totale dei neutrini da una *survey* di ammassi come quella di EUCLID. Un metodo ormai standard per questo tipo di analisi, è quello della matrice di Fisher. Questo strumento statistico permette, dato un modello teorico, e note le specifiche della *survey*, di tracciare le regioni di confidenza attese per i parametri, ed in particolare di porre un limite inferiore all'errore che sarà possibile assegnare ai parametri dall'analisi dei dati.

Per permettere al lettore una buona comprensione dell'analisi svolta in questo lavoro di tesi il primo capitolo sarà incentrato sulla teoria lineare delle perturbazioni, che permette di tracciare con sufficiente accuratezza lo sviluppo delle fluttuazioni di densità delle varie componenti dell'Universo fino alle scale degli ammassi ( $\sim 10h^{-1}\text{Mpc}$ ), e quindi di ottenere dei modelli teorici per lo spettro di potenza delle perturbazioni di densità e della funzione di massa degli aloni.

Il secondo capitolo sarà dedicato agli ammassi di galassie; in particolare si discuterà di come questi vengono identificati, delle diverse tecniche adottate per inferirne la massa, e dei diversi test cosmologici che è possibile effettuare tramite gli ammassi stessi.

Nel capitolo 3 invece verrà trattata in modo esaustivo la fisica dei

neutrini, partendo dai risultati dati dalla fisica delle particelle, per poi passare ai neutrini cosmici, descrivendone le proprietà e i diversi effetti che hanno sulla formazione delle strutture cosmiche.

Nell'ultimo capitolo, che contiene i risultati originali di questo lavoro di tesi, sarà innanzitutto introdotto il formalismo della matrice di Fisher, per poi applicarlo al caso particolare di una *survey* di ammassi tipo quella di EUCLID. Nell'ultima parte verranno riportati e commentati i risultati ottenuti combinando le matrici di Fisher del conteggio degli ammassi e del loro spettro di potenza per vari modelli che assumono vincoli a priori (*priors*) più o meno conservativi sui parametri cosmologici, ed in particolare combinando alle due matrici le *priors* attese per Planck. I risultati verranno presentati come regioni di confidenza nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$ , e verranno confrontati con i risultati più recenti ottenuti per questo tipo di *survey*.

Infine nelle conclusioni sarà fatto un breve riepilogo dei risultati e si discuterà dei possibili sviluppi che è possibile apportare all'analisi svolta a delle questioni aperte da affrontare, concludendo con le prospettive future per questo tipo di studio.

## INDICE

---

1	FORMAZIONE DI STRUTTURE COSMICHE	1
1.1	Modello Standard Cosmologico	2
1.2	Teoria lineare delle perturbazioni	4
1.2.1	Teoria perturbativa Newtoniana	4
1.2.2	Scala di Jeans	7
1.2.3	Fluido non collisionale: lunghezza di free-streaming	7
1.2.4	Soluzioni specifiche	9
1.3	Teoria relativistica delle piccole perturbazioni	14
1.3.1	Equazioni di base	14
1.3.2	Soluzioni particolari	18
1.4	Funzione di trasferimento lineare	21
1.5	Spettro lineare delle perturbazioni	24
1.5.1	Ampiezza dello spettro di potenza	24
1.5.2	Dipendenza dai parametri cosmologici	25
1.6	Funzione di massa	26
1.6.1	Collasso sferico	28
1.6.2	Formalismo di Press-Schechter	29
1.6.3	Estensioni del formalismo di Press-Schechter	31
1.7	Distribuzione spaziale degli aloni e fattore di bias	33
2	AMMASSI DI GALASSIE	37
2.1	Tecniche osservative	40
2.1.1	Identificazione nella banda ottica e nel vicino infrarosso	40
2.1.2	Identificazione nella banda X	40
2.1.3	Identificazione tramite l'effetto Sunyaev-Zel'dovich	41
2.1.4	<i>Lensing</i> gravitazionale	43
2.2	Metodi per stimare la massa degli ammassi	43
2.2.1	Masse da equilibrio idrostatico	44
2.2.2	Masse dalla dinamica delle galassie	45
2.2.3	Masse da <i>lensing</i> gravitazionale	46
2.3	Relazioni di scala	47
2.3.1	Relazioni di scala per la luminosità nella banda X	48
2.3.2	Relazioni di scala per la luminosità nella banda ottica	49
2.3.3	<i>Proxies</i> per la massa	50
2.4	Funzione di selezione e distribuzione della relazione osservabile-massa	51
2.5	Test cosmologici con gli ammassi di galassie	53
2.5.1	Conteggi e distribuzione spaziale degli ammassi	54
2.5.2	Frazione di barionica	56

2.5.3	Vincoli cosmologici	56
3	LA FISICA DEI NEUTRINI MASSIVI	60
3.1	Oscillazione dei neutrini e misura della loro massa	62
3.2	Fondo cosmico di neutrini	64
3.2.1	Storia termica dei neutrini	64
3.2.2	Neutrini massivi e materia oscura	67
3.3	Neutrini massivi e formazione di strutture	68
3.3.1	Lunghezza di free-streaming per i neutrini	68
3.3.2	Teoria lineare delle perturbazioni con neutrini	69
3.4	Effetto dei neutrini sull'evoluzione delle perturbazioni di materia	73
3.5	Effetto dei neutrini massivi sullo spettro di potenza	75
3.6	Effetti della degenerazione dello spettro dei neutrini	78
3.7	Neutrini massivi ed abbondanza di ammassi	78
3.8	Vincoli cosmologici sulla massa dei neutrini	84
4	VINCOLI SULLA MASSA DEI NEUTRINI	87
4.1	La matrice d'informazione di Fisher	89
4.1.1	Stima dei parametri	89
4.1.2	Matrice di Fisher	90
4.1.3	Alcune proprietà utili	91
4.2	Vincoli sulla massa dei neutrini da una <i>survey</i> di ammassi	94
4.2.1	Matrice di Fisher del numero di ammassi e del loro spettro di potenza	94
4.3	Analisi e risultati	98
5	CONCLUSIONI	110
	BIBLIOGRAFIA	115

## ELENCO DELLE FIGURE

---

Figura 1	Distribuzione galassie (2dF GRS)	4
Figura 2	Fattore di crescita lineare	11
Figura 3	Dipendenza parametri $P(k)$	27
Figura 4	Evoluzione funzione di massa	31
Figura 5	Funzioni di massa	32
Figura 6	Fattore di <i>bias</i>	35
Figura 7	Evoluzione degli ammassi di galassie	38
Figura 8	Abell 1835 in diverse bande	42
Figura 9	<i>Lensing</i> gravitazionale	44
Figura 10	Raffronto stimatori di massa: $M_X$ vs $M_{opt}$	46
Figura 11	Relazione $L_X - T$	48
Figura 12	Relazione $L_X - M$	49
Figura 13	Relazione $L_{opt} - M$	50
Figura 14	<i>Sky coverage</i>	53
Figura 15	Esempio di dati da ammassi	55
Figura 16	Test cosmologico con $f_{gas}$	57
Figura 17	Vincoli su $\gamma$ e $w$ dagli ammassi di galassie	57
Figura 18	Gerarchia normale ed inversa	63
Figura 19	Evoluzione della lunghezza di <i>free-streaming</i>	70
Figura 20	Evoluzione $\delta_\nu$ nella fase relativistica	71
Figura 21	$P(k)^{f_\nu} / P(k)^{f_\nu=0}$	77
Figura 22	Differenti degenerazioni dei neutrini	79
Figura 23	Simulazione ad N-corpi con neutrini massivi	81
Figura 24	Evoluzione dei contrasti di densità	82
Figura 25	Evoluzione della funzione di massa con $m_\nu \neq 0$	83
Figura 26	$n(M, z)$ al variare di $\sigma_8$ e $m_\nu$	84
Figura 27	Regioni di confidenza nel piano $\sum_\nu - \sigma_8$	85
Figura 28	Esempio di ellisse d'errore	93
Figura 29	Funzione di selezione fotometrica di EUCLID	96
Figura 30	Effetti della non-gaussianità di $N_\nu$	100
Figura 31	Ellissi d'errore al 68% C.L. nel piano $\Omega_\nu - \sigma_8$	101
Figura 32	Ellissi d'errore al 68% C.L. nel piano $\Omega_\nu - \sigma_8 +$ Planck <i>priors</i>	102
Figura 33	Ellissi d'errore al 68% C.L. nel piano $\Omega_\nu - \sigma_8$ con e senza <i>nuisance</i>	103
Figura 34	Ellissi d'errore al 68% C.L. nel piano $\Omega_\nu - \sigma_8$ per diversi modelli	104
Figura 35	Confronto risultati Mantz et al. (2010)	105
Figura 36	Vincoli per diversi numeri di famiglie	106
Figura 37	Vincoli sulla EoS dell'energia oscura	107



Figura 38	Regioni di confidenza per $\sum m_\nu = 0.1\text{eV}$	108
Figura 39	Riepilogo regioni di confidenza nel piano $\Omega_\nu - \sigma_8$	109
Figura 40	Regioni di confidenza piano $\Omega_\nu - \sigma_8$	112

## ELENCO DELLE TABELLE

---

Tabella 1	Parametri modello $\Lambda\text{CDM}$ (WMAP 7yrs)	27
Tabella 2	Vincoli cosmologici attuali da ammassi di galassie	58
Tabella 3	Modelli utilizzati nell'analisi dei risultati	100

# FORMAZIONE DI STRUTTURE COSMICHE

---

Secondo il modello di *clustering* gerarchico, le strutture cosmiche che oggi osserviamo sono il risultato dello sviluppo di piccole perturbazioni primordiali formatesi alla fine dell'epoca inflazionaria. A seconda della scala presa in considerazione sono diversi i processi fisici che entrano in gioco. In particolare, per scale al disotto del Mpc, dove lo sviluppo delle perturbazioni di materia viene influenzato da molti processi astrofisici (p.es. raffreddamento del gas, formazione di stelle, *feedback* da supernove), non esiste ancora un modello definitivo in grado di descriverle appropriatamente. Al contrario, su scale al disopra dei  $\sim 10$ Mpc, come quelle degli ammassi di galassie, la dinamica è dominata dagli effetti gravitazionali, ed quindi è possibile adottare delle approssimazioni che permettono di sviluppare modelli teorici affidabili.

In questo capitolo si accennerà al modello cosmologico standard §1.1, con cui è possibile descrivere l'evoluzione dell'Universo omogeneo ed isotropo; nelle sezioni §1.2 e §1.3 si passerà alla trattazione della teoria perturbativa lineare che permette di studiare lo sviluppo delle perturbazioni di densità fin tanto che queste rimangono sufficientemente piccole rispetto alla densità media dell'Universo. Verrà introdotta inoltre la funzione di trasferimento lineare (§1.4) e lo spettro di potenza lineare (§1.5) che permettono di relazionare le perturbazioni di densità osservate oggi, con quelle primordiali. In §1.6 verrà esposto e sviluppato il formalismo di Press-Schechter, che, tramite la funzione di massa, permette un confronto tra i vari modelli teorici ed i dati osservativi. Infine in 1.7 verrà introdotto il concetto di *bias* per la distribuzione spaziale degli aloni.

Per una trattazione completa di questi argomenti si può far riferimento ai libri di testo di cosmologia standard (p.es. [80, 78, 71]).

## 1.1 MODELLO STANDARD COSMOLOGICO

La cosmologia moderna si basa sulla teoria generale della relatività di Einstein, secondo la quale la struttura dello spazio-tempo viene determinata dalla distribuzione di materia-energia al suo interno. Il fatto che l'Universo su grande scala risulta essere approssimativamente omogeneo ed isotropo, ci permette di descrivere in modo relativamente semplice l'evoluzione del fondo cosmico. Sotto queste condizioni la metrica assume la forma di Robertson-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] \quad (1.1)$$

con  $c$  velocità della luce,  $(r, \vartheta, \varphi)$  coordinate co-moventi e  $t$  tempo proprio. La costante  $K$ , che può assumere i valori  $0, 1, -1$ , è legata alla geometria dell'Universo; rispettivamente: per  $K = 0$  si ha uno spazio piatto, per  $K = 1$  uno spazio a curvatura positiva e per  $K = -1$  a curvatura negativa. Infine la funzione  $a(t)$  rappresenta il fattore di scala cosmico al tempo  $t$ . Quest'ultimo è legato al redshift tramite la relazione  $a(t) = a_0/(1+z)$ .

Per determinare la dipendenza temporale di  $a(t)$  si sfruttano le equazioni di campo di Einstein; in particolare, inserendo in queste la metrica di Robertson-Walker ed il tensore energia-impulso per un fluido perfetto, si ricava l'equazione di Friedmann:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left[ \rho_{m,o} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \rho_{r,o} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 + \rho_{\Lambda,o} \right] - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (1.2)$$

dove il pedice "o" accanto ad una lettera indica che la quantità è misurata al tempo attuale  $t_0$ .  $H(t)$ , detto parametro di Hubble, è definito come il tasso con cui varia la distanza propria tra due osservatori fondamentali al tempo  $t$ . In genere le quantità che dipendono dal valore di  $H_0$  vengono espresse in funzione di  $h \equiv H_0/(100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$ , per parametrizzare l'incertezza sulla misura sperimentale. Il parametro  $\rho_i$  indica la componente  $i$ -esima della densità totale di energia-materia:  $m$  per la componente di materia non relativistica,  $r$  per la componente relativistica (radiazione e materia relativistica), e  $\Lambda$  per l'energia del vuoto (costante cosmologica). È prassi esprimere queste quantità in funzione della densità critica  $\rho_{cr} = 3H^2/8\pi G$  come:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{cr}}, \quad \text{con } i = r, m, \Lambda.$$

Seguendo questa definizione, ed utilizzando l'eq. (1.2), si ha che per  $\Omega_{tot} \equiv \sum_i \Omega_i = 1$  l'Universo ha curvatura nulla ( $K = 0$ ).

Come si vede dall'eq. (1.2) le diverse componenti  $\rho_i$  scalano in modo differente con il fattore di scala  $a(t)$ . Questo implica che a seconda del redshift considerato la dinamica dell'Universo viene dominata da una

particolare componente di energia-materia. Calcolando il rapporto tra  $\rho_r$  e  $\rho_m$  si ottiene:

$$\frac{\rho_m}{\rho_r} \approx 2.4 \times 10^4 \Omega_{m,0} h^2 (1+z)^{-1}, \quad (1.3)$$

quindi si ha l'equivalenza tra le due componenti per:

$$1 + z_{\text{eq}} \approx 2.4 \times 10^4 \Omega_{m,0} h^2 \approx 3250. \quad (1.4)$$

Focalizzando l'attenzione su un modello di Universo piatto ( $K = 0$ ) con costante cosmologica ( $\Lambda \neq 0$ ), risolvendo l'equazione di Friedmann (1.2) si ottengono le soluzioni del fattore di scala per diverse epoche:

**ERA DOMINATA DALLA RADIAZIONE (RD).** Per  $z \gg z_{\text{eq}}$  il lato destro dell'eq. (1.2) è dominato dalla radiazione; trascurando gli altri due termini ed integrando l'equazione si ottiene:

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{32\pi G \rho_{r,0}}{3} \right)^{1/4} t^{1/2}. \quad (1.5)$$

**ERA DOMINATA DALLA MATERIA (MD).** Passata l'equivalenza ( $z \ll z_{\text{eq}}$ ), la radiazione influenza poco la dinamica globale, e ponendo  $\Omega_\Lambda = 0$ , l'eq. (1.2) si riduce a:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \Omega_{m,0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (1.6)$$

che ha come soluzione:

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (1.7)$$

Questa è la soluzione per un Universo di Einstein-de Sitter (EdS).

**ERA DOMINATA DALL'ENERGIA OSCURA (DED).** Per  $z \lesssim 0.33$  la costante cosmologica non è più trascurabile, e l'eq. (1.2) si riduce all'uguaglianza:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{m,0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{\Lambda,0} \right]. \quad (1.8)$$

Dato che  $0 < \Omega_{m,0} < 1$ , sfruttando il fatto che  $H_0 \equiv \dot{a}/a > 0$ , si ottiene la soluzione:

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \left[ \sinh \left( \frac{3}{2} \Omega_{\Lambda,0}^{1/2} H_0 t \right) \right]^{2/3}, \quad (1.9)$$

che per tempi piccoli si riduce alla soluzione Eds,  $a \propto t^{2/3}$ , mentre per  $t$  grandi approssima la soluzione per un modello de Sitter,  $a \propto \exp(\Omega_{\Lambda,0}^{1/2} H_0 t)$ .

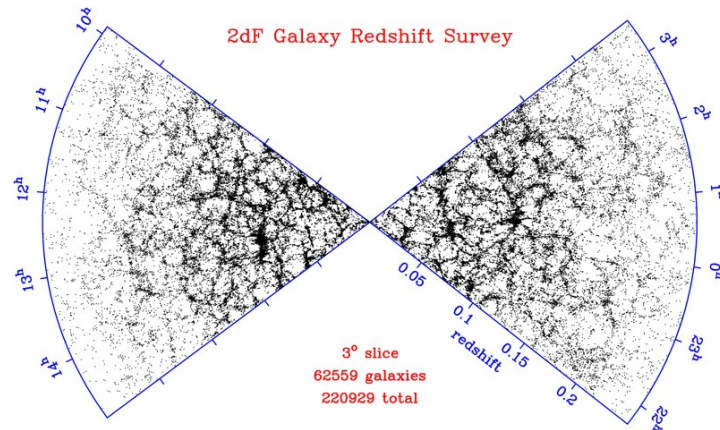


Figura 1: Proiezione sul piano di  $3^\circ$  della mappa tridimensionale prodotta da 2dFGRS. Contiene 63000 galassie e mostra la struttura a grande scala della distribuzione di galassie [1].

## 1.2 TEORIA LINEARE DELLE PERTURBAZIONI

Il modello cosmologico standard, presentato nella sezione precedente, assume che l'Universo sia omogeneo. Ovviamente quest'ipotesi non può essere ritenuta vera a tutte le scale. Difatti le strutture che osserviamo oggi, come le galassie o gli ammassi di galassie, si sono formate a partire da piccole disomogeneità nella densità di materia, evolute sotto l'azione della forza di gravità. In questa sezione verrà introdotta la teoria lineare delle perturbazioni, la quale permette di studiare lo sviluppo di queste perturbazioni di densità fin tanto che il contrasto di densità rispetto al fondo cosmico rimane sufficientemente piccolo.

### 1.2.1 Teoria perturbativa Newtoniana

Per strutture di dimensioni molto inferiori al raggio di Hubble ( $R_H = c/H$ ) è sufficiente lo studio della teoria Newtoniana, in quanto la causalità può considerarsi istantanea. Per far ciò si consideri l'evoluzione della densità  $\rho$  e della velocità  $\mathbf{u}$  di un fluido non relativistico sotto l'azione di un campo gravitazionale con potenziale  $\phi$ . La descrizione di fluido si può applicare fin tanto che le particelle che lo compongono hanno un cammino libero medio molto minore della scala in esame; questo è valido ad esempio per un gas di barioni, per cui le frequenti collisioni tra le particelle stabiliscono un equilibrio termico. Anche nel caso di un gas non collisionale, come può essere la materia oscura (DM), si può applicare la descrizione di fluido, purché le particelle diffondano su scale inferiori rispetto a quella d'interesse.

Per ottenere l'evoluzione temporale del fluido si sfrutta l'equazione di continuità (che descrive la conservazione della massa), l'equazione

di Eulero (l'equazione del moto) e l'equazione di Poisson (che descrive il campo gravitazionale):

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta) \mathbf{v}] = 0 \quad (\text{continuità}), \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{\nabla P}{a \bar{\rho} (1 + \delta)} \quad (\text{Eulero}), \quad (1.11)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta \quad (\text{Poisson}), \quad \Phi \equiv \phi + a \ddot{x}^2 / 2 \quad (1.12)$$

dove  $\nabla \equiv \nabla_{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{v} = a \dot{\mathbf{x}}$ , con  $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a(t)$  coordinate co-moventi. Al posto della densità  $\rho$  le equazioni sono state espresse in funzione del contrasto di densità  $\delta$ , definito come:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)},$$

con  $\bar{\rho}$  densità media dell'Universo. Otteniamo così un sistema di cinque equazioni, (1.10)-(1.12), in sei incognite ( $\rho, \mathbf{u}, P$  e  $\phi$ ); per poterlo risolvere è necessario quindi introdurre l'equazione di stato per la pressione  $P$ . In generale la pressione dipende dalla densità  $\rho$ , e dall'entropia per unità di massa  $S$ . Dalla prima legge della termodinamica per un gas monoatomico non relativistico, unita all'equazione di stato per i gas perfetti si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla P}{\bar{\rho}} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho + \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \nabla S \right] \\ &= c_S^2 \nabla \delta + \frac{2}{3} (1 + \delta) T \nabla S \end{aligned} \quad (1.13)$$

dove  $T$  è la temperatura del fluido, e  $c_S = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_S}$  la velocità del suono adiabatica.

Inserendo l'eq. (1.13) nell'equazione di Eulero (1.11) si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{c_S^2}{a} \frac{\nabla \delta}{(1 + \delta)} - \frac{2T}{3a} \nabla S. \quad (1.14)$$

In caso di piccole perturbazioni ( $\delta \ll 1$ ) è possibile linearizzare le equazioni trascurando tutti i termini al second'ordine in  $\delta$  e  $\mathbf{v}$ . In questo caso, differenziando nuovamente rispetto al tempo l'eq. (1.10), ed utilizzando le equazioni di Eulero e Poisson, rispettivamente per eliminare il termine  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  e  $\nabla^2 \Phi$ , si arriva a scrivere:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{c_S^2}{a^2} \nabla^2 \delta + \frac{2}{3} \frac{\bar{T}}{a^2} \nabla^2 S. \quad (1.15)$$

Il secondo termine a sinistra dell'equazione rappresenta il termine d'attrito di smorzamento di Hubble (*Hubble drag*), che tende a smorzare la crescita delle perturbazioni a causa dell'espansione dell'Universo. Il primo termine a destra invece, legato al potenziale gravitazionale, provoca la crescita delle perturbazioni attraverso l'instabilità gravitazionale. Infine gli ultimi due termini a destra sono entrambi termini

di pressione: il primo dipendente dalle variazioni spaziali di densità, il secondo dalle variazioni spaziali di entropia.

La trattazione sin ora esposta, basata sull'assunzione che il contenuto di materia dell'Universo possa essere descritto da un fluido non relativistico, rimane valida anche per un Universo con energia oscura (ad esempio la costante cosmologica  $\Lambda$ ), o in cui è presente un fondo di particelle relativistiche (fotoni e neutrini). Difatti si dimostra facilmente che le equazioni (1.10)-(1.12) continuano a valere, definendo però  $\delta$  come il contrasto di densità rispetto alla densità media di materia non relativistica, piuttosto che la densità di materia totale. L'effetto che si ottiene aggiungendo un fondo relativistico alla densità di energia, consiste nella variazione del tasso di espansione dell'Universo, ovvero della funzione  $a(t)$ .

In regime lineare, le equazioni che governano l'evoluzione delle perturbazioni, sono lineari rispetto alle quantità perturbate. Se è possibile trascurare la curvatura dell'Universo, come per un modello piatto, o su scale inferiori a  $R_H$ , è utile espandere i campi in onde piane in modo da poter studiare lo sviluppo delle perturbazioni su diverse scale in modo indipendente. Ad esempio, per il campo di densità  $\delta$ , si avrà:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}); \quad \delta_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V_u} \int \delta(\mathbf{x}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.16)$$

dove  $V_u$  è una porzione di spazio sufficientemente grande entro cui le perturbazioni sono assunte periodiche. Calcolando la trasformata di Fourier dell'eq. (1.15) si ottiene l'equazione per l'evoluzione di ognuno dei diversi modi  $\mathbf{k}$ ; sfruttando il fatto che  $\nabla$  viene sostituito da  $i\mathbf{k}$ , e  $\nabla^2$  da  $-k^2$ , l'equazione d'evoluzione diviene:

$$\frac{d^2 \delta_{\mathbf{k}}}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dt} = \left[ 4\pi G \bar{\rho} - \frac{k^2 c_s^2}{a^2} \right] \delta_{\mathbf{k}} - \frac{2}{3} \frac{\ddot{T}}{a^2} k^2 S_{\mathbf{k}}. \quad (1.17)$$

Come già accennato in precedenza sia le perturbazioni di densità  $\delta_{\mathbf{k}}$ , che quelle di entropia  $S_{\mathbf{k}}$ , possono innescare lo sviluppo delle fluttuazioni di densità. Si distinguono perciò due tipi di perturbazioni a seconda di come hanno inizio: perturbazioni isoentropiche, per le quali l'entropia specifica rimane costante ( $\delta S_i = 0$ ) e l'instabilità è generata da un  $\delta_i \neq 0$ ; perturbazioni di isocurvatura, per le quali  $\delta_i = 0$  ma  $\delta S_i \neq 0$ . Quest'ultime devono il nome al fatto che le perturbazioni della metrica sono associate a fluttuazioni nella densità di energia, piuttosto che a disomogeneità nell'entropia.

### 1.2.2 Scala di Jeans

Se si considerano perturbazioni isoentropiche, che evolvono in modo adiabatico, è possibile porre  $k^2 S_{\mathbf{k}} = 0$ . Ignorando per il momento il termine legato all'espansione dell'Universo, l'eq. (1.17) si riduce a:

$$\frac{d^2 \delta_{\mathbf{k}}}{dt^2} = -\omega^2 \delta_{\mathbf{k}}, \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{k^2 c_s^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho}. \quad (1.18)$$

A seconda del valore di  $k$  che si sta considerando  $\omega$  può assumere valori positivi o negativi; si definisce perciò una lunghezza propria caratteristica, detta lunghezza di Jeans,

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}, \quad k_J = \left( \frac{4\pi G \bar{\rho} a^2}{c_s^2} \right)^{1/2} \quad (1.19)$$

che esprime la distanza che un'onda acustica percorre nel tempo di caduta libera (*free-fall time*), sotto collasso gravitazionale,  $t_{\text{ff}} \simeq (G\rho)^{-1/2}$ . Nel caso in cui  $\lambda < \lambda_J$  ( $k > k_J$ ), si ha che  $\omega^2 > 0$  e l'eq. (1.18) è quella di un oscillatore armonico, con soluzione  $\delta_{\mathbf{k}} = \exp(\pm i\omega t)$ , che corrisponde ad un'onda acustica che si propaga alla velocità del suono  $c_s$ . Invece, nel caso in cui  $\lambda > \lambda_J$  ( $k < k_J$ ), la pulsazione diviene negativa  $\omega^2 < 0$ ; la pressione non riesce a contrastare il collasso gravitazionale e la soluzione di (1.18) è quella di un'onda stazionaria, che aumenta (modo crescente) o diminuisce (modo decrescente) in ampiezza, in modo esponenziale. Il primo dei due modi rappresenta l'instabilità gravitazionale, detta anche instabilità di Jeans. Reinserendo il termine d'espansione le due soluzioni vengono modificate: nel primo caso ( $\lambda < \lambda_J$ ) si ottiene un oscillatore armonico smorzato, e l'onda acustica viene lentamente smorzata, mentre per  $\lambda > \lambda_J$  la crescita esponenziale dell'instabilità viene rallentata.

L'instabilità di Jeans permette di spiegare alcuni fenomeni base della formazione di strutture: prima della ricombinazione fotoni ed elettroni sono fortemente accoppiati, e radiazione e materia si comportano come un singolo fluido con una velocità del suono dell'ordine  $c_s \sim c/\sqrt{3}$ , che oscilla su scale inferiori di  $\lambda_J$ ; dopo la ricombinazione i barioni, divenuti essenzialmente neutri, si disaccoppiano dalla radiazione, e la loro velocità del suono cala drasticamente, e con essa  $\lambda_J$ , permettendo la formazione di strutture. La distanza caratteristica percorsa da un'onda acustica prima del disaccoppiamento dei fotoni, viene chiamata orizzonte acustico.

### 1.2.3 Fluido non collisionale: lunghezza di free-streaming

L'approssimazione di fluido trattata in precedenza rimane valida fin tanto che il cammino libero medio delle particelle è molto inferiore alla scala della perturbazioni in considerazione. Per un fluido non collisionale quest'assunzione cessa di valere; le particelle si muovono



liberamente lungo le geodetiche e diffondono facilmente. Utilizzando le equazioni di Vlasov è possibile ottenere l'analogo delle equazioni di continuità ed Eulero per questo caso:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [(1 + \delta) \langle v_j \rangle] = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \langle v_i \rangle + \frac{1}{a} \sum_j \langle v_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} = \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{1}{a(1 + \delta)} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [(1 + \delta) \sigma_{ij}^2], \quad (1.21)$$

dove  $\langle v_j \rangle$  è la velocità media delle particelle nell'intorno del punto  $\mathbf{x}$ , e  $\sigma_{ij}^2$  è definito come

$$\sigma_{ij}^2 \equiv \langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle. \quad (1.22)$$

Dal confronto dell'eq. (1.21) con l'equazione di Eulero (1.11) si vede che  $\rho \sigma_{ij}^2$ , chiamato tensore di *stress*, gioca il ruolo della pressione.

Anche nel caso di un fluido non collisionale esiste una scala al disotto della quale le perturbazioni non possono crescere. Fisicamente questo è dovuto all'alta dispersione di velocità delle particelle, ed alla loro natura non collisionale, che gli permette di diffondere liberamente smorzando le perturbazioni di densità. Questo fenomeno, causato dal moto casuale delle particelle non interagenti, viene chiamato *free-streaming*. La distanza propria al disotto della quale il processo di *free-streaming* diviene importante è dell'ordine di  $v t$ , dove  $t$  è l'età dell'Universo, e  $v$  è la velocità caratteristica delle particelle al tempo  $t$ . Più precisamente si definisce la lunghezza di *free-streaming* come la distanza co-movente percorsa da una particella prima del tempo  $t$ :

$$\lambda_{fs} = \int_0^t \frac{v(t')}{a(t')} dt'. \quad (1.23)$$

Se la particella diviene non relativistica a  $t_{nr}$ , allora la velocità peculiare è  $v \sim c/\sqrt{3}$  per  $t < t_{nr}$ , e  $v \propto a^{-1}$  per  $t > t_{nr}$ . Assumendo che  $t_{nr} < t_{eq}$ , ed utilizzando  $a(t) \propto t^{1/2}$  per  $t < t_{eq}$ , e  $a(t) \propto t^{2/3}$  per  $t > t_{eq}$  (vedi §1.1), si ottiene:

$$\lambda_{fs} = \frac{2ct_{nr}}{\sqrt{3}a_{nr}} \left[ 1 + \ln \frac{a_{eq}}{a_{nr}} \right] + \frac{3ct_{nr}}{\sqrt{3}a_{nr}} \left[ 1 - \left( \frac{a_{eq}}{a} \right)^{1/2} \right]. \quad (1.24)$$

Come si può vedere per  $t \gg t_{eq}$  l'ultimo termine tra parentesi dell'eq. (1.24) tende ad uno, e la lunghezza di *free-streaming* assume il valore asintotico

$$\lambda_{fs} = \frac{2ct_{nr}}{\sqrt{3}a_{nr}} \left[ \frac{5}{2} + \ln \frac{a_{eq}}{a_{nr}} \right], \quad (1.25)$$

ovvero  $\lambda_{fs}$  viene determinato in gran parte dal suo valore all'epoca  $t_{nr}$ , dopo la quale la crescita avviene solo in modo logaritmica.

Alternativamente, particelle poco massive (come i neutrini), possono diventare non relativistiche dopo l'equivalenza tra radiazione e materia ( $t_{nr} > t_{eq}$ ); in questo caso risulta per la lunghezza di *free-streaming*:

$$\lambda_{fs} = \frac{2ct_{eq}}{\sqrt{3}a_{eq}} \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{a_{nr}}{a_{eq}} \right)^{1/2} \right) \right] + \frac{3ct_{nr}}{\sqrt{3}a_{nr}} \left[ 1 - \left( \frac{a_{nr}}{a} \right)^{1/2} \right] \quad (1.26)$$

Nuovamente il contributo principale a  $\lambda_{fs}$  viene dal valore assunto a  $t = t_{nr}$ , mentre dopo la transizione non relativistica assume il valore asintotico di

$$\lambda_{fs} = \frac{2ct_{eq}}{\sqrt{3}a_{eq}} \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{a_{nr}}{a_{eq}} \right)^{1/2} \right) \right] + \frac{3ct_{nr}}{\sqrt{3}a_{nr}}. \quad (1.27)$$

Fisicamente, in entrambi i casi, si ha che le perturbazioni al disotto di  $\lambda_{fs}(t_{nr})$  vengono cancellate dalla diffusione delle particelle. Per  $t > t_{nr}$ , le perturbazioni di densità possono crescere all'interno delle buche di potenziale già presenti al momento in cui il fluido diviene non relativistico. Al contrario, su scale molto maggiori della lunghezza di *free-streaming*, la velocità delle particelle può essere considerata trascurabile, e dopo la transizione non relativistica le fluttuazioni di densità possono iniziare a crescere. In particolare, i modi con  $k < k_{nr} = 2\pi/\lambda_{fs}(t_{nr})$  non sono mai affetti da *free-streaming*, e le perturbazioni evolvono come un fluido ideale a pressione nulla. Come verrà illustrato in seguito (vedi §3.3), questo effetto di dissipazione incide notevolmente sullo sviluppo delle perturbazioni di neutrini, imprimendo una scala caratteristica nella funzione di trasferimento lineare (vedi 1.4 di seguito).

#### 1.2.4 Soluzioni specifiche

##### *Fluido a pressione nulla*

Per perturbazioni isoentropiche in un fluido a pressione nulla (o per  $k \ll k_J$ ), l'eq. (1.17) si riduce a

$$\frac{d^2\delta_{\mathbf{k}}}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dt} = 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_{\mathbf{k}}, \quad (1.28)$$

dove  $\rho_m$  è la densità media del fluido. Si può dimostrare che se  $\delta_1(t)$  e  $\delta_2(t)$  sono due soluzioni dell'equazione differenziale allora:

$$\delta_2\dot{\delta}_1 - \delta_1\dot{\delta}_2 \propto a^{-2}, \quad (1.29)$$

anche nel caso in cui si includa il termine di pressione. Quindi, una volta nota una delle due soluzioni di (1.28), è possibile ottenere l'altra risolvendo quest'equazione differenziale del primo ordine. Per risolvere l'eq. (1.28), si sfrutta la relazione

$$\frac{dH}{dt} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}(\bar{\rho}_m + 2\rho_\Lambda), \quad (1.30)$$

ricavata dell'equazione di Friedmann (1.2); essendo  $\bar{\rho}_m \propto a^{-3}$  e  $\rho_\Lambda$  costante, derivando rispetto a  $t$  la relazione sopra scritta si ottiene

$$\frac{d^2 H}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{dH}{dt} = 4\pi G \bar{\rho}_m H, \quad (1.31)$$

ovvero sia  $H(t)$  che  $\delta_k(t)$  obbediscono alla stessa equazione. Poiché  $H(t)$  decresce con il tempo (vedi eq. (1.2))

$$\delta_- \propto H(t) \quad (1.32)$$

rappresenta la soluzione decrescente. Sostituendo questa nell'eq. (1.28) si trova che il modo crescente può essere scritto come

$$\delta_+ \propto H(t) \int_0^t \frac{dt'}{a^2(t')H^2(t')} \propto H(z) \int_z^\infty \frac{1+z'}{E^3(z')} dz', \quad (1.33)$$

dove  $E(z)$  è dato dall'equazione

$$E(z) = [\Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4]^{1/2}. \quad (1.34)$$

In genere il modo crescente può essere ottenuto dall'eq. (1.33) numericamente. Una buona approssimazione trovata da Carroll et al. [23] è:

$$\delta_+ \propto D(z) \propto g(z)/(1+z), \quad (1.35)$$

con

$$g(z) \approx \frac{5}{2} \Omega_m(z) \{ \Omega_m^{4/7}(z) - \Omega_\Lambda(z) + [1 + \Omega_m(z)/2][1 + \Omega_\Lambda(z)/70] \}^{-1} \quad (1.36)$$

dove

$$\Omega_m(z) = \Omega_{m,0}(1+z)^3/E^2(z) \quad \Omega_\Lambda(z) = \Omega_{\Lambda,0}/E^2(z).$$

In figura 2 viene mostrata la dipendenza del fattore di crescita lineare  $D(z)$  dal redshift per un modello EdS e due modelli con  $\Omega_m = 0.3$ , rispettivamente con  $\Omega_\Lambda = 0.7$  e  $\Omega_\Lambda = 0$ . Si può notare che la crescita più rapida si ha per il modello EdS, mentre lo sviluppo delle perturbazioni è più lento nel caso di un Universo aperto ( $\Omega_\Lambda = 0$ ). Il modello con costante cosmologica fornisce un'evoluzione intermedia tra i due. È evidente quindi come un qualsiasi metodo d'indagine in grado di valutare l'evoluzione delle perturbazioni permette di porre forti vincoli ai parametri cosmologici.

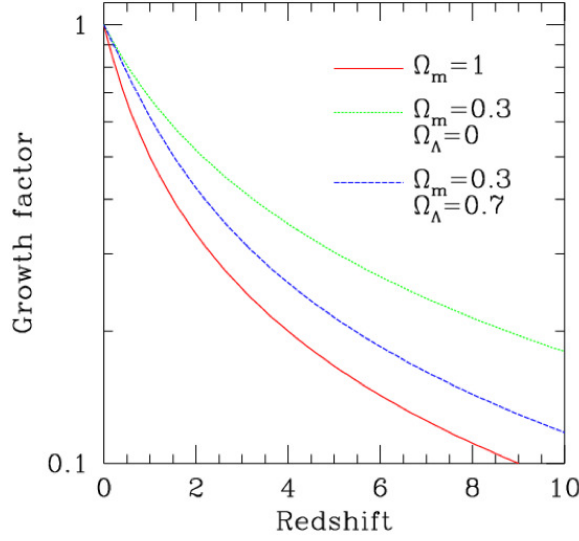


Figura 2: Fattore di crescita lineare al variare del redshift per tre diversi modelli cosmologici: (*linea continua*) modello piatto con  $\Omega_m = 1$ , (*curva tratteggiata*) modello piatto con  $\Omega_m = 0.3$  e costante cosmologica, (*linea punteggiata*) modello aperto con  $\Omega_m = 0.3$  e  $\Omega_\Lambda = 0$ . [20].

#### *Perturbazioni per due componenti non relativistiche*

Si considerino ora perturbazioni isoentropiche in un fluido formato da due componenti non relativistiche, una delle quali a pressione nulla, come nel caso di un fluido composto da barioni e materia oscura fredda (CDM). Si assuma per semplicità che la densità media dell'Universo sia dominata dalla materia oscura. In questo caso, il contrasto di densità barionico  $\delta_b$ , obbedisce alla seguente equazione (nello spazio di Fourier):

$$\frac{d^2\delta_b}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_b}{dt} + \frac{k^2 c_s^2 a}{a^3}\delta_b = 4\pi G \frac{\bar{\rho}_0 a_0^3}{a^3}\delta_{dm}, \quad (1.37)$$

dove  $\delta_{dm}$ , le perturbazioni di densità in materia oscura, seguono l'eq. (1.28), e  $\bar{\rho}_0 \simeq \bar{\rho}_{dm,0}$  è la densità media di materia al tempo presente. Nel caso particolare in cui  $c_s^2 a = \text{costante}$  (come per un fluido politropico con  $P \propto \rho^{4/3}$ ) e  $a(t) \propto t^{2/3}$  (come nell'era MD), una soluzione per quest'equazione è

$$\delta_b(\mathbf{k}, t) = \frac{\delta_{dm}(\mathbf{k}, t)}{1 + k^2/k_J^2}, \quad \text{con} \quad k_J^2 = \frac{3a^2 H^2}{2c_s^2}. \quad (1.38)$$

Su grandi scale ( $k \ll k_J$ ) le perturbazioni barioniche seguono quelle di materia oscura ( $\delta_b \rightarrow \delta_{dm}$ ); questo riflette semplicemente il fatto che quando è possibile trascurare la pressione i barioni si comportano come un fluido non collisionale. Per piccole scale ( $k \gg k_J$ ), invece, il termine di pressione non può essere ignorato, e la componente

barionica inizia ad oscillare (vedi di seguito), per poi venir smorzata dall'espansione dell'Universo ( $\delta_b \rightarrow 0$ ). Nonostante la soluzione (1.38) sia valida solo quando la componente barionica si comporta come un fluido politropico con indice adiabatico  $\gamma = 4/3$ , si può mostrare che il comportamento generale di  $\delta_b$  rimane molto simile per altri valori di  $\gamma$ .

### *Onde Acustiche*

Come nel caso precedente si considerino perturbazioni isoentropiche in un fluido composto da barioni e CDM, per un modello dominato da materia oscura. Se la scala di tempi studiata è molto inferiore al tempo di Hubble, è possibile trascurare il termine d'espansione, e l'eq. (1.17) si riduce a

$$\frac{d^2\delta_b}{dt^2} + \frac{k^2 c_s^2}{a^2} \delta_b = -\frac{k^2}{a^2} \Phi_{dm}. \quad (1.39)$$

Si noti che questo caso differisce da quello discusso in §1.2.2 in quanto la sorgente del campo gravitazionale sono le perturbazioni di materia oscura. L'eq. (1.39) corrisponde a quella di un oscillatore armonico forzato. Se il potenziale  $\Phi_{dm}(\mathbf{k}, t)$  è costante nel lasso di tempo considerato, la soluzione può essere scritta come

$$\delta_b(\eta) = \left[ \delta_b(0) + \frac{\Phi_{dm}}{c_s^2} \right] \cos(kc_s\eta) + \frac{1}{kc_s} \left. \frac{d\delta_b}{d\eta} \right|_{t=0} \sin(kc_s\eta) - \frac{\Phi_{dm}}{c_s^2}, \quad (1.40)$$

dove è stata introdotta la nuova variabile  $\eta = t/a$ . Quindi  $\delta_b(\mathbf{k}, t)$  oscilla attorno a  $-\Phi_{dm}(\mathbf{k}, t)/c_s^2$ , con una frequenza  $\omega = kc_s$ , e con un'ampiezza e fase dipendente dalle condizioni iniziali. Le onde acustiche giocano un ruolo anche nell'era precedente alla ricombinazione, quando i barioni ed i fotoni sono fortemente accoppiati, e possono essere considerati come un unico fluido. In questo caso le onde acustiche sono guidate dalla pressione dei fotoni, e per un dato modo, l'ampiezza, la frequenza, ed il punto attorno a cui oscillano, dipende dal rapporto tra le densità delle due componenti tramite la velocità del suono

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \left[ \frac{3\bar{\rho}_b(z)}{4\bar{\rho}_\gamma(z)} + 1 \right]^{-1/2}. \quad (1.41)$$

### *Dissipazione di Silk*

Nonostante prima della ricombinazione barioni e fotoni siano fortemente accoppiati dalla diffusione Compton, l'accoppiamento è imperfetto, in quanto il cammino libero medio dei fotoni,  $\lambda = (\sigma_T n_e)^{-1}$ , non è nullo. Di conseguenza i fotoni sono liberi di diffondere da zone di alta a bassa densità, smorzandone le fluttuazioni. Poiché le onde

acustiche, prima della ricombinazione, sono indotte dalla pressione dei fotoni, questa diffusione induce uno smorzamento dell'oscillazione del fluido barionico. Questo meccanismo dissipativo è noto con il nome di dissipazione di Silk. La scala per cui questo fenomeno diviene importante è legata alla distanza tipica per cui un fotone diffonde in un tempo di Hubble. In base alla teoria cinetica questa distanza risulta essere

$$\lambda_d = (ct/3\sigma_T n_e)^{1/2}. \quad (1.42)$$

Le perturbazioni nel fluido di barioni-fotoni al disotto di questa scala saranno perciò smorzate esponenzialmente durante l'era precedente la ricombinazione.

### *Effetto Meszaros*

In presenza di un fondo relativistico uniforme, le fluttuazioni della componente non relativistica (assunta non collisionale) seguono la l'eq. (1.28), mentre il fattore di scala, assumendo un modello EdS, è dato da

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r), \quad (1.43)$$

dove  $\bar{\rho}_m \propto a^{-3}$  è la densità media della componente non relativistica, e  $\bar{\rho}_r \propto a^{-4}$  è quella del fondo relativistico. Definendo una nuova variabile temporale  $\zeta \equiv \bar{\rho}_m/\bar{\rho}_r = a/a_{\text{eq}}$  l'equazione del moto per  $\delta_{\mathbf{k}}$  può essere scritta come

$$\frac{d^2\delta_{\mathbf{k}}}{d\zeta^2} + \frac{2+3\zeta}{2\zeta(1+\zeta)} \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{d\zeta} = \frac{3}{2} \frac{\delta_{\mathbf{k}}}{\zeta(1+\zeta)}. \quad (1.44)$$

Le due soluzioni dell'equazione differenziale sono:

$$\delta_+ \propto 1 + \frac{3}{2}\zeta; \quad (1.45)$$

$$\delta_- \propto \left(1 + \frac{3}{2}\zeta\right) \ln \left[ \frac{(1+\zeta)^{1/2} + 1}{(1+\zeta)^{1/2} - 1} \right] - 3(1+\zeta)^{1/2}. \quad (1.46)$$

Questo mostra come le perturbazioni del fluido non relativistico non possono crescere ( $\delta_+ = \text{costante}$ ) se la componente relativistica è dominante ( $\zeta \ll 1$ ). Difatti fin tanto che  $a \ll a_{\text{eq}}$  la rapida espansione dell'Universo provoca una fase di stagnazione nella crescita delle perturbazioni, nota con il nome di effetto Mészáros [68]. Passata l'equivalenza, nell'era dominata dalla materia non relativistica, le soluzioni approssimano asintoticamente quelle per un Universo EdS

$$\delta_+ \propto a \propto t^{2/3}, \quad \delta_- \propto a^{-3/2} \propto t^{-1}. \quad (1.47)$$

1.3 TEORIA RELATIVISTICA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI

La teoria perturbativa Newtoniana, esposta in precedenza, è applicabile se (i) la lunghezza di scala delle fluttuazioni è molto minore del raggio di Hubble, e (ii) il contenuto di materia può essere trattato come un fluido non relativistico. Le perturbazioni che entrano nell'orizzonte al tempo  $t_{\text{ent}}$ , non avranno soddisfatto la prima condizione per  $t < T_{\text{ent}}$ . La seconda condizione, invece, viene violata se le fluttuazioni riguardano particelle relativistiche, come i fotoni o i neutrini quando sono ancora relativistici.

Le perturbazioni della metrica dello spazio tempo sono relazionate alle perturbazioni del campo di densità tramite le equazioni di campo di Einstein,  $[\delta G]_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4)[\delta T_{\mu\nu}]$ , mentre le perturbazioni di materia-energia si derivano dalla conservazione del tensore energia-impulso,  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ . Per un fluido perfetto non relativistico, la conservazione del tensore  $T_{\mu\nu}$  si riduce ad un set di semplici equazioni per i fluidi. Tuttavia, in genere, questa trattazione non è appropriata, ed è necessario ricorrere alle equazioni di Boltzmann per descrivere l'evoluzione delle funzioni di distribuzione nello spazio delle fasi. Il tensore energia-impulso viene poi relazionato alle funzioni di distribuzione tramite un insieme di equazioni dei momenti. Sostanzialmente, quindi, le equazioni Einstein, combinate con la legge di conservazione del tensore energia-impulso, sono sufficienti per studiare l'evoluzione delle perturbazioni nell'ambito della relatività generale.

Nelle seguenti sezioni verrà utilizzata come coordinata temporale il tempo conforme  $\tau = \int c dt/a$ , e varrà la notazione  $A' \equiv dA/d\tau$  e  $\dot{A} \equiv dA/dt$ . I simboli  $\delta_{ij}$ ,  $\delta_i^j$  e  $\delta^{ij}$ , indicano la delta di Kronecker.

1.3.1 *Equazioni di base*

Data l'invarianza di gauge della relatività generale si sceglie di lavorare nella gauge conforme (o gauge longitudinale). In questa gauge si impone che i termini non diagonali della metrica perturbata siano nulli, di modo che la metrica si riduce a

$$ds^2 = a^2(\tau)[(1 + 2\Psi)d\tau^2 - (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (1.48)$$

Questa particolare gauge ha il vantaggio di avere una metrica molto semplice, però è valida solo nel caso di perturbazioni scalari.

*Equazioni di Einstein perturbate*

Come già accennato, le proprietà dello spazio-tempo sono determinate dal contenuto di materia-energia al suo interno, tramite le equazioni di campo di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (c = 1) \quad (1.49)$$

dove il tensore energia-impulso soddisfa la legge di conservazione,

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (1.50)$$

Sfruttando la metrica data in (1.48) è facile ottenere le equazioni di Einstein perturbate nello spazio di Fourier per le varie componenti (p.es. [71]):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\left(\Phi' + \frac{a'}{a}\Psi\right) = -4\pi G a^2[\delta T]_0^0, \quad (1.51)$$

$$k^2\left(\Phi' + \frac{a'}{a}\Psi\right) = 4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{P})\theta, \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} \Phi'' + \frac{a'}{a}(\Psi' + 2\Phi') + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Psi + \frac{k^2}{3}(\Phi - \Psi) \\ = -\frac{4}{3}\pi G a^2[\delta T]_i^i, \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$k^2(\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2\bar{P}\Pi. \quad (1.54)$$

dove  $\theta = \partial_i v^i$  è la divergenza della velocità e

$$(\bar{\rho} + \bar{P})\theta \equiv -ik_j[\delta T]_j^0, \quad \bar{P}\Pi \equiv \frac{3}{2}\left[\frac{k_i k_j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right]\left[T_j^i - \frac{1}{3}\delta_j^i T_l^l\right] \quad (1.55)$$

Nel caso di un fluido perfetto  $\bar{P}\Pi = 0$ , e l'eq. (1.54) si riduce a  $\Phi = \Psi$ . Le prime tre equazioni corrispondono rispettivamente all'equazione di continuità (1.10), di Poisson (1.12) e di Eulero (1.11) nello spazio di Fourier nel caso relativistico. Si noti che il numero di equazioni è superiore al numero di variabili; questo rispecchia il fatto che le equazioni di Einstein contengono al loro interno la legge di conservazione del tensore energia-impulso.

#### *Equazioni dei fluidi*

Per un fluido ideale con densità  $\rho$  e pressione  $P$ , il tensore energia-impulso è

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu}P, \quad (1.56)$$

dove  $U^\mu = dx^\mu/ds$  rappresenta la quadri-velocità. In questo caso le perturbazioni del tensore  $T_\nu^\mu$  sono associate alle perturbazioni in  $\rho$ ,  $P$  e  $v^j = aU^j$  tramite:

$$[\delta]_0^0 = \bar{\rho}\delta, \quad [\delta T]_j^0 = -\bar{\rho}(1+w)v^j, \quad [\delta T]_j^i = -[\delta P]\delta_j^i, \quad (1.57)$$

dove  $w \equiv \bar{P}/\bar{\rho}$ . Inserendo quest'ultime relazioni nell'eq. (1.51) e (1.52), e combinando le due si ottiene:

$$k^2\Phi = -4\pi G a^2\bar{\rho}\varepsilon, \quad \text{con} \quad \varepsilon = \delta - \frac{3a'}{a}(1+w)\theta/k^2. \quad (1.58)$$



Al primo ordine, le componenti spaziali e temporali della legge di conservazione (1.50), forniscono rispettivamente le equazioni per le perturbazioni di densità e velocità del fluido:

$$\delta' + (1+w)(\theta - 3\Phi') = \frac{3a'}{a}(w - c_s^2)\delta, \quad (1.59)$$

$$\theta' + \frac{a'}{a}(1-3w)\theta + \frac{w'}{1+w}\theta + \frac{\nabla^2[\delta P]}{\bar{\rho}(1+w)} - k^2\Psi = 0. \quad (1.60)$$

Una volta che l'equazione di stato  $w$  viene definita, le equazioni (1.59) e (1.60) possono essere risolte assieme alle equazioni di Einstein perturbate.

### Equazioni di Boltzmann

La trattazione di fluido fatta in precedenza risulta inadeguata per alcune importanti applicazioni, come l'evoluzione delle perturbazioni di fotoni e neutrini, nonché per descrivere l'interazione tra barioni e fotoni. In questo caso risulta necessario specificare la funzione di distribuzione  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau)$ , che fornisce la densità in numero di particelle nello spazio delle fasi:

$$dN = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) d\mathbf{x} d\mathbf{p}. \quad (1.61)$$

Come in meccanica statistica classica, lo spazio delle fasi è descritto dalle tre posizioni  $x^i$  e dai suoi tre momenti coniugati  $p_i$ . Il tensore energia-impulso corrispondente alla funzione di distribuzione  $f$  è

$$T^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} 2\delta^{(D)}(g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - m^2) p^\mu p^\nu f, \quad (1.62)$$

dove  $\delta^{(D)}(x)$  è la funzione delta di Dirac.

Anche se la funzione di distribuzione è definita da  $x^i$  e dal momento coniugato  $p_i$ , è più conveniente lavorare con altre variabili per il momento e l'energia:

$$q_i = aP_i = a^2(1-\Phi)p^i, \quad e \quad E_q = aE = a^2(1+\Psi)p^0, \quad (1.63)$$

dove il momento  $P_i$ , e l'energia  $E$  sono quelli definiti in un sistema di riferimento locale Minkowskiano. Inoltre risulta utile introdurre i coseni direzionali  $\gamma_i$  in modo da poter esprimere  $q_i$  come

$$q_i = q\gamma_i, \quad \delta^{ij}\gamma_i\gamma_j = 1. \quad (1.64)$$

Per particelle non collisionali la densità nello spazio delle fasi si conserva, ovvero  $df/d\tau = 0$ . Tuttavia, in genere, bisogna introdurre nella legge di conservazione un termine collisionale che tenga conto delle variazioni della funzione di distribuzione causate dalle collisioni:  $df/d\tau = (\partial f/\partial\tau)_c$ . In funzione delle variabili  $(x^i, q, \gamma_i, \tau)$ , questa legge di conservazione assume la forma

$$\frac{\partial f}{\partial\tau} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dq}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{d\gamma_i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial \gamma_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial\tau} \right)_c. \quad (1.65)$$

Questa è l'equazione di Boltzmann (espressa in termini di variabili non canoniche). Dato che, per un fondo omogeneo ed isotropo,  $f$  è indipendente da  $\gamma_i$ , che a sua volta è indipendente da  $\tau$ , l'ultimo termine a sinistra dell'equazione può essere trascurato al primo ordine. Per completare la derivazione non rimane che esprimere  $dx^i/d\tau$  e  $dq/d\tau$  in termini delle nuove variabili, al primo ordine rispetto alle quantità perturbate  $(\Phi, \Psi)$ :

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{p^i}{p^0} = \frac{q}{E_q}(1 + \Phi + \Psi)\gamma^i, \quad \text{con } \gamma^i = \delta^{ij}\gamma_j; \quad (1.66)$$

$$\frac{dq}{d\tau} = q\partial_\tau\Phi - E_q\gamma^i\partial_i\Psi. \quad (1.67)$$

Per studiare le perturbazioni della funzione di distribuzione si usa l'espansione

$$f = f_0 + f_1, \quad (1.68)$$

dove  $f_0$  rappresenta la funzione di distribuzione imperturbata e  $f_1$  la perturbazione. A seconda che si stiano trattando fermioni o barioni,  $f_0$  è data dalla distribuzione di Fermi-Dirac (segno +) o da quella di Bose-Einstein (segno -):

$$f_0(q) = \frac{1}{\exp(q/k_B T_0) \pm 1}, \quad (1.69)$$

dove  $T_0 = aT$  è la temperatura delle particelle al tempo presente. Al primo ordine nelle quantità perturbate l'equazione di Boltzmann (1.65) fornisce la seguente equazione per  $f_1$  nello spazio di Fourier:

$$f_1' + ik\mu\frac{q}{E_q}f_1 - \frac{q}{4}\frac{\partial f_0}{\partial q}\Psi_q = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau}\right)_c, \quad (1.70)$$

con  $\Psi_q \equiv -4[\Phi' - ik(E_q/q)\mu\Psi]$ , e  $\mu \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/|\mathbf{q}||\mathbf{k}|$ . Moltiplicando ambo i lati dell'eq (1.70) per  $\exp(ik\mu\tau q/E_q)$ , ed integrando da un dato tempo iniziale  $\tau_i$  ad un generico  $\tau > \tau_i$  si trova

$$f_1(\chi) = f_1(\chi_i)e^{-ik\mu(\chi-\chi_i)} + \frac{E_q}{q} \int_{\chi_i}^{\chi} \left[ \frac{q}{4} \frac{\partial f_0}{\partial q} \Psi_q + \left( \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \right)_c \right]_{\chi'} e^{-ik\mu(\chi-\chi')} d\chi', \quad (1.71)$$

dove  $\chi = q\tau/E_q$ . È chiaro quindi, da questa equazione, che le perturbazioni nella funzione di distribuzione di una determinata specie possono venir prodotte sia da interazioni gravitazionali che collisionali. Poiché  $\Psi_q$  dipende da  $f_1$  tramite le equazioni di Einstein, e  $(\partial f_1/\partial \tau)_c$  può dipendere da  $f_1$ , l'eq. (1.71) è un'equazione integrale per  $f_1$  che può essere risolta iterativamente una volta specificati  $q$ ,  $k$  e  $\mu$ .

### 1.3.2 Soluzioni particolari

Si consideri ora un modello puro di  $\Lambda$ CDM, per cui l'Universo è composto da fotoni, barioni, materia oscura fredda e  $\Lambda \neq 0$ . Strettamente parlando, l'approssimazione di fluido perfetto non può essere applicata in questa situazione poiché, da una parte i fotoni divengono non collisionali dopo il disaccoppiamento, dall'altra la CDM non è collisionale in nessun epoca. Tuttavia è possibile utilizzare l'eq. (1.56) per applicazioni pratiche.

Innanzitutto, dopo il suo tempo di disaccoppiamento, la materia oscura fredda è sempre non relativistica e non collisionale. Fintanto che il moto medio delle particelle di CDM può essere descritto come un flusso, il tensore energia-impulso è formalmente identico a quello per un fluido perfetto con densità  $\rho_m$  e pressione nulla. In secondo luogo, allo scopo di fornire una descrizione semplificata della formazione di strutture su larga scala, è lecito considerare, prima della ricombinazione, le componenti di fotoni e barioni come un singolo fluido fortemente accoppiato. In questo modo è nuovamente possibile adottare l'eq. (1.56), con l'equazione di stato propria della radiazione:  $P_r = \rho_r/3$  (ovvero si assume che la densità barionica sia trascurabile rispetto a quella dei fotoni, anche se risulta un'approssimazione grossolana per tempi prossimi all'equivalenza ed alla ricombinazione). Dopo la ricombinazione i fotoni divengono irrilevanti per la formazione di strutture, ed è possibile ignorare questa componente; i barioni invece si comportano come materia non relativistica non collisionale (la scala di Jeans,  $\lambda_J$ , crolla di diversi ordini di grandezza dopo la ricombinazione; vedi §1.2.2), la cui densità, per semplicità, può essere trascurata rispetto a quella della CDM.

In definitiva, approssimando la quadri-velocità con  $U^\mu = dx^\mu/[a(1 + \Psi)d\tau]$ , il tensore energia-impulso perturbato da utilizzare risulta il seguente:

$$[\delta T]_0^0 = \bar{\rho}_r \delta_r + \bar{\rho}_m \delta_m, \quad (1.72)$$

$$\partial^i [\delta T]_i^0 = (\bar{\rho}_r + \bar{P}_r) \theta_r + \bar{\rho}_m \theta_m = \frac{4}{3} \bar{\rho}_r \theta_r + \bar{\rho}_m \theta_m, \quad (1.73)$$

$$[\delta]_i^i = -\delta P_r = -\frac{1}{3} \bar{\rho}_r \delta_r. \quad (1.74)$$

#### *Era dominata dalla radiazione*

Nell'approssimazione sopra descritta, il fluido di barioni-fotoni oscilla all'interno della lunghezza di Jeans, mentre la CDM evolve in modo pressoché indipendente, fino tanto che, in prossimità dell'equivalenza, i suoi effetti gravitazionali incominciano ad influenzare lo sviluppo delle fluttuazioni barioniche.

Lavorando al primo ordine dell'espansione del parametro  $\bar{\rho}_{dm}/\bar{\rho}_\gamma$ , è possibile derivare un'equazione analitica per l'evoluzione di  $\delta_\gamma$  e  $\delta_{dm}$ . Si ricordi che per un fluido ideale il tensore di *stress*  $\bar{P}\Pi$  è nullo, quindi

le due fluttuazioni della metrica sono uguali,  $\Phi = \Psi$  (vedi eq. (1.54)). Sotto queste assunzioni le equazioni dei fluidi (1.59) e l'eq. (1.60), che descrivono le perturbazioni sono:

$$\delta'_{\text{dm}} + \theta_{\text{dm}} = 3\Phi', \quad \theta'_{\text{dm}} + \frac{a'}{a}\theta_{\text{dm}} = k^2\Phi; \quad (1.75)$$

$$\delta'_\gamma + \frac{4}{3}\theta_\gamma = 4\Psi', \quad \theta'_\gamma - \frac{k^2}{4}\delta_\gamma = k^2\Phi. \quad (1.76)$$

Le fluttuazioni della metrica sono collegate a  $\delta_{\text{dm}}$ ,  $\delta_\gamma$ ,  $\theta_{\text{dm}}$  e  $\theta_\gamma$  attraverso le equazioni di Einstein perturbate (1.51)-(1.53)

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\left(\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi\right) = -4\pi G a^2(\bar{\rho}_{\text{dm}}\delta_{\text{dm}} + \bar{\rho}_\gamma\delta_\gamma), \quad (1.77)$$

$$k^2\Phi = -4\pi G a^2(\bar{\rho}_{\text{dm}}\varepsilon_{\text{dm}} + \bar{\rho}_\gamma\varepsilon_\gamma), \quad (1.78)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = \frac{4\pi G}{3}a^2\bar{\rho}_\gamma\delta_\gamma, \quad (1.79)$$

dove  $\varepsilon_{\text{dm}}$  e  $\varepsilon_\gamma$  sono definite in accordo con l'eq. (1.58). Dato che le perturbazioni della metrica sono descritte da una singola funzione  $\Phi$ , solo una delle ultime tre equazioni è necessaria per risolvere l'equazione dei fluidi. Risolvendo il sistema, e considerando perturbazioni isoentropiche, si ottengono le seguenti relazioni per i contrasti di densità:

$$\delta_\gamma = -6A(k) \left[ \frac{2 \sin \omega\tau - \omega\tau \cos \omega\tau}{\omega\tau} - 2 \frac{\sin \omega\tau - \omega\tau \cos \omega\tau}{(\omega\tau)^3} \right], \quad (1.80)$$

$$\delta_{\text{dm}} = 9A(k) \left[ -\frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau} + \frac{\sin \omega\tau - \omega\tau \cos \omega\tau}{(\omega\tau)^3} + \frac{1}{2} + \int_0^{\omega\tau} \frac{\cos x - 1}{x} dx \right], \quad (1.81)$$

dove  $A(k) = \Phi(\mathbf{k}, \tau \rightarrow 0)$  è una costante di integrazione, e  $\omega = k/\sqrt{3}$ . Mentre per il potenziale  $\Phi$  la soluzione legata al modo crescente è:

$$\Phi(\mathbf{k}, \tau) = \frac{3}{(\omega\tau)^3} (\sin \omega\tau - \omega\tau \cos \omega\tau) A(k). \quad (1.82)$$

In base alle soluzioni sopra riportate, al di fuori dell'orizzonte acustico, tutte le grandezze appaiono congelate nella gauge conforme, con

$$\delta_{\text{dm}} = \frac{3}{4}\delta_r = -\frac{3}{2}\Phi \quad [\text{RD}, \omega\tau = k\tau/\sqrt{3} \ll 1] \quad (1.83)$$

dove la prima relazione si deve al fatto che, per perturbazioni isoentropiche la perturbazione di entropia  $\delta_S \equiv \delta n_\gamma/\bar{n}_\gamma - \delta n_{\text{dm}}/\bar{n}_{\text{dm}} = 3/4\delta_\gamma - \delta_{\text{dm}} = 0$ .

All'interno dell'orizzonte acustico, l'evoluzione delle perturbazioni di materia e radiazione è radicalmente differente per le due specie. La componente autogravitante di radiazione oscilla su scale inferiori

della lunghezza di Jeans, e l'eq. (1.80) rappresenta l'approssimazione al primo ordine dell'oscillazioni acustiche, osservate nello spettro dell'anisotropie del fondo cosmico a microonde (CMB). Al contrario, la materia oscura fredda, che possiede una lunghezza di Jeans notevolmente inferiore, non oscilla. Il risultato netto dell'azione della forza di gravità è un aumento del contrasto di densità  $\delta_{\text{dm}}$ , anche se la crescita delle perturbazioni viene smorzata dalle oscillazioni acustiche. In media, la crescita delle perturbazioni di CDM è proporzionale al logaritmo del tempo conforme:

$$\delta_{\text{dm}} \simeq 9A(k)[1/2 + \mathcal{C} + \ln(\omega\tau)], \quad [\text{RD}, \omega\tau = k\tau/\sqrt{3} \gg 1] \quad (1.84)$$

dove  $\mathcal{C} \simeq 0.5772$  è la costante di Eulero.

#### *Era dominata dalla materia*

Per  $\tau \gg \tau_{\text{eq}}$ , quando  $a \propto \tau^2$ , la velocità del suono è praticamente nulla, e la soluzione per le perturbazioni isoentropiche della metrica assume la semplice forma

$$\Phi = \tilde{\mathcal{C}}(k) + \tau^{-5}\tilde{\mathcal{D}}(k), \quad (1.85)$$

dove  $\tilde{\mathcal{C}}(k)$  e  $\tilde{\mathcal{D}}(k)$  sono legati rispettivamente al modo crescente e a quello decrescente. Inserendo questa nell'eq. (1.77) si ottiene per il contrasto di densità di CDM

$$\delta_{\text{dm}} = - \left(4 + \frac{k^2\tau^2}{3}\right) \tilde{\mathcal{C}}(k) + \left(\frac{k^2\tau^2}{3} - 6\right) \tau^{-5}\tilde{\mathcal{D}}(k). \quad (1.86)$$

Accordare in modo preciso le diverse soluzioni (1.83), (1.84) per l'epoca RD, con(1.86), valida nell'epoca MD, non risulta banale; tuttavia, al fine di studiare il comportamento dello spettro di potenza (vedi §1.5), risulta sufficiente la formula approssimativa

$$\delta_{\text{dm}}(k, \tau) = \left(4 + \frac{k^2\tau^2}{3}\right) \frac{\delta_{\text{dm}}(k, \tau_{\text{eq}})}{4 + k^2\tau_{\text{eq}}^2/3}, \quad \text{con } \tau \in \text{MD era} \quad (1.87)$$

dove  $\delta_{\text{dm}}(k, \tau_{\text{eq}})$  corrisponde all'eq. (1.81) valutata a  $\tau = \tau_{\text{eq}}$ . Nel limite  $k^2\tau^2 \gg 1$ , ovvero per modi interni al raggio di Hubble, la formula (1.87) si riduce a

$$\delta_{\text{dm}}(k, \tau) = \frac{k^2}{3(\alpha H)^2} \cdot \frac{\delta_{\text{dm}}(k, \tau_{\text{eq}})}{1 + k^2\tau_{\text{eq}}^2/12}. \quad (1.88)$$

#### *Era dominata dall'energia oscura*

Dopo l'epoca MD, la componente di energia oscura diviene il contributo dominante alla densità di energia dell'Universo. Nel caso che l'energia oscura corrisponda alla costante cosmologica ( $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$ ), l'eq. (1.79) assume la forma

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + (8\pi G a^2 \bar{\rho}_\Lambda)\Phi = 0, \quad (1.89)$$

ed il potenziale decade proporzionalmente al fattore di smorzamento indipendente dalla scala  $g(\tau) = \Phi(\tau)/\Phi(\tau_M)$ , dove  $\tau_M$  può essere un qualsiasi tempo di riferimento durante l'era dominata dalla materia. Considerando modi interni al raggio di Hubble ( $k \gg aH$ ), l'eq. (1.77) si riduce all'equazione di Poisson (1.12) nello spazio delle fasi ( $\Phi = \phi$ ); risolvendo questa rispetto al contrasto di densità si ottiene

$$\delta_{dm} = -\frac{k^2 \phi}{4\pi G a^2 \bar{\rho}_m} = -\frac{2k^2 \phi}{3\Omega_m (aH)^2}. \quad (1.90)$$

Come si può vedere  $\delta_{dm}$  è proporzionale a  $a\phi$ , il che prova che un decadimento del potenziale gravitazionale rallenta la crescita delle fluttuazioni di materia, in funzione del fattore di scala. Combinando le diverse soluzioni per  $\delta_{dm}$ , valide su scale inferiori al raggio di Hubble, è possibile scrivere per  $\tau$  nell'era dominata da  $\Lambda$

$$\delta_{dm}(k, \tau) = \frac{3g(\tau)k^2 A(K)}{\Omega_m(\tau)[a(\tau)H(\tau)]^2} \times \frac{[-(\sin kx)/(kx) + (\sin kx - kx \cos kx)/(kx)^3 + 1/2 + \int_0^{kx} \frac{\cos x' - 1}{x'} dx']}{1 + (kx)^2/12}, \quad (1.91)$$

dove  $x \equiv \tau_{eq}/\sqrt{3}$ . Nel limite di  $k \rightarrow \infty$  il secondo termine dell'equazione va come  $\sim k^{-2}$ , e la soluzione (1.91) si riduce nuovamente a quella per un fluido non collisionale nel caso Newtoniano.

#### 1.4 FUNZIONE DI TRASFERIMENTO LINEARE

In genere, i dati osservativi permettono di dedurre la distribuzione di materia solo per epoche recenti. Un modo conveniente per descrivere la relazione che intercorre tra le condizioni iniziali e le perturbazioni di densità osservate nell'Universo post-ricombinazione è la funzione di trasferimento lineare  $T(k)$ ; quest'ultima collega l'ampiezza dei modi di Fourier al disotto dell'orizzonte, nell'era successiva alla ricombinazione, alle condizioni iniziali. La funzione di trasferimento può essere definita come

$$\Phi(k, t) = \mathcal{K} \beta(k) T(k, t_m) \frac{D(t) a(t_m)}{a(t) D(t_m)}, \quad (1.92)$$

dove  $D(t)$  è il fattore di crescita lineare nell'era post-ricombinazione (vedi §1.2.4), e  $t_m$  è un tempo per cui l'Universo è già dominato dalla materia ma la costante cosmologica e la curvatura sono ancora trascurabili, ovvero l'Universo può essere approssimato ad un modello EdS. La funzione  $\beta(k)$  specifica le condizioni iniziali, e corrisponde ad  $A(K)$  in caso di perturbazioni isoentropiche. La costante  $\mathcal{K}$  viene inserita nella definizione per normalizzare la funzione di trasferimento. Per perturbazioni isoentropiche con  $\lambda \lesssim ct_m$ , l'ampiezza delle perturbazioni della metrica è  $\Phi = (9/10)A(k)$  all'attraversamento dell'orizzonte, e

rimane invariata nella fase EdS; si pone quindi  $\mathcal{K} = 9/10$  nel caso di perturbazioni iniziali isoentropiche, in modo che  $T(k)$  sia normalizzato per modi associati a grandi lunghezze d'onda.

Si noti infine che in un Universo di Einstein-de Sitter  $D(t) = a(t)$ , da cui il termine  $a(t_m)/D(t_m) = 1$  nell'eq. (1.92), e la funzione di trasferimento risulta quindi indipendente da  $t_m$ . Le perturbazioni di densità post-ricombinazione sono legate alla metrica dall'equazione di Poisson:

$$\begin{aligned}\delta(k, t) &= -\frac{k^2 \Phi(k, t)}{4\pi G a^2 \bar{\rho}} \\ &= -\frac{2}{3} \frac{\mathcal{K}}{H_0^2 \Omega_{m,0}} k^2 \beta(k) T(k) D(t).\end{aligned}\quad (1.93)$$

Lo spettro di potenza delle perturbazioni di densità risulta quindi essere

$$P(k, t) = \langle |\delta(k, t)|^2 \rangle = P_i(k) T^2(k) D^2(k), \quad (1.94)$$

dove

$$P_i(k) \equiv \frac{4}{9} \frac{\mathcal{K}^2}{H_0^4 \Omega_{m,0}^2} k^4 \langle |\beta(k)|^2 \rangle \quad (1.95)$$

può essere considerato come lo spettro di potenza iniziale delle perturbazioni di densità. Quindi, nota la funzione di trasferimento, è possibile calcolare lo spettro di potenza a partire dalle condizioni iniziali.

La funzione di trasferimento lineare può essere calcolata usando la definizione

$$T(k) = \frac{\Phi(k, t_m)}{\mathcal{K} \beta(k)} \quad (1.96)$$

Essenzialmente ci sono due tipi di effetti che possono influenzare  $T(k)$  durante l'evoluzione lineare. Il primo è provocato dai processi di smorzamento, come la dissipazione di Silk per i barioni, o il *free-streaming* per la materia oscura, che riducono la potenza delle perturbazioni su piccole scale. Il secondo è legato al fatto che le perturbazioni al disotto dell'orizzonte evolvono in modo differente prima e dopo l'equivalenza.

Prendendo in considerazione un Universo dominato da particelle massive debolmente interagenti (WIMPs), come ad esempio il modello  $\Lambda$ CDM, è possibile trascurare l'effetto di *free-streaming*, per lo meno su scale che influenzano la formazione di galassie. Si definisce per comodità il numero d'onda caratteristico

$$k_{\text{eq}} \equiv \frac{2\pi}{\tau_{\text{eq}}} = \frac{2\pi a_{\text{eq}}}{c t_{\text{eq}}} \propto \Omega_{m,0} h^2; \quad (1.97)$$

La lunghezza di scala corrispondente a  $k_{\text{eq}}$  caratterizza le dimensioni dell'orizzonte al momento dell'equivalenza tra radiazione e materia.

In base ai risultati ottenuti nelle sezioni precedenti l'evoluzione lineare di  $\Phi$  è caratterizzata dalle seguenti proprietà: (i) modi con  $k \ll k_{\text{eq}}$  che entrano nell'orizzonte nell'era MD hanno ampiezza costante,  $\Phi \sim (9/10)A(k)$ , per  $t < t_m$ ; (ii) perturbazioni di densità con  $k \gg k_{\text{eq}}$  crescono in modo logaritmico con il tempo durante l'era dominata dalla radiazione (vedi eq. (1.84)), e poiché le perturbazioni della metrica rimangono costanti nell'intervallo di tempo  $t_{\text{eq}} < t < t_m$ , si ottiene che

$$\Phi(k, t) \sim \Phi(k, t_{\text{eq}}) \sim (27/2)H_0^2\Omega_{m,0}k^{-2}A(k)[\ln(k\tau_{\text{eq}}) - 0.47]/a(t_{\text{eq}}); \quad (1.98)$$

(iii) per  $t > t_m$  le perturbazioni di densità al disotto dell'orizzonte crescono come  $\delta_{\text{dm}} \propto D(t)$ , e quindi  $\Phi \propto D(t)/a(t)$ . Si noti che in questo caso la crescita è indipendente da  $k$ , e quindi non influenza la funzione di trasferimento. Riassumendo questi tre andamenti, la funzione di trasferimento post-ricombinazione, per perturbazioni isoentropiche, ha un andamento del tipo

$$T(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } (k/k_{\text{eq}}) \ll 1 \\ C_A (k/k_{\text{eq}})^{-2} \ln(k/k_{\text{eq}}) & \text{per } (k/k_{\text{eq}}) \gg 1, \end{cases} \quad (1.99)$$

dove  $C_A$  è una costante. Dunque la transizione tra la fase dominata dalla radiazione e quella dominata dalla materia imprime una scala caratteristica nella funzione di trasferimento. Soluzioni dettagliate di  $T(k)$  per modelli adiabatici di CDM sono state ricavate da molti autori (p.es. [79, 14]). Nel limite  $\Omega_{b,0} \ll \Omega_{m,0}$ , la funzione di trasferimento lineare è ben approssimata da

$$T(k) = \frac{\ln(1 + 2.34q)}{2.34q} [1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71q)^4]^{-1/4}, \quad (1.100)$$

dove

$$q \equiv \frac{1}{\Gamma} \left( \frac{k}{h\text{Mpc}} \right)^{-1} \quad \text{e} \quad \Gamma = \Omega_{m,0}h \quad (1.101)$$

[14]. Il parametro di forma  $\Gamma$  caratterizza la scala dell'orizzonte a  $t_{\text{eq}}$ . Se la frazione di materia barionica non è trascurabile, la funzione di trasferimento sviluppa delle oscillazioni, a causa delle fluttuazioni acustiche barioniche; in questo caso una formula più appropriata della funzione di trasferimento risulta quella data da Eisenstein e Hu in [27]. Le oscillazioni acustiche barioniche (BAO) presenti nella funzione di trasferimento inducono oscillazioni nello spettro di potenza della materia, con una scala dell'ordine di quella dell'orizzonte acustico alla ricombinazione ( $\approx 3/\Omega_{m,0}h^2$ ).



## 1.5 SPETTRO LINEARE DELLE PERTURBAZIONI

Lo spettro di potenza  $P(k)$  è l'unica funzione necessaria per specificare completamente un campo Gaussiano, come quello prodotto dalle fluttuazioni quantistiche durante l'inflazione. Come si è visto in precedenza, poiché i differenti modi di Fourier evolvono indipendentemente in regime lineare, lo spettro di potenza ad un dato  $t$  può essere calcolato a partire dallo spettro primordiale, tramite la funzione di trasferimento lineare.

Lo spettro di potenza primordiale, in accordo con le previsioni dei modelli inflazionari, viene normalmente parametrizzato con una legge di potenza,

$$P_i(k) \propto Ak^n, \quad (1.102)$$

con  $n$  indice spettrale primordiale.

## 1.5.1 Ampiezza dello spettro di potenza

In mancanza di una teoria definitiva per l'origine delle perturbazioni cosmologiche, l'ampiezza dello spettro di potenza può essere fissata solamente dal confronto con i dati osservativi della struttura a grande scale (LSS) dell'Universo, o delle anisotropie del CMB. Dato uno spettro di potenza con una determinata forma, l'ampiezza di questo è determinata una volta noto il valore di  $P(k)$  per ogni  $k$ , o il valore di una statistica che dipende solo dal  $P(k)$ . Per ragioni storiche, un modo comunemente usato per normalizzare lo spettro di potenza coinvolge la varianza della distribuzione di galassie, campionata all'interno di una sfera di raggio  $R$ . La varianza del campo di densità è collegata allo spettro di potenza tramite

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int P(k) \tilde{W}_R^2(k) k^2 dk, \quad (1.103)$$

dove

$$\tilde{W}_R(k) = \frac{3[\sin(kR) - kR \cos(kR)]}{(kR)^3} \quad (1.104)$$

è la trasformata di Fourier di un filtro *top-hat* sferico

$$W_R(r) = \begin{cases} 3/(4\pi R^3) & \text{per } r \leq R \\ 0 & \text{per } r \geq R. \end{cases} \quad (1.105)$$

Il valore di  $\sigma^2(R)$  ottenuto dalla distribuzione di galassie è circa uno per  $R = 8h^{-1}\text{Mpc}$  (p.es. [25]). Quindi, in linea di principio, è possibile normalizzare lo spettro di potenza teorico richiedendo che  $\sigma(R) = 1$  per  $R = 8h^{-1}\text{Mpc}$ . Questo approccio ha tuttavia alcuni problemi. Prima di tutto, poiché  $\sigma(R) \sim 1$ , si è già al di fuori del regime lineare

per cui  $\delta \ll 1$ . In secondo luogo, si sta indirettamente assumendo che le galassie siano un buon tracciante per la distribuzione di materia. Ciò non è necessariamente vero. Difatti le galassie, ad esempio, si formano preferenzialmente in regioni ad alta densità. In genere si rilassa l'assunzione ponendo che le fluttuazioni nella distribuzione delle galassie siano proporzionali a quelle in massa, ovvero

$$\delta_{\text{gal}} = b\delta_{\text{m}}, \quad (1.106)$$

dove il valore del parametro di *bias*  $b$  dipende da come le galassie si sono formate nel campo di densità della materia.

Ad ogni modo, convenzionalmente, l'ampiezza dello spettro di potenza viene parametrizzata dal valore

$$\sigma_8 \equiv \sigma(R = 8h^{-1}\text{Mpc}). \quad (1.107)$$

È importante sottolineare che il valore di  $\sigma_8$  viene valutato a partire dallo spettro di potenza primordiale evoluto fino ai giorni nostri tramite la teoria lineare. Dato che oggi giorno le perturbazioni su scale di  $\sim 8h^{-1}\text{Mpc}$  si trovano ben al di fuori del regime lineare,  $\sigma_8$  non corrisponde necessariamente alla varianza reale della distribuzione di massa.

### 1.5.2 Dipendenza dai parametri cosmologici

Per descrivere un modello di  $\Lambda\text{CDM}$  piatto senza neutrini sono sufficienti sei parametri: la frazione di costante cosmologica  $\Omega_\Lambda$ , la densità totale di materia non relativistica  $\omega_{\text{m}} = \Omega_{\text{m}}h^2$ , la densità di barioni  $\omega_{\text{b}} = \Omega_{\text{b}}h^2$ , l'ampiezza  $A$  e l'indice spettrale  $n$  dello spettro di potenza primordiale, la profondità ottica alla reionizzazione  $\tau$ . Questi parametri, tralasciando l'ultimo elencato che ha effetti soltanto sullo spettro del CMB, controllano vari fenomeni fisici che modificano la forma dello spettro di potenza della materia:

*Epoca dell'equivalenza tra radiazione e materia.*

Fissata la densità di radiazione odierna dalla temperatura del CMB ( $\rho_{\gamma,0} = 4\sigma_{\text{SB}}T_{\text{CMB}}^4/c^3$ ), l'epoca dell'equivalenza tra  $\rho_{\text{m}}$  e  $\rho_{\gamma}$  è fissata solamente da  $\omega_{\text{m}}$ . Poiché su scale al disotto dell'orizzonte  $\delta_{\text{m}}$  cresce più efficacemente durante l'era MD che durante l'era RD, è chiaro che una riduzione di  $\omega_{\text{m}}$  (equivalenza ritardata) comporta una soppressione dello spettro di potenza su piccole scale rispetto a quelle grandi. Inoltre la normalizzazione incrementa, a causa del fattore  $\omega_{\text{m}}^{-2}$  nell'eq. (1.95). Quindi, l'effetto netto di posporre l'equivalenza è quello di amplificare il  $P(k)$  solo per piccoli  $k$ .

*Epoca dell'equivalenza tra materia e  $\Lambda$ .*

Se la costante cosmologica viene incrementata, l'equivalenza tra materia e  $\Lambda$  ha luogo prima. Come si è visto in §1.3.2 nell'era dominata

dalla costante cosmologica  $\delta_m$  cresce più lentamente. Di conseguenza la normalizzazione dello spettro di potenza è leggermente soppressa da un lungo periodo dominato da  $\Lambda$ .

*Scala fisica dell'orizzonte acustico all'equivalenza.*

Come è chiaro da §1.4 l'orizzonte acustico al tempo dell'equivalenza imprime una scala caratteristica sullo spettro di potenza della materia. Questa scala dipende da  $h$ ,  $\Omega_\Lambda$ , e dal tempo dell'equivalenza, quindi, nella base di parametri adottata, una variazione di  $\omega_m$  o  $\Omega_\Lambda$  sposta il picco dello spettro di potenza.

*Competizione tra gravità e pressione nel fluido fotoni-barioni.*

Nel limite  $\omega_b/\omega_m \rightarrow 1$ , il  $P(k)$  perde potenza su piccole scale, poiché non beneficia della crescita delle perturbazioni di CDM precedenti all'equivalenza. In questo limite, l'oscillazioni di  $\delta_b$  al momento della ricombinazione sopravvivono fino ad oggi, rimanendo ben impresse sullo spettro di potenza. Nel limite opposto  $\omega_b/\omega_m \rightarrow 0$ , valido per un modello di  $\Lambda$ CDM, l'ampiezza dello spettro di potenza su piccole scale è maggiore, e l'oscillazioni sono soppresse.

*Ampiezza ed indice spettrale dello spettro di potenza primordiale.*

Questi due parametri, come si evince dall'eq. (1.102), fissano rispettivamente la normalizzazione globale dello spettro ed il bilancio tra ampiezza su larga e piccola scala. Questi due parametri risultano particolarmente efficaci per porre vincoli sui diversi modelli inflazionari.

In figura 3 sono illustrati gli effetti che si hanno sullo spettro di potenza della materia al variare dei parametri coinvolti nei primi quattro punti sopra esposti. Nella tabella 1 sono riepilogati i valori dei parametri per un modello semplice di  $\Lambda$ CDM ottenuti combinando i dati di WMAP-7year con le misurazioni di distanza delle BAO nella distribuzione di galassie e con la misura della costante di Hubble  $H_0$  (vedi [48], e referenze all'interno). Il parametro  $\Delta_\Phi^2(k_0) = k_0^3 P_\Phi(k_0)/2\pi^2$  rappresenta lo spettro di potenza adimensionale primordiale calcolato in  $k_0 = 0.002 \text{Mpc}^{-1}$ .

## 1.6 FUNZIONE DI MASSA

Al fine di collegare la teoria precedentemente esposta con le osservazioni è necessario sviluppare una descrizione statistica delle quantità fin ora trattate. Un primo passo è quello di definire la funzione di massa  $n(M, t)$  al tempo  $t$  che fornisce la densità in numero di aloni virializzati nell'intervallo di massa  $[M, M + dM]$ , per quel tempo. Difatti l'evoluzione di  $n(M, t)$  è collegata direttamente al fattore di crescita delle perturbazioni, che come si è visto in 1.2.4 dipende fortemente dai

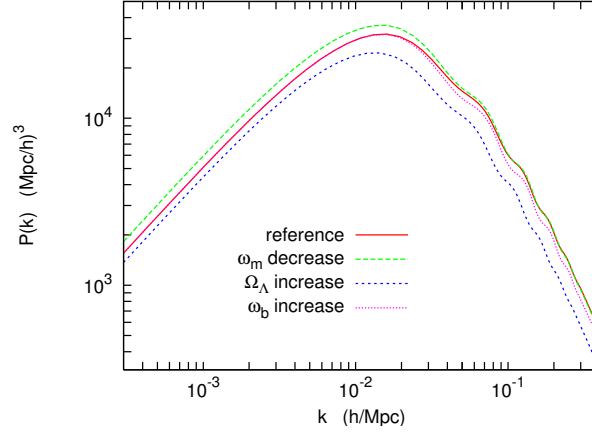


Figura 3: (*Linea continua rossa*) Spettro di potenza della materia valutato oggi per un modello  $\Lambda$ CDM con  $\omega_m = 0.13$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.74$ ,  $\omega_b = 0.022$ ,  $n = 0.95$ ,  $\tau = 0.08$ . (*Linee tratteggiate e punteggiate*) Stesso spettro di potenza per tre modelli in cui viene variato uno solo dei seguenti parametri:  $\omega_m = 0.12$  (*verde*),  $\Omega_\Lambda = 0.80$  (*blu*),  $\omega_b = 0.026$  (*magenta*). Le variazioni nello spettro di potenza illustrano gli effetti esposti nei primi quattro punti di §1.5.2. [52]

Tabella 1: Riepilogo dei parametri cosmologici per un modello  $\Lambda$ CDM

Classe	Parametri	WMAP-7yrs+BAO+ $H_0$
Di base	$100\Omega_b h^2$	2.253
	$\Omega_{\text{cdm}} h^2$	0.1122
	$\Omega_\Lambda$	0.728
	$n$	0.967
	$\tau$	0.085
	$\Delta_\Phi^2(k_0)$	$2.42 \times 10^{-9}$
Derivati	$\sigma_8$	0.810
	$H_0$	70.4 km/s/Mpc
	$\Omega_b$	0.0455
	$\Omega_{\text{cdm}}$	0.226
	$\Omega_m h^2$	0.1347

parametri cosmologici. Prima di poter derivare questa funzione è però necessario introdurre il modello di collasso sferico; nonostante questo modello sia basato su assunzioni abbastanza forti risulta utile per delineare il processo di formazione degli aloni virializzati di materia oscura.

### 1.6.1 Collasso sferico

Una perturbazione sferica, a densità costante, rappresenta l'unico caso in cui l'evoluzione non lineare può essere calcolata con esattezza. Questo approccio si basa nel trattare la perturbazione come un Universo chiuso a se stante, imponendo che la velocità ai bordi della perturbazione sia nulla al tempo iniziale  $t_i$ . Quest'ultima assunzione, nel caso di un Universo di EdS ( $\Omega_m = 1$ ), fornisce la relazione  $D(t) = (3/5)\delta(t_i)$ , tra il modo crescente lineare della perturbazione e la sovradensità iniziale. Perché la perturbazione possa collassare è necessario che il suo parametro di densità iniziale  $\Omega_p(t_i) = \Omega(t_i)(1 + \delta_i)$  sia maggiore di uno. Se questa condizione è soddisfatta si può derivare la densità all'interno della perturbazione al tempo  $t_m$  per cui si ha la massima espansione

$$\rho_p(t_m) = \rho_c(t_i)\Omega_p(t_i) \left( \frac{\Omega_p(t_i) - 1}{\Omega_p(t_i)} \right)^3. \quad (1.108)$$

Il tempo  $t_m$  si ottiene risolvendo l'equazione di Friedmann per un Universo chiuso:

$$t_m = \left( \frac{3\pi}{32G\rho_p(t_m)} \right)^{1/2}. \quad (1.109)$$

Alla stessa epoca  $t_m$ , la densità del fondo cosmico è  $\rho(t_m) = 1/(6\pi G t_m^2)$ . Quindi il valore esatto del contrasto di densità interno alla perturbazione prima del collasso è

$$\delta_+(t_m) = \frac{\rho_p(t_m) - \rho(t_m)}{\rho(t_m)} = \left( \frac{3\pi}{4} \right)^2 - 1 \simeq 4.6. \quad (1.110)$$

D'altro canto, estrapolando  $\delta_+$  con la teoria lineare fino a  $t_m$ , si otterrebbe

$$\delta_+(t_m) = \delta_+(t_i) \left( \frac{t_m}{t_i} \right)^{2/3} = \frac{3}{5} \left( \frac{3\pi}{4} \right)^{2/3} \simeq 1.07. \quad (1.111)$$

Da questo si vede che l'estrapolazione tramite teoria lineare sottostima significativamente il contrasto di densità prima del collasso.

Dopo aver raggiunto la massima espansione la perturbazione evolve distaccandosi dal flusso di Hubble, per poi collassare fino a raggiungere l'equilibrio viriale, supportato dalla dispersione di velocità delle particelle. In base al teorema del viriale, il tempo di virializzazione  $t_{\text{vir}}$  viene raggiunto quando viene soddisfatta la condizione  $E = K + U = -K$ ,

dove  $E$ ,  $K$  e  $U$  rappresentano rispettivamente l'energia totale, cinetica e potenziale. Sfruttando la conservazione dell'energia si ottiene inoltre  $R_m = 2R_{\text{vir}}$ . In definitiva la sovradensità a  $t_{\text{vir}}$  risulta

$$\frac{\rho_p(t_{\text{vir}})}{\rho(t_{\text{vir}})} = \left(\frac{t_{\text{vir}}}{t_m}\right)^2 \left(\frac{R_m}{R_{\text{vir}}}\right)^3 \frac{\rho_p(t_m)}{\rho(t_m)} \simeq 178, \quad (1.112)$$

dove si è tenuto conto sia della compressione dovuta al collasso, sia alla diluizione della densità del fondo cosmico dovuta all'espansione dell'Universo da  $t_m$  a  $t_{\text{vir}}$ . L'estrapolazione del contrasto di densità fino a  $t_{\text{vir}}$  con la teoria lineare fornisce

$$\delta_+(t_{\text{vir}}) = \left(\frac{t_{\text{vir}}}{t_m}\right)^{2/3} \delta_+(t_m) \simeq 1.69. \quad (1.113)$$

Quest'ultima equazione fornisce un valore fondamentale per descrivere la funzione di massa degli aloni virializzati. Infatti fornisce il contrasto di densità che una perturbazione nel campo di densità iniziale deve avere per evolvere in una struttura collassata virializzata. I risultati precedenti, validi per un Universo EdS, possono essere generalizzati a modelli cosmologici più generici. Per  $\Omega_m < 1$  l'incremento del tasso di espansione dell'Universo provoca una diluizione più rapida della densità cosmica tra  $t_m$  e  $t_{\text{vir}}$  e, conseguentemente, un valore più grande di  $\delta_+(t_{\text{vir}})$ .

### 1.6.2 Formalismo di Press-Schechter

Si consideri il campo di densità  $\delta(\mathbf{x}, t)$ , che in regime lineare evolve come  $\delta(\mathbf{x}, t) = \delta_0(\mathbf{x})D(t)$ , dove  $\delta_0(\mathbf{x})$  è la sovradensità estrapolata linearmente fino ai giorni nostri, e  $D(t)$  è il tasso di crescita lineare normalizzato ad uno a  $t_0$ . In accordo con il modello di collasso sferico descritto in 1.6.1, regioni per cui  $\delta(\mathbf{x}, t) > \delta_c \simeq 1.69$ , o equivalentemente con  $\delta_0(\mathbf{x}) > \delta_c/D(t) \equiv \delta_c(t)$ , collasseranno, andando a formare oggetti virializzati. Al fine di assegnare una massa a queste regioni collassate si consideri il campo di densità smussato

$$\delta_s(\mathbf{x}; R) \equiv \int \delta_0(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} + \mathbf{x}'; R) d\mathbf{x}, \quad (1.114)$$

dove  $W(\mathbf{x}; R)$  è un filtro con un raggio caratteristico  $R$  a cui corrisponde una massa  $M = \gamma_f \bar{\rho} R^3$ , con il parametro  $\gamma_f$  dipendente dalla forma del filtro (ad esempio per un filtro *top-hat* sferico  $\gamma_f = 4\pi/3$ ; vedi §1.5). L'ansatz del formalismo di Press-Schechter (PS) consiste nell'assumere che la probabilità che  $\delta_s > \delta_c(t)$  sia uguale alla frazione degli elementi di massa che al tempo  $t$  sono contenuti in aloni di massa maggiore di  $M$ . Se  $\delta_0(\mathbf{x})$  è un campo Gaussiano, lo stesso varrà per  $\delta_s(\mathbf{x})$ , e la probabilità che  $\delta_s > \delta_c(t)$  è data da

$$\mathcal{P}[> \delta_c(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(M)} \int_{\delta_c(t)}^{\infty} \exp\left[-\frac{\delta_s^2}{2\sigma^2(M)}\right] d\delta_s = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{\delta_c(t)}{\sqrt{2}\sigma(M)}\right],$$

(1.115)

dove  $\sigma^2(M) = \sigma^2(R = (M/\gamma_f \bar{\rho})^{1/3})$  definito nell'eq. (1.103). In accordo con l'ansatz di PS la probabilità (1.115) è uguale a  $F(> M)$ , la frazione di massa in oggetti collassati con massa maggiore di  $M$ . Il formalismo di Press-Schechter presenta tuttavia un problema; per  $M \rightarrow 0$  ( $\sigma(M) \rightarrow \infty$ ) ci si attende che  $\mathcal{P}[> \delta_c(t)] \rightarrow 1$ , ovvero che tutta la materia dell'Universo sia contenuta in aloni di massa arbitrariamente piccola. Svolgendo questo limite si ottiene invece  $\mathcal{P}[> \delta_c(t)] \rightarrow 1/2$ , ovvero solo metà della massa totale è parte di oggetti collassati. Questa inconsistenza è dovuta al fatto che, in questa derivazione, si dà probabilità nulla ad un punto con  $\delta_s(\mathbf{x}, M) < \delta_c$  per un un certa scala di filtraggio  $M$ , di avere  $\delta_s(\mathbf{x}, M') > \delta_c$  per una scala di filtraggio  $M' > M$  più grande. Ovvero l'approccio di PS trascura la possibilità per quel punto di essere incluso in un alone di massa maggiore. Una derivazione più rigorosa della funzione di massa, basata sul *excursion-set formalism* [19], permette di recuperare il fattore due mancante, adottando un filtro *top-hat* sferico nello spazio di Fourier. Inserendo ad hoc il fattore due nell'ansatz di PS,  $F(> M) = 2\mathcal{P}[> \delta_c(t)]$ , la funzione di massa che si deriva è

$$\begin{aligned} n(M, t)dM &= \frac{\bar{\rho}}{M} \frac{\partial F(> M)}{\partial M} dM = 2 \frac{\partial \mathcal{P}[> \delta_c(t)]}{\partial \sigma_M} \left| \frac{d\sigma_M}{dM} \right| dM \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M^2} \frac{\delta_c}{\sigma_M} \exp \left[ -\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2} \right] \left| \frac{d \ln \sigma_M}{d \ln M} \right| dM. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Questa è nota come la funzione di massa di Press & Schechter [87]. Come si può notare dall'eq. (1.116), aloni di massa  $M$  possono formarsi in numero significativo solo quando  $\sigma_M \gtrsim \delta_c(t)$ . Definendo la massa caratteristica  $M^*(t)$  come

$$\sigma(M^*) = \delta_c(t) = \delta_c/D(t), \quad (1.117)$$

solo gli aloni con  $M \lesssim M^*$  si saranno formati in numero significativo al tempo  $t$ . Poiché nel modello gerarchico  $D(t)$  è una funzione crescente del tempo, mentre  $\sigma_M$  decresce con la massa, la massa caratteristica  $M^*$  cresce con il tempo. Quindi, col trascorrere del tempo, aloni via via più massivi inizieranno a formarsi.

Osservando l'eq. (1.116) è chiaro come questa sia strettamente dipendente dai parametri cosmologici, e quindi risulti utile per testare la validità dei diversi modelli cosmologici. I parametri cosmologici entrano nell'eq. (1.116) sia attraverso la varianza  $\sigma_M$ , che dipende dallo spettro di potenza e dai parametri di densità, che attraverso il fattore di crescita lineare delle perturbazioni, nonché, anche se in modo più debole, attraverso il contrasto di densità critico  $\delta_c$ .

In figura 4 viene mostrato come l'evoluzione delle funzioni di massa cumulative degli ammassi di galassie per diversi modelli cosmologici differiscano di diversi ordini di grandezza al crescere del redshift.

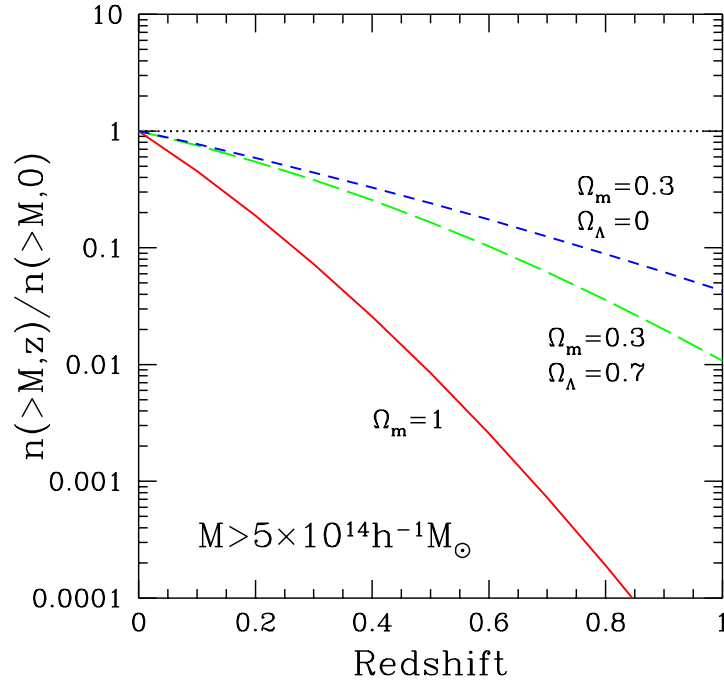


Figura 4: Funzione di massa cumulativa  $n(> M, z)$  al variare del redshift con  $M = 5 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$  per tre differenti modelli cosmologici [98]: (linea continua)  $\Omega_m = 1$  e  $\sigma_8 = 0.5$ , (linea tratteggiata lunga)  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$  e  $\sigma_8 = 0.8$ , (linea tratteggiata corta)  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_{\Lambda} = 0$  e  $\sigma_8 = 0.8$

I diversi modelli adottati nell'immagine sono stati normalizzati per produrre una densità in numero di ammassi comparabile con quella degli ammassi più prossimi a noi ( $z \lesssim 0.1$ ).

### 1.6.3 Estensioni del formalismo di Press-Schechter

Un modo alternativo di esprimere la funzione di massa è

$$f(\sigma_m, z) = \frac{M}{\bar{\rho}} \frac{dn(M, z)}{d \ln \sigma_m^{-1}}, \quad (1.118)$$

definita in questo modo come la frazione di massa associata ad aloni per unità d'intervallo di  $\ln \sigma^{-1}$ . Con questa definizione la funzione di massa di PS viene espressa come

$$f_{\text{PS}}(\sigma_m, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta_c}{\sigma_M} \exp \left[ -\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2} \right]. \quad (1.119)$$

La funzione di massa di Press & Schechter, nonostante la sua semplicità, è stata sfruttata per più di un decennio per vincolare parametri cosmologici dalla distribuzione di massa degli ammassi di galassie. Solo recentemente, con l'avvento di simulazioni ad N-corpi in grado di coprire un ampio *range* dinamico, si sono potute apprezzare deviazioni significative dall'espressione di PS. Tali deviazioni sono state usualmente interpretate come correzioni all'approccio di PS.



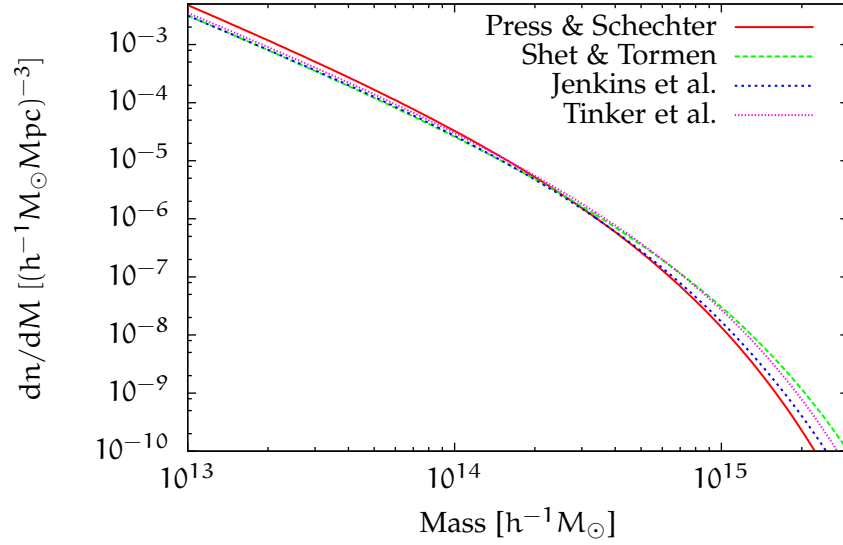


Figura 5: Differenti funzioni di massa per un modello  $\Lambda$ CDM con  $\Omega_m = 0.2718$ ,  $\Omega_b = 0.0455$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7282$ ,  $h = 0.704$ ,  $\sigma_8 = 0.810$ ,  $n = 0.967$ , valutate a  $z = 0$

Uno dei primi passi in questa direzione è stato quello di considerare un collasso di tipo ellittico, piuttosto che sferico come assunto nel caso precedente. Incorporando gli effetti per questo tipo di collasso la funzione di massa può essere generalizzata come

$$f(\sigma_{m,z}) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} C \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_M^2}{a\delta_c^2} \right) \right] \frac{\delta_c}{\sigma_M} \exp \left[ -\frac{a\delta_c^2}{2\sigma_M^2} \right] \quad (1.120)$$

[108]. Confrontando questa espressione con i risultati ottenuti dalle simulazioni ad N-corpi, e imponendo che  $\int_0^\infty f(\sigma_M) d\sigma_M = 1$ , si ottiene per i vari parametri:  $a = 0.707$ ,  $q = 0.3$ , e  $C = 0.3222$ . Un'espressione alternativa per la funzione di massa, proposta da Jenkins et al. [44], è:

$$f(\sigma_{m,z}) = 0.315 \exp(-|\ln \sigma_M^{-1} + 0.61|^{3.8}), \quad (1.121)$$

ricavata dal *fit* dei dati ottenuti per diverse simulazioni in grado di coprire un ampio *range* dinamico. Più recentemente è stato inoltre evidenziato come la funzione  $f(\sigma_{m,z})$ , oltre ad essere sensibile all'algoritmo utilizzato nelle simulazioni per identificare gli ammassi e per stimarne la massa [30], risulta dipendere anche dal redshift e dal modello cosmologico adottato [116].

In figura 5 vengono mostrate alcune delle funzioni di massa sopra citate. Come si può vedere la funzione di Press & Schechter presenta il problema di sottostimare il numero di aloni massivi e sovrastimare quelli di massa inferiore a  $M^*$ . Le altre funzioni di massa presentano invece un buon accordo per piccole masse, mentre si discostano per  $M \gtrsim 2 \cdot 10^{14} M_\odot h^{-1}$ .

## 1.7 DISTRIBUZIONE SPAZIALE DEGLI ALONI E FATTORE DI BIAS

Un problema fondamentale in cosmologia è quello di comprendere come la distribuzione spaziale degli aloni di materia oscura è collegata con quella della materia sottostante. Nella sezione precedente si è visto come il formalismo di PS permette identificare gli aloni presenti ad un dato tempo con regioni del campo di densità iniziale che sono collassate a quel tempo secondo il modello di collasso sferico. Estendendo questa teoria è possibile predire non solo l'evoluzione della funzione di massa degli aloni di materia oscura, ma anche l'insieme delle proprietà statistiche del processo di *clustering* gerarchico [19]. In particolare si dimostra che la frazione di massa di una regione sferica di raggio co-movente  $R_0 = (3M_0/4\pi\bar{\rho}_0)^{1/3}$  e contrasto di densità lineare  $\delta_0$ , che al redshift  $z_1$  è contenuta in aloni di massa  $M_1 < M_0$  è data da

$$f(S_1, \delta_1 | S_0, \delta_0) dS_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta_1 - \delta_0}{(S_1 - S_0)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(\delta_1 - \delta_0)^2}{2(S_1 - S_0)} \right] dS_1, \quad (1.122)$$

dove per alleggerire la notazione si pone  $\delta_1 \equiv \delta_c(t_1) = \delta_c/D(t_1)$ , e  $S \equiv \sigma^2(M)$  viene utilizzata come variabile di massa. La densità  $\delta_0$  si riferisce ad una regione non collassata, e va interpretata come la sovradensità lineare di questa regione estrapolata fino al tempo presente.

Il numero medio di aloni di massa  $M_1$  identificati a  $z_1$  in una regione sferica di raggio  $R_0$  e densità  $\delta_0$  risulta quindi essere

$$N(1|0) dM_1 \equiv \frac{M_0}{M_1} f(1|0) \left| \frac{dS_1}{dM_1} \right| dM_1, \quad (1.123)$$

con  $f(1|0) \equiv f(S_1, \delta_1 | S_0, \delta_0)$ . Queste due equazioni sono sufficienti per costruire un modello analitico per le proprietà di *clustering* degli aloni [69]. L'eq. (1.123) ha una forte dipendenza da  $\delta_0$  che può essere quantificata calcolando la sovrabbondanza media di aloni contenuti nella regione sferica rispetto all'abbondanza media totale di aloni:

$$\delta_h^L(1|0) = \frac{N(1|0)}{n(M_1, z_1) V_L} - 1, \quad \text{con } V_L \equiv \frac{4\pi}{3} R_0^3, \quad (1.124)$$

dove  $n(M_1, z_1)$  è la funzione di massa di Press & Schechter (1.116) per  $M_1$  e  $z_1$ . Nel limite di  $M_0 \gg M_1$  (ovvero  $S_0 \ll S_1$ ) e  $|\delta_0| \ll \delta_1$  l'espressione si riduce a

$$\delta_h^L(1|0) = \frac{v_1^2 - 1}{\delta_1} \delta_0, \quad \text{con } v_1 = \frac{\delta_1}{\sqrt{S_1}}. \quad (1.125)$$

Questa espressione non tiene conto della contrazione (o espansione) della regione ( $R_0, \delta_0$ ), ovvero fornisce la sovrabbondanza di aloni nello spazio Lagrangiano. Poiché per definizione  $N(1|0)$  è il numero di

aloni associato alla massa della regione sferica ( $R_0, \delta_0$ ), il fattore di arricchimento al tempo  $t > t_1$  tenendo conto della sovradensità della regione è

$$\delta_h(1|0) = \frac{N(1|0)}{n(M_1, z_1)V_L} \frac{V_L}{V_E} - 1, \quad (1.126)$$

dove  $V_E$  è il volume nello spazio Euleriano. Noto che  $V_L/V_E = 1 + \delta(t)$ , dove  $\delta(t)$  è il contrasto di densità medio all'interno della regione nello spazio Euleriano, si ottiene

$$\delta_h(1|0) = \delta(t) + \frac{v_1^2 - 1}{\delta_1} \delta_0 + \frac{v_1^2 - 1}{\delta_1} \delta_0 \delta(t). \quad (1.127)$$

Nel regime lineare per cui  $\delta(t) \approx \delta_0 D(t) \ll 1$  l'eq. (1.127) si approssima come

$$\delta_h(1|0) = b_h(M_1, \delta_1; t) \delta(t), \quad (1.128)$$

dove

$$b_h(M_1, \delta_1; t) = 1 + \frac{v_1^2 - 1}{\delta_c} \quad (1.129)$$

è il fattore di *bias* al tempo  $t$  per aloni identificati al tempo  $t_1$ . Quindi la sovrabbondanza di aloni è collegata al contrasto di densità della materia  $\delta$  tramite il fattore  $b_h$ , che dipende sia dalla loro massa  $M_1$ , che dal tempo  $t_1$  (tramite  $\delta_1$ ) in cui sono identificati. Definendo la massa caratteristica per  $t_1$  come  $\sigma(M^*) = \delta_1$  (vedi eq. (1.117)), si può vedere come per aloni di massa  $M_1 > M^*$  il fattore di *bias* è maggiore di uno ( $\delta_h(1|0) > \delta(t)$ ), mentre per aloni di massa inferiore alla massa caratteristica  $b_h < 1$  ( $\delta_h(1|0) < \delta(t)$ ). Inoltre dato che la massa caratteristica  $M^*$  aumenta con il tempo, il fattore di *bias* cresce all'aumentare del redshift (vedi figura 6). Poiché il fattore di *bias* sopra definito è indipendente da  $\delta$  e  $R$  viene detto fattore di *bias* lineare. Questo però non è valido in generale, e  $b_h$  può dipendere sia da  $\delta$  che da  $R$ ; in questo caso si parla rispettivamente di *bias* non lineare e dipendente dalla scala (*scale-dependent*).

Come la funzione di massa derivata da Press & Schechter, il modello di *bias* appena descritto non è molto accurato in quanto si basa sul modello poco realistico di collasso sferico. Derivazioni più rigorose del parametro di *bias* degli aloni sono state ottenute considerando un collasso di tipo ellittico [109], o attraverso il *fit* dei dati ottenuti da diverse simulazioni. Un esempio di quest'ultimo è il modello di *bias* derivato da Tinker et al. [117]:

$$b(v) = 1 - A \frac{v^a}{v^a + \delta_c^a} + Bv^b + Cv^c, \quad (1.130)$$

dove il set di sei parametri ( $A, B, C, a, b, c$ ) varia in funzione del parametro  $\Delta \bar{\rho}_m = 3M(< R_\Delta)/(4\pi R_\Delta^3)$  utilizzato nell'algoritmo di riconoscimento degli aloni.

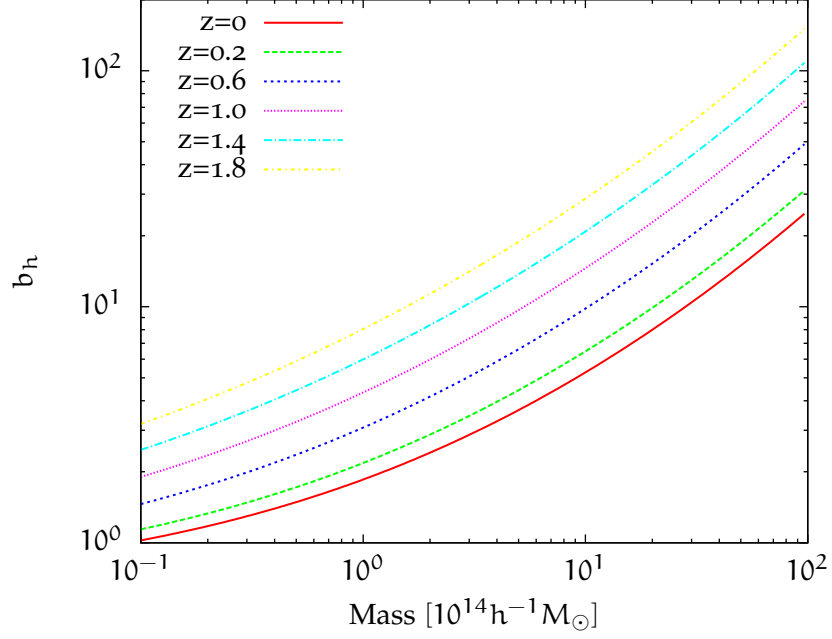


Figura 6: Fattore di *bias* lineare al variare della massa per diversi redshift, in base al modello di Tinker et al. [117] per  $\Delta = 200$ . Si può vedere come  $b_h$  aumenta sia al crescere della massa che del redshift. Nel *range* di massa tipico degli ammassi di galassie,  $\sim 10^{13} - 10^{15} h^{-1} M_\odot$ , la sovradensità di aloni è sempre arricchita rispetto al contrasto di densità della materia sottostante.

In genere la sovrabbondanza di aloni in una data regione non dipende solamente da  $\delta$ , ma anche dal particolare punto dello spazio che si sta considerando. Di conseguenza ci si attende per  $\delta_h$  e  $\delta$  una relazione di tipo stocastico piuttosto che deterministico. Tenendo conto di questo, si può riscrivere l'eq.(1.128) come

$$\delta_h(1|0; \mathbf{r}, t) = b_h(M_1, \delta_1; t) \delta(\mathbf{r}, t) + \varepsilon(\mathbf{r}), \quad (1.131)$$

dove  $\varepsilon$  è un termine stocastico a media nulla:  $\langle \varepsilon | \delta \rangle = 0$ .

Nel caso in cui il termine stocastico sia "a corto raggio", di modo che  $\langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) \varepsilon(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle = 0$  e  $\langle \delta(\mathbf{r}_1, t) \varepsilon(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle = 0$ , la funzione di correlazione a due punti degli aloni può essere scritta come

$$\xi_h(M_1, \delta_1; r, t) = \langle \delta_h(1|0; \mathbf{r}_1, t) \delta_h(1|0; \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle_{r_1} = b_h^2(M_1, \delta_1, t) \xi(r, t) \quad (1.132)$$

dove  $\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle$  è la funzione di autocorrelazione della materia, che altro non è che la trasformata di Fourier dello spettro di potenza.

Il modello di *bias* appena descritto può essere utilizzato per predire la funzione di correlazione a due punti degli ammassi di galassie [70].

La distribuzione degli ammassi di galassie, che sono gli oggetti virializzati più massivi nell'Universo, ci si attende che sia fortemente distorta rispetto alla distribuzione di massa. Poiché gli ammassi sono separati da grandi distanze, la loro funzione di correlazione a due punti può essere misurata in modo affidabile solo su scale maggiori di  $\sim 5h^{-1}\text{Mpc}$ , dove la distribuzione di massa è leggermente non lineare. Quindi il modello di *bias* lineare risulta essere una buona approssimazione.

# AMMASSI DI GALASSIE

---

Gli ammassi di galassie giocano un ruolo cruciale nello studio della cosmologia moderna. Questi sistemi, secondo il modello standard di formazione delle strutture cosmiche, si formano a partire dal collasso dei rari picchi ad alta densità delle fluttuazioni primordiali con scala co-movente tipica di circa  $10h^{-1}\text{Mpc}$ . Data la loro origine gli ammassi di galassie permettono lo studio della coda ad alta densità nella funzione di distribuzione del campo delle perturbazioni, cosicché loro densità in numero è fortemente dipendente dallo scenario cosmologico in cui si sviluppano. In figura 7 è mostrato in modo pittorico come la formazione delle strutture e la popolazione degli ammassi evolve in due modelli cosmologici caratterizzati da un diverso valore di  $\Omega_m$ . Come si può vedere per un modello EdS (sequenza di sinistra) la crescita e formazione di strutture avviene in modo molto più rapido che non per un modello a bassa densità ( $\Omega_m = 0.3$ ) con costante cosmologica (sequenza di destra)(vedi §1.2.4). Confrontando quindi l'abbondanza di ammassi a basso redshift con quella di ammassi più distanti (ovvero a redshift maggiore), è possibile discriminare tra diversi modelli caratterizzati da diversi parametri cosmologici.

A seconda delle proprietà studiate, gli ammassi di galassie possono essere sfruttati per vincolare diversi parametri cosmologici; ad esempio, noto il parametro  $\Omega_m$ , la funzione di massa degli ammassi a basso redshift fornisce vincoli sull'ampiezza dello spettro di potenza su scale  $\sim 8h^{-1}\text{Mpc}$ , ovvero sul parametro  $\sigma_8$  (p.es [98], e referenze all'interno). Allo stesso tempo, la sua evoluzione fornisce vincoli sul fattore di crescita lineare delle perturbazioni, che si traduce in vincoli sulla densità di materia e di energia oscura. Anche l'evoluzione dello spettro di potenza degli ammassi dipende dal valore dei parametri di densità tramite il fattore di crescita delle perturbazioni [21]; inoltre fornisce informazioni sullo spettro di potenza delle fluttuazioni di densità di materia.

I modelli cosmologici riescono a predire la densità in numero degli ammassi entro un certo intervallo di massa ad un dato redshift. Tuttavia la massa degli ammassi non è una quantità direttamente



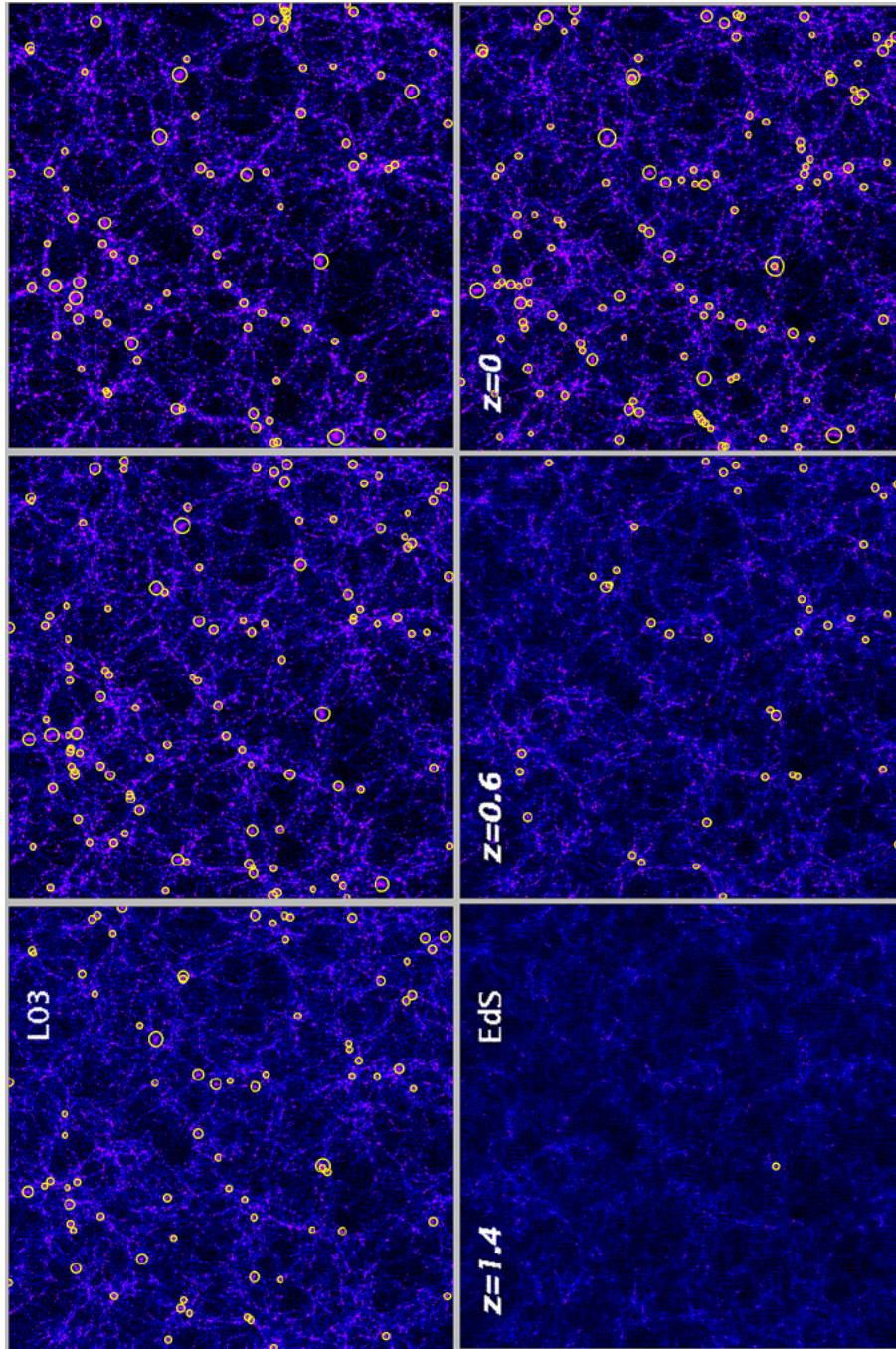


Figura 7: Evoluzione della popolazione degli ammassi ottenuta da una simulazione ad N-corpi per due differenti cosmologie [21]. La sequenza a sinistra descrive un modello piatto con  $\Omega_m = 0.3$  (L03); quella di destra un modello EdS con  $\Omega_m = 1$ . I cerchi gialli segnano la posizione degli ammassi di galassie con temperatura viriale  $T > 3\text{keV}$ , la dimensione dei cerchi è proporzionale alla temperatura. Le due simulazioni sono state configurate per produrre la stessa densità di ammassi a  $z = 0$ . Ogni immagine rappresenta un parallelepipedo di lato  $250h^{-1}\text{Mpc}$  e spesso  $75h^{-1}\text{Mpc}$  (in unità co-moventi).

osservabile, anche se esistono diversi metodi per calcolarla a partire da diverse osservabili. In definitiva per determinare l'evoluzione della densità spaziale di ammassi è necessario: (i) un metodo efficiente per identificare i cluster entro un ampio intervallo di redshift; (ii) un osservabile che permetta di stimare la massa degli ammassi, e (iii) un metodo per calcolare funzione di selezione, ovvero il volume effettivo della *survey* entro il quale sono identificati gli ammassi.

In questo capitolo saranno per prima cosa introdotte le varie tecniche osservative atte all'identificazione degli ammassi (§2.1); di seguito verranno esposti i metodi che permettono di stimare la massa degli ammassi a partire dalle osservabili misurate dalla *survey* (§2.2) e le relazioni di scala che legano quest'ultimi alla massa (§2.3). Per permettere un'analisi statistica affidabile del campione identificato sarà inoltre necessario introdurre la funzione di selezione della *survey* e le incertezze sulle relazioni di scala (§2.4). Infine sarà fatta una recensione di alcuni dei test cosmologici che è possibile realizzare tramite l'uso degli ammassi di galassie e dei rispettivi vincoli posti sui parametri cosmologici (§2.5).

Per una trattazione più estesa di questi argomenti si può far riferimento agli articoli di rassegna di Borgani (2006) [20] e di Allen et al. (2011) [11].



## 2.1 TECNICHE OSSERVATIVE

I primissimi cataloghi di ammassi di galassie furono stilati nella seconda metà del novecento da Abell [8] e Zwicky et al. [124], sulla base di un'indagine puramente visiva. Gli ammassi venivano identificati come picchi nella distribuzione delle galassie osservate, contenenti centinaia o migliaia di galassie entro una regione dell'ordine di un Mpc. Con l'avvento di telescopi in grado di osservare il cielo con una risoluzione sempre maggiore, ed in bande diverse da quella ottica, è stato possibile creare cataloghi sempre più completi e dettagliati. Di seguito viene riportato un rapido excursus delle tecniche utilizzate per identificare gli ammassi di galassie, adottate negli ultimi decenni.

### 2.1.1 Identificazione nella banda ottica e nel vicino infrarosso

L'emissione nella banda ottica e nel vicino infrarosso (*near-IR*) degli ammassi di galassie è dovuta principalmente alla luce stellare. Gli ammassi sono prevalentemente popolati da galassie ellittiche e lenticolari, in particolare nelle regioni centrali, dove si trovano le galassie più luminose. La popolazione stellare di queste galassie è dominata da stelle relativamente vecchie, il che permette di identificare le galassie degli ammassi in una stretta regione del diagramma magnitudine-colore. Questa caratteristica ha permesso di sviluppare un algoritmo identificativo basato sul contrasto di colore, in particolare nella banda del rosso. Le osservabili principali che si ricavano da una *survey* di questo tipo sono la ricchezza (ovvero il numero di galassie entro un raggio di riferimento dell'ammasso,  $\sim h^{-1}$  Mpc), la luminosità ed il colore. Inoltre osservazioni spettroscopiche degli ammassi permettono di misurare, tramite la distribuzione in redshift delle galassie, la dispersione di velocità delle galassie al loro interno. Questa misura viene poi utilizzata per inferire la massa dell'ammasso tramite l'applicazione del Teorema del Viriale (vedi §2.2).

Uno dei principali problemi nell'utilizzo di questi cataloghi risiede proprio nella difficoltà di trovare un'osservabile che permetta di misurare la massa degli ammassi in modo affidabile, e di cui si conosca la dispersione in funzione della massa e del redshift. Un ulteriore problema è dato dagli effetti di proiezione, che a causa del metodo d'identificazione adottato, influenzano particolarmente la statistica dei cataloghi, comportando una distorsione nelle relazioni tra massa ed osservabile.

### 2.1.2 Identificazione nella banda X

La maggior parte della materia barionica dell'Universo è in forma di gas diffuso, tipicamente molto difficile da osservare. Tuttavia, all'interno degli ammassi di galassie, il gas (*intra-cluster medium*, ICM),

compresso dalla forza di gravità, si riscalda fino a raggiungere temperature viriali dell'ordine di  $10^7 - 10^8 \text{K}$ , divenendo così un plasma ionizzato otticamente sottile, luminoso nella banda X. Il meccanismo primario di emissione di raggi-X è il *bremstrahlung* termico, la cui emissività è proporzionale al quadrato della densità del gas. Gli ammassi di galassie dunque sono identificati nella banda X come sorgenti luminose, continue, e spazialmente estese. I primi cataloghi di ammassi ottenuti tramite l'osservazione nella banda X si basano sul HEAO-1 *all-sky survey*, e sulle osservazioni fatte dal *Einstein Observatory* e EXOSAT, alla fine degli anni '80. Un significativo passo avanti è stato poi fatto con il lancio del satellite ROSAT nel 1990, che ha permesso di mappare l'intero cielo nella banda X. Un ulteriore progresso è stato ottenuto con le *surveys* effettuate con i telescopi Chandra e XMM-Newton, entrambi lanciati nel 1999. Queste hanno permesso da una parte di identificare ammassi molto più distanti e meno luminosi rispetto a quelli rivelati da ROSAT, dall'altra di ottenere profili di densità e della temperatura del gas sufficientemente accurati per un gran numero di ammassi.

Le principali osservabili che si ricavano per questo tipo di *survey* sono il flusso, la durezza spettrale e l'estensione spaziale. L'identificazione con i raggi-X presenta numerosi vantaggi: in primo luogo permette di rivelare sistemi fisicamente legati, poiché l'emissione diffusa del ICM testimonia la presenza di una buca di potenziale all'interno della quale il gas è in equilibrio dinamico con la componente fredda della materia barionica (le galassie) e la materia oscura; in secondo luogo la luminosità nella banda X è ben correlata con la massa degli ammassi per l'intero intervallo di redshift e flusso coperto dalla *survey* (vedi sotto §2.2). Inoltre, grazie al fatto che l'emissività dei raggi-X è proporzionale al quadrato della densità del gas, questo metodo non è sensibile agli effetti di proiezione. Infine, un vantaggio fondamentale della selezione tramite raggi-X è l'abilità di definire campioni limitati nel flusso, con una ben definita funzione di selezione. Questo permette di valutare in modo semplice il volume della *survey* e quindi di effettuare una misura affidabile della densità spaziale degli ammassi. Attualmente tutti i vincoli più robusti ottenuti dallo studio degli ammassi si devono a *surveys* nella banda X. D'altra parte lo svantaggio principale delle osservazioni in questa banda è che possono essere effettuate solo dallo spazio, con un relativo aumento dei costi necessari per realizzare la missione.

### 2.1.3 Identificazione tramite l'effetto Sunyaev-Zel'dovich

I fotoni del CMB attraversando un ammasso di galassie hanno una probabilità finita di acquistare energia, tramite la diffusione Compton inversa, dagli elettroni presenti nel ICM. Questo fenomeno, noto con il nome di effetto Sunyaev-Zel'dovich (SZ) termico [112], genera una

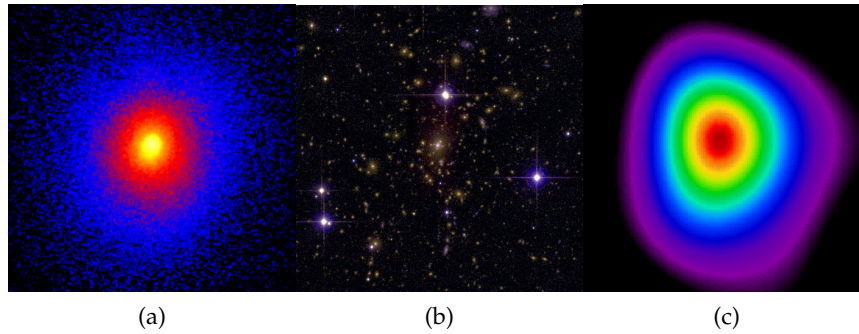


Figura 8: Immagini di Abell 1835 ( $z = 0.25$ ) nella banda X (a), ottica (b) e delle microonde (c). L'esempio illustra la differente morfologia dell'ammasso al variare della lunghezza d'onda osservata. Le tre immagini sono centrate nel picco di emissione dei raggi-X ed hanno la stessa scala spaziale, 5.2 arcmin. Immagini da: (a) Chandra X-ray Observatory / A. Mantz, (b) Canada France Hawaii Telescope / A. von der Linden et al., (c) Sunyaev Zel'dovich Array / D. Marrone.

distorsione, dipendente dalla frequenza, rivelabile nello spettro del CMB. In particolare i fotoni che popolano la zona di Raylight-Jeans dello spettro del CMB, acquistando energia, migrano nella zona a più alta frequenza di Wien. L'ampiezza di quest'effetto è proporzionale all'integrale lungo la linea di vista del prodotto tra la densità e la temperatura del gas.

Il vantaggio principale di una *survey* basata sull'effetto SZ consiste nella sua indipendenza dal redshift, al contrario dei due metodi sopra menzionati. Difatti, mentre la riduzione del flusso con l'aumentare della distanza di luminosità,  $f \propto d_L^{-2}$ , comporta un rapido incremento della massa limite osservabile con la distanza, per l'effetto SZ questa massa limite è pressoché indipendente dal redshift, in quanto il segnale viene misurato da un segnale in assorbimento. Recentemente è stato inoltre evidenziato come l'intensità dell'effetto SZ integrato è fortemente correlata con la massa totale dell'ammasso [72]. Questi due fattori rendono l'identificazione tramite l'effetto SZ un metodo molto promettente per lo studio della cosmologia di precisione tramite gli ammassi di galassie.

Un potenziale problema di questo metodo di rivelazione risiede nella possibile contaminazione del segnale da parte di sorgenti radio ed infrarosse presenti lungo la linea di vista, nonché dalle fluttuazioni locali del CMB. Questo tipo di distorsione del segnale, insieme a quella dovuta agli effetti di proiezione, devono essere tenute in conto nel calcolo della funzione di selezione.

#### 2.1.4 *Lensing gravitazionale*

In base alla teoria della relatività generale, la distribuzione di massa associata ad un ammasso distorce la geometria dello spazio-tempo circostante, “incurvando” così la traiettoria della luce che passa nei pressi della buca di potenziale. Questo fenomeno, noto come *lensing gravitazionale*, può sia magnificare che distorcere l’immagine delle galassie di fondo. Grazie alla grande quantità di dati oggi disponibili, il *lensing gravitazionale* può essere rivelato abbastanza facilmente studiando in modo statistico la morfologia delle galassie di fondo osservate attraverso l’ammasso (*weak lensing*) o la morfologia delle galassie di campo (*cosmic shear*). Più raramente il *lensing* può generare forti distorsioni (*strong lensing*) che si presentano come anelli, archi, o immagini multiple di un singolo oggetto. In figura 9 è mostrata la sovrapposizione di due immagini, una nella banda ottica ed una nella banda X, dell’ammasso Abel 1689, in cui è molto chiaro l’effetto di *lensing*. Si può vedere come la materia oscura, che si estende ben oltre la regione tracciata dall’emissione del plasma caldo, viene evidenziata dalla distorsione dell’immagine delle galassie di fondo. Nelle regioni più interne dell’ammasso l’effetto del *lensing* è forte, e le immagini delle galassie di fondo assumono la forma di lunghi archi sottili, incurvati attorno il centro dell’ammasso. Allontanandosi dal centro l’effetto diviene più debole. Tuttavia, anche se non visibile ad occhio nudo, questo può essere rivelato valutando la forma delle galassie di fondo e confrontando la loro media statistica con il valore atteso per una distribuzione isotropa delle forme.

Una volta noto il redshift dell’ammasso in esame e delle galassie di fondo (in genere ricavato tramite spettroscopia e fotometria), la misura della distorsione gravitazionale può essere utilizzata per ricavare la massa dell’ammasso. Questo metodo di stima della massa, al contrario di altri (vedi sotto §2.2), è libero da assunzioni riguardanti lo stato dinamico della materia in esame. Per una *review* recente sull’argomento si veda [15].

## 2.2 METODI PER STIMARE LA MASSA DEGLI AMMASSI

Come già accennato misurare la massa degli ammassi è indispensabile per poter utilizzare la statistica degli ammassi di galassie come strumento cosmologico. Infatti la funzione di massa calcolata per un dato modello cosmologico predice il numero di oggetti collassati entro un certo intervallo di redshift e massa. A seconda del tipo di *survey* scelta sono diverse le osservabili che è possibile sfruttare per stimare la massa degli ammassi. In genere per poter formulare delle relazioni tra il segnale misurato e la massa dell’oggetto in esame è necessario fare delle assunzioni sullo stato dinamico della materia che lo compone. È questo il caso della relazione tra massa-temperatura e

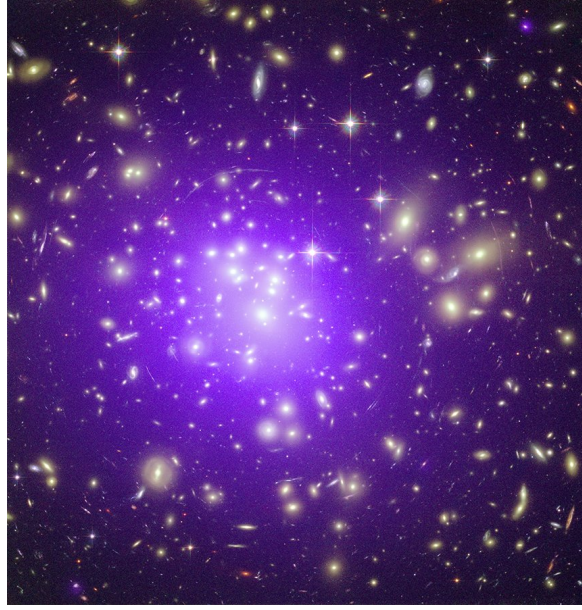


Figura 9: Sovrapposizione di due immagini, una nella banda ottica (da Hubble Space Telescope) ed una nella banda X (da Chandra X-ray Observatory), dell'ammasso di galassie Abell 1689, situato a redshift  $z = 0.18$ . L'alone viola diffuso, rivelato dall'emissione nella banda X, mostra la distribuzione del plasma nell'ammasso. I lunghi archi che è possibile vedere nell'immagine ottica sono causati dal *lensing* gravitazionale delle galassie di fondo.

massa-dispersione di velocità.

### 2.2.1 Masse da equilibrio idrostatico

La misura della massa nel caso di osservazioni nella banda X si basa sull'ipotesi di equilibrio idrostatico nell'ICM. La condizione di equilibrio idrostatico è raggiunta quando vi è equilibrio tra la forza di pressione e quella di gravità:  $\nabla P_{\text{gas}} = -\rho_{\text{gas}} \nabla \phi$ , dove  $P_{\text{gas}}$  è  $\rho_{\text{gas}}$  sono rispettivamente la pressione e la densità del gas, mentre  $\phi$  è il potenziale gravitazionale sottostante. Assumendo per il gas una distribuzione a simmetria sferica l'equazione assume la forma:

$$\frac{dP_{\text{gas}}}{dr} = -\rho_{\text{gas}} \frac{d\phi}{dr} = -\rho_{\text{gas}} \frac{GM(< r)}{r^2}, \quad (2.1)$$

dove  $r$  è la coordinata radiale e  $M(< r)$  è la massa contenuta entro  $r$ . Esplicitando la massa dall'equazione precedente, e sfruttando l'equazione di stato dei gas perfetti per esprimere la pressione in funzione della densità e della temperatura, si arriva a scrivere:

$$M(< r) = -\frac{r}{G} \frac{k_B T}{\mu m_p} \left( \frac{d \ln \rho_{\text{gas}}}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right), \quad (2.2)$$

con  $\mu$  peso molecolare medio del gas e  $m_p$  massa del protone. Grazie allo sviluppo di telescopi orbitali come *Chandra* e *XMM-Newton* è oggi



possibile risolvere con sufficiente accuratezza il profilo di temperatura e densità degli ammassi, grazie ai quali, tramite l'eq. (2.2), è possibile misurarne la massa. Questa misura si basa tuttavia su due forti assunzioni: l'esistenza dell'equilibrio idrostatico e della simmetria sferica. Mentre gli effetti di una distribuzione non sferica possono essere alleviati tramite un'analisi statistica di un grande numero di ammassi, l'altra ipotesi può portare ad errori sistematici nella stima della massa (p.es [91]). La misura della temperatura del ICM si basa sul *fit* degli spettri degli ammassi osservati nella banda X con i modelli di plasma, che sono dominati ad alte temperature dal *bremstrahlung* termico. Tuttavia, deviazioni locali dall'isotermalità, ad esempio dovute a processi di fusione (*merging*) con strutture più fredde, possono discostare il valore della temperatura spettroscopica dal valore reale della temperatura degli elettroni. Il *bias* indotto sulla temperatura spettroscopica da questi effetti si traduce in un *bias* nelle masse stimate assumendo l'equilibrio idrostatico.

### 2.2.2 Masse dalla dinamica delle galassie

Misure spettroscopiche degli ammassi di galassie permettono di ricavare, tramite l'analisi della dispersione in redshift, la dispersione di velocità delle galassie membro. Ipotizzando che le galassie che compongono l'ammasso siano in equilibrio dinamico, la massa racchiusa entro un raggio  $r$  è data dall'equazione di Jeans (p.es. [17])

$$M(< r) = -\frac{r\sigma_r^2}{G} \left( \frac{d \ln \sigma_r^2}{d \ln r} + \frac{d \ln n_{\text{glx}}}{d \ln r} + 2\beta \right), \quad (2.3)$$

dove  $n_{\text{glx}}$  è la densità in numero di galassie ad un certo raggio  $r$  e  $\sigma_r$  la dispersione di velocità radiale. Il parametro  $\beta = 1 - \sigma_\theta^2/\sigma_r^2$ , con  $\sigma_\theta$  dispersione di velocità tangenziale, quantifica l'anisotropia delle orbite, e non è direttamente misurabile. Queste quantità possono essere calcolate, assumendo dei modelli, a partire dalla proiezione della densità in numero delle galassie e dal profilo della dispersione di velocità. Un vantaggio di questo metodo rispetto a quello esposto in §2.2.1 è l'insensibilità a diverse forme di pressione non termica (come quella dovuta ai campi magnetici o ai raggi cosmici) che alterano l'equilibrio idrodinamico dell'ICM.

Tuttavia questo metodo è affetto da numerosi problemi. Oltre a richiedere la condizione di equilibrio dinamico, che può essere un'approssimazione più o meno valida a seconda del tipo di popolazione di galassie considerata, un aspetto fondamentale nell'applicazione dello stimatore di massa dinamico riguarda la contaminazione nella stima della dispersione di velocità dovuta alle galassie che si trovano lungo la linea di vista dell'ammasso ma non gli appartengono. Un'inclusione spuria di tali galassie nell'analisi comporta in genere una sovrastima della dispersione di velocità, e quindi della massa risultante.

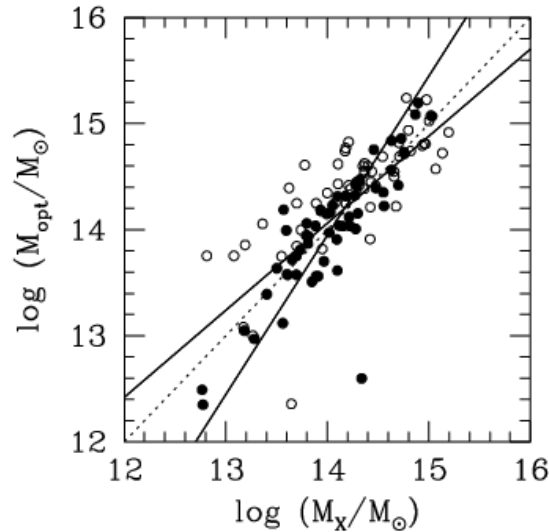


Figura 10: Relazione tra lo stimatore di massa ottico-dinamico e la massa ottenuta tramite la temperatura dei raggi-X assumendo l'equilibrio idrostatico [34]

Nonostante tutte le ipotesi adottate ed i vari errori sistematici che influenzano la stima della massa, entrambi i metodi forniscono in generale risultati consistenti sia per gli ammassi vicini che per quelli lontani. Un esempio di questo confronto è riportato in figura 10; si può notare come le due stime siano in ragionevole accordo, nonostante con una certa dispersione. I pochi valori anomali sono in genere identificati con ammassi non dinamicamente rilassati.

### 2.2.3 Masse da lensing gravitazionale

La tecnica più diffusa per il calcolo della massa tramite *weak lensing* consiste nel confrontare il profilo di *shear* osservato con un modello parametrizzato della massa (p.es. [40]). Il metodo di *weak lensing* ha il notevole vantaggio di non richiedere nessuna assunzione riguardo la geometria dell'ammasso. Data una buona conoscenza della distribuzione in redshift delle galassie di fondo la misura della massa tramite *weak lensing* fornisce un metodo pressoché libero da *bias* [16]. L'effetto di *strong lensing* permette invece di effettuare misure precise della massa proiettata entro la regione racchiusa dagli archi gravitazionali. In combinazione con il *weak lensing*, i vincoli posti dalla *strong lensing* possono migliorare significativamente la calibrazione delle mappe di massa. Nonostante questo metodo, al contrario del *weak lensing*, risente particolarmente della tri-assialità degli ammassi [67], i risultati ottenuti per ammassi dinamicamente rilassati sono in buon accordo con le stime ottenute tramite osservazioni in banda X.

## 2.3 RELAZIONI DI SCALA

Per effettuare un'analisi cosmologica è necessario trovare delle relazioni di scala tra la massa dell'ammasso e l'osservabile utilizzata per identificarlo. Il modello più semplice per queste relazioni è il cosiddetto modello auto-simile [45], basato sull'assunzione che solo la gravità determina le proprietà termodinamiche dell'ICM. Sotto quest'ipotesi gli ammassi di diverse dimensioni risultano essere una versione in scala l'uno dell'altro, in quanto la gravità non agisce su scale preferenziali; da qui il nome di modello auto-simile.

Definendo  $M_{\Delta_c}$  come la massa contenuta entro il raggio  $R_{\Delta_c}$ , tale che la densità media entro il volume sia  $\Delta_c$  volte la densità critica  $\rho_c$ , allora  $M_{\Delta_c} \propto \rho_c(z)\Delta_c R_{\Delta_c}^3$ . Assumendo quindi l'equilibrio idrostatico la massa dell'ammasso scala con la temperatura  $T$  come

$$M_{\Delta_c} \propto T^{3/2}E^{-1}(z), \quad (2.4)$$

dove  $E(z) = H(z)/H_0$  è definito dall'eq. (1.34). Se  $\rho_{\text{gas}}$  è la densità del gas, la corrispondente luminosità  $X$  per emissione puramente da *bremsstrahlung* termico è

$$L_X = \int_V \left( \frac{\rho_{\text{gas}}}{\mu m_p} \right)^2 \Lambda(T) dV, \quad (2.5)$$

dove  $\Lambda \propto T^{1/2}$ . Assumendo ulteriormente che la distribuzione del gas traccia la distribuzione di materia oscura,  $\rho_{\text{gas}}(r) \propto \rho_{\text{dm}}(r)$ , si ottiene

$$L_X \propto M_{\Delta_c} \rho_c T^{1/2} \propto T^2 E(z). \quad (2.6)$$

Per la riduzione d'intensità del CMB dovuta all'effetto SZ termico si ha

$$\Delta S \propto y_0 d_A^{-2} \int d\Omega \propto y_0 d_A^{-2} M^{2/3} E^{-4/3}(z) \propto y_0 d_A^{-2} T E^{-2}(z), \quad (2.7)$$

dove  $y_0$  è il valore del parametro di Comptonizzazione al centro dell'ammasso e  $d_A$  è la distanza della dimensione apparente. Grazie a questa equazione si ottiene la seguente relazione di scala per il valore del parametro di Comptonizzazione

$$y_0 \propto T^{3/2} E(z) \propto L_X^{3/4} E^{1/4}(z). \quad (2.8)$$

Le relazioni (2.4), (2.6) e (2.8) forniscono in linea di principio un metodo per collegare la massa degli ammassi alle osservabili per diversi redshift. Deviazioni da queste relazioni sono attese in presenza di fenomeni fisici che vanno oltre la semplice dinamica gravitazionale, ed alterano le proprietà termodinamiche del gas diffuso.



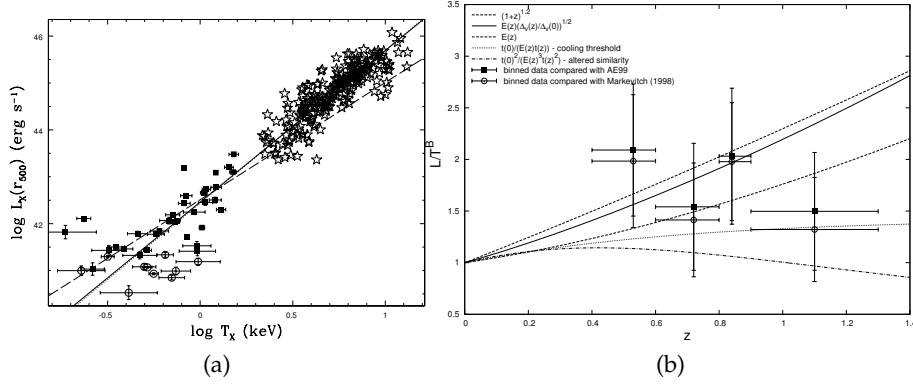


Figura 11: (a) Relazione tra  $L_X - T$  per ammassi vicini e gruppi di galassie (da [75]). I simboli a forma di stella sono per il campione di ammassi, mentre i cerchi ed i quadrati sono per i gruppi. Le temperature sono state misurate tramite il satellite ASCA. (b) Evoluzione della relazione  $L_X - T$  (da [65]), con temperature da Chandra per ammassi a  $z > 0.4$ .

### 2.3.1 Relazioni di scala per la luminosità nella banda X

La relazione tra la luminosità nella banda X e la temperatura degli ammassi più prossimi a noi fornisce un chiaro esempio a sfavore del modello auto-simile prima esposto. I dati osservativi oggi presenti favoriscono una relazione del tipo  $L_X \propto T^\alpha$ , con  $\alpha \simeq 2.5 - 3$  (p.es. [123]), che eventualmente tende alla relazione di scala ottenuta col modello auto-simile solo per i sistemi più caldi con  $T \gtrsim 10\text{keV}$ . La dispersione attorno alla curva di regressione può essere significativamente ridotta rimuovendo il contributo alla luminosità dato dalle regioni centrali dove il raffreddamento radiativo, e gli effetti di *feedback* in energia dai nuclei galattici attivi, giocano un ruolo importante. In figura 11 (a) viene mostrata la relazione  $L_X - T$  per un campione di ammassi con temperatura misurata dal satellite ASCA ed un campione di gruppi di galassie [75]. Come si può vedere la stessa relazione interpola bene entrambe le scale, anche se con una dispersione maggiore per quanto riguarda i gruppi di galassie, probabilmente dovuta all'eterogeneità della popolazione dei gruppi. Sempre in figura 11, nel riquadro (b) si mostra l'evoluzione della relazione  $L_X - T$  ottenuta dall'analisi di undici ammassi osservati tramite Chandra e XMM-Newton, in un intervallo di redshift  $0.6 < z < 1.0$  [65]. Nonostante risultino lievi differenze tra i risultati ottenuti dai diversi autori, il quadro che emerge suggerisce un aumento della luminosità degli ammassi ad alto redshift per una data temperatura. Questi risultati sono consistenti con quelli attesi dal modello auto-simile per una cosmologia con  $\Omega_m = 0.3$  e  $\Omega_\Lambda = 0.7$ , anche se la pendenza della curva ad alti  $z$  si presenta più ripida.

Per quanto riguarda la relazione tra la luminosità nella banda X

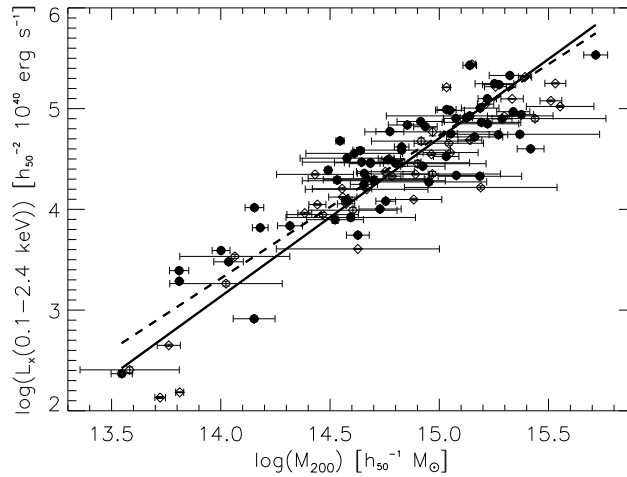


Figura 12: Relazione tra  $L_X - M$  per ammassi vicini (da [95])(vedi testo).

e la massa, la sua prima calibrazione è stata eseguita tramite un campione di ammassi brillanti estratto dalla ROSAT *All Sky Survey* (RASS) [95]. Nell'analisi la massa è stata derivata utilizzando la temperatura misurata da ASCA, ed applicando le equazioni dell'equilibrio idrostatico (2.2). I risultati dell'analisi sono mostrati in figura 12. Da una parte questo studio dimostra l'esistenza di una relazione tra massa e luminosità nella banda X, anche se con una certa dispersione, che permette di utilizzare  $L_X$  come *proxy* per la massa degli aloni; dall'altra si evidenzia nuovamente un discostamento dalla relazione di scala auto-simile, consistente con quello trovato per la relazione  $L_X - T$ .

### 2.3.2 Relazioni di scala per la luminosità nella banda ottica

Stimare con accuratezza la massa di un ammasso utilizzando come osservabile la sua ricchezza non è facile, in quanto le galassie di ammasso in genere non sono un buon traccianti della materia sottostante. Tuttavia la disponibilità di dati fotometrici sempre più accurati e la possibilità, data da un vasto campione di misurazioni spettroscopiche, di identificare con precisione le galassie spurie, ha permesso di dimostrare come la luminosità nella banda ottica/*near-IR* possa essere utilizzata per stimare in modo affidabile la massa degli ammassi. In figura 13 sono riportati due esempi di calibrazioni recenti tra la luminosità ottica/*near-IR* e la massa. Nel riquadro (a) sono presentati i risultati ottenuti da [31], basati sulla luminosità nella banda K, fornita dalla missione 2MASS, ed applicando la relazione  $M - T_X$  per la misura della massa. Nonostante l'ampia dispersione dei dati si riscontra una chiara correlazione tra le due variabili. Nel riquadro (b) la relazione è ricavata analizzando i dati provenienti da Sloan Digital Sky Survey (SDSS) per la luminosità nella banda i e stimando le masse sia tramite la dispersione di velocità che tramite la relazione con la

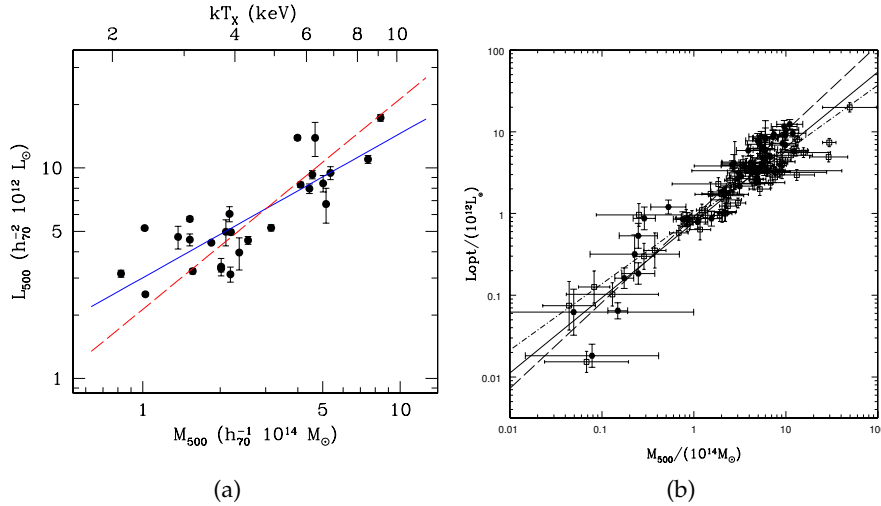


Figura 13: Relazione tra la massa degli ammassi e la luminosità nell’ottico/*near-IR*. (a) Relazione tra  $M_{500} - L_{500}$ , utilizzando i dati per la banda K forniti dalla 2MASS *survey* e le masse ottenute dalla temperatura  $T_X$  [31]. La linea solida è la curva di *best-fit*, mentre la linea tratteggiata indica una retta a pendenza unitaria. (b) Stessa relazione ottenuta questa volta con i dati per la banda i forniti da SDSS [86]. I cerchietti vuoti corrispondono a stime di massa basate sui dati spettroscopici di SDSS, mentre quelli pieni a stime basate sulla relazione  $M - T_X$

temperatura [86]. La luminosità ottica appare fortemente correlata con la massa dell’ammasso, con una dispersione intrinseca confrontabile con quella ottenuta dalla relazione  $L_X - M$ . Entrambi gli studi indicano che il rapporto tra la massa e la luminosità aumenta leggermente con la massa dell’ammasso.

Questi risultati mostrano chiaramente come campioni di ammassi con precise misure della luminosità ottica possano essere sfruttati per vincolare i parametri cosmologici. Tuttavia, mentre una *survey* nella banda X fornisce contemporaneamente un’osservabile ben correlata con la massa ed un criterio preciso per determinare la funzione di selezione, quest’ultima quantità nel caso di un campione selezionato nell’ottico può essere ricavata solo in modo indiretto.

### 2.3.3 Proxies per la massa

Le relazioni osservabile-massa finora introdotte presentano una dispersione intrinseca abbastanza elevata. Ad esempio la relazione  $L_X - M$  presenta, per un valore fisso della massa, una dispersione intrinseca del 40% circa [60]. Analogamente la relazione tra ricchezza di un ammasso e la sua massa mostra, ad una data massa, una dispersione  $\sim 40\%$ , nonché una distribuzione non gaussiana per piccole masse [99]. Per quanto riguarda la relazione tra flusso integrato SZ e massa la dispersione attesa è leggermente inferiore, tra il 20% e il 30% [107],

anche se questa stima deve essere ancora confermata dai dati.

Poiché sia la luminosità nella banda X, che la ricchezza di un ammasso, che il segnale SZ, sono le osservabili che si ottengono dalle *surveys*, la loro dispersione nelle relazioni con la massa incide particolarmente nei test cosmologici basati sul conteggio degli ammassi. Per questo è necessario trovare dei *proxies* per la massa che siano facili da misurare, e che presentino una dispersione piccola nell'intervallo di massa e redshift d'interesse. Per gli ammassi più massivi un buon *proxy* è la massa del gas rivelato dall'emissione di raggi-X. Questa è fortemente correlata con la massa dell'ammasso, con una dispersione intrinseca  $< 10\%$  per una data massa [10]. Un'altra relazione molto buona è quella tra la massa ed il prodotto di  $T_X$  con la massa del gas,  $Y_X = kTM_{\text{gas}}$ , con una dispersione osservata  $\lesssim 15\%$  (p.es. [60]). Come accennato in 2.3.1, rimuovendo il contributo alla luminosità delle zone centrali dell'ammasso è possibile ridurre notevolmente la dispersione nella relazione  $L_X - M$ , che raggiunge valori inferiori al 10%, [60]. In generale, l'osservazione per un piccolo campione selezionato di ammassi di un robusto *proxy* per la massa è sufficiente per migliorare notevolmente i vincoli posti sui parametri [122].

#### 2.4 FUNZIONE DI SELEZIONE E DISTRIBUZIONE DELLA RELAZIONE OSSERVABILE-MASSA

Una *survey* viene caratterizzata fondamentalmente dalla sua funzione di selezione, che specifica il sottoinsieme di oggetti che possono essere rivelati tra tutti quelli presenti nell'area della *survey*. La funzione di selezione dipende dalle specifiche della *survey* stessa. In particolare dipende dal tipo di osservabile che viene misurata, e dal segnale limite rivelabile, nonché dalle caratteristiche tecniche del telescopio, come la risoluzione angolare, la copertura spettrale e la copertura del cielo (*sky coverage*). Inoltre la funzione di selezione dipende anche dall'algoritmo di riconoscimento utilizzato per identificare gli ammassi dai dati della *survey*. Calibrare una funzione di selezione accurata è fondamentale per una qualsiasi analisi statistica del catalogo ottenuto dalla *survey*, poiché permette di comprendere quanto il campione di oggetti identificati sia rappresentativo della popolazione realmente presente nell'Universo.

Per costruire una funzione di selezione bisogna sostanzialmente tener conto di due problemi: la completezza del campione, ovvero la frazione di oggetti oltre una certa massa ad un dato redshift che vengono identificati in una *survey* caratterizzata da un certo segnale limite rilevabile, e gli errori relativi alla misurazione delle osservabili. In genere quindi la funzione di selezione può essere fattorizzata come

$$\Phi(\mathbf{W}_{\text{obs}}|\mathbf{W}) = S(\mathbf{W})F(\mathbf{W}_{\text{obs}}|\mathbf{W}), \quad (2.9)$$

dove  $\mathbf{W}_{\text{obs}}$  e  $\mathbf{W}$  rappresentano rispettivamente il set di parametri

osservati, ed il set di parametri reali dell'ammasso [66]. Il primo fattore rappresenta la completezza della *survey*, e dipende esclusivamente dai parametri reali dell'ammasso. Il secondo fattore quantifica invece le incertezze sulle misurazioni con una funzione di distribuzione  $F$ . Ovviamente in assenza di errori nelle misurazioni si otterrebbe:

$$\Phi(\mathbf{W}_{\text{obs}}|\mathbf{W}) = S(\mathbf{W})\delta^D(\mathbf{W}_{\text{obs}} - \mathbf{W}). \quad (2.10)$$

In genere, tranne che per *surveys* basate sull'effetto SZ, l'errore sulla misura può essere trascurato, in quanto molto inferiore rispetto agli errori introdotti dalle relazioni di scala. Nella seguente trattazione verrà quindi ignorato per semplicità il fattore legato all'errore.

Nel caso di una *survey* limitata nel flusso (p.es. *X-ray survey*) per valutare la completezza del campione bisogna considerare sia la *sky-coverage* che il flusso limite rilevabile dalla *survey*. Quest'ultimo si traduce in genere in una massa limite identificabile dipendente dal redshift  $M_{\text{thr}}(z)$ . La *sky-coverage* rappresenta l'area effettiva coperta dalla *survey* in funzione del flusso. In genere il tempo di esposizione, come anche il fondo o la PSF (*Point Spread Function*) non sono uniformi su tutto il campo di vista del telescopio, in particolare fuori dall'asse ottico. Di conseguenza la capacità di identificare una sorgente varia notevolmente attraverso il campo di vista del telescopio, di modo che solo gli oggetti più luminosi possono essere rivelati su tutto l'angolo solido della *survey*, mentre per flussi deboli l'area effettiva è ridotta. Definiti il flusso limite della *survey* e la *sky coverage* si può calcolare il volume massimo,  $V_{\text{max}}$ , entro il quale un ammasso di luminosità  $L$  viene identificato

$$V_{\text{max}} = \int_0^{z_{\text{max}}} S[f(L, z)] \left( \frac{d_L(z)}{1+z} \right)^2 \frac{cdz}{H(z)'} \quad (2.11)$$

dove  $S(f)$ , la *sky-coverage* della *survey*, dipende dal flusso  $f = L/(4\pi d_L^2)$ . L'estremo superiore dell'integrale,  $z_{\text{max}}$ , è definito come il massimo redshift per il quale il flusso di un oggetto di luminosità  $L$  è superiore al flusso limite della *survey*. In figura 14 viene mostrato il volume esplorato oltre un certo redshift da diverse *survey* per un ammasso di luminosità  $L_X = 3 \times 10^{44} \text{ erg s}^{-1}$ , misurata nella banda di energia [0.5 – 2keV].

Per sfruttare appieno le informazioni date dallo studio degli ammassi di galassie è necessario conoscere con accuratezza la distribuzione dell'osservabile utilizzata per inferire la massa "osservata" in funzione della massa reale dell'ammasso. Seguendo il modello proposto da Lima & Hu (2005) [54] si assume una distribuzione log-normale, con varianza  $\sigma_{\ln M}^2$ , per la dispersione intrinseca nella relazione tra la massa reale dell'oggetto  $M$ , e quella osservata  $M_W$  (dedotta dalla relazione di scala  $M - W$ ). Sotto quest'ipotesi la probabilità di assegnare una massa  $M_W$  ad un oggetto di massa reale  $M$  è

$$P(M_W|M) = (2\pi\sigma_{\ln M}^2)^{-1/2} \exp[-x^2(M_W)], \quad (2.12)$$

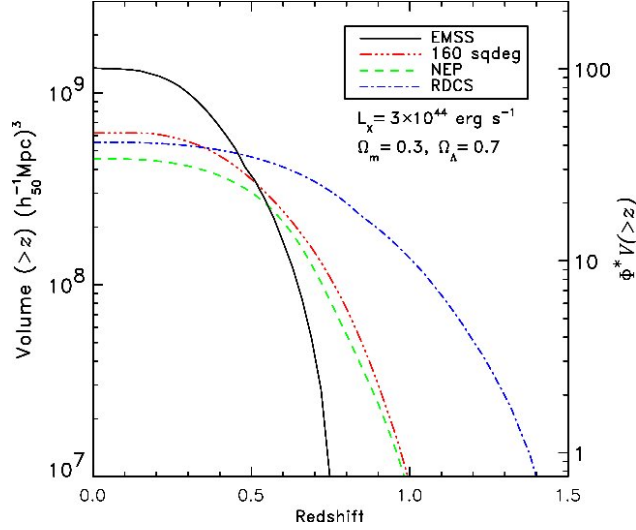


Figura 14: Volume esplorato in diverse *survey* oltre un certo redshift  $z$  per un ammasso di luminosità  $L_X = 3 \times 10^{44} [0.5 - 2\text{keV}]$ . Da [98].

dove

$$\chi(M_W) \equiv \frac{\ln M_W - \ln M - \ln M_{\text{bias}}}{\sqrt{2\sigma_{\ln M}^2}}. \quad (2.13)$$

tiene in considerazione sia la dispersione intrinseca alla relazione,  $\sigma_{\ln M}^2$ , sia un eventuale *bias* nella stima della massa,  $M_{\text{bias}}$ . Sempre seguendo le prescrizioni di Lima & Hu (2005) [54] si assume per questi due parametri una dipendenza dal redshift del tipo

$$\ln M_{\text{bias}}(z) = \ln M_{\text{bias}}(0)(1+z)^\beta \quad (2.14)$$

$$\sigma_{\ln M}(z) = \sigma_{\ln M}(0)(1+z)^\alpha. \quad (2.15)$$

In generale sia  $\sigma_{\ln M}$  che  $M_{\text{bias}}$  possono dipendere, oltre che dal redshift, anche dalla massa. Inoltre nell'eq. (2.13) non si tiene conto della dispersione indotta dal rumore nelle misurazioni di  $M_W$ , che dipende da  $M_W$  stesso in base alle specifiche della *survey*.

Questo modello risulta utile per inserire i cosiddetti parametri di *nuisance* nell'analisi della matrice di Fisher, utilizzata per fare previsioni su *surveys* future (vedi Cap.4).

## 2.5 TEST COSMOLOGICI CON GLI AMMASSI DI GALASSIE

In quanto traccianti degli aloni massivi, gli ammassi di galassie presentano diverse caratteristiche sensibili alla cosmologia. Di seguito sono presentati i principi alla base dei diversi metodi adottati per vincolare i parametri cosmologici, ed i risultati ottenuti da vari autori tramite il loro utilizzo.

### 2.5.1 Conteggi e distribuzione spaziale degli ammassi

Poiché il modello cosmologico influenza le previsioni sulle relazioni di scala, e vice versa, i due devono essere vincolati simultaneamente. Le componenti necessarie per sviluppare un'analisi statistica sotto queste condizioni sono:

- La funzione di massa e la storia d'espansione dell'Universo, che assieme predicono il numero di ammassi in funzione della massa e del redshift,  $d^2\bar{N}/dzdM = n(M, z)(dV/dz)$  (dove  $dV/dz$  rappresenta l'elemento di volume co-movente).
- Le relazioni di scala che descrivono la distribuzione della massa osservata in funzione della massa reale,  $P(M^{ob}|M)$ .
- La funzione di selezione,  $S$ , che quantifica la probabilità che un ammasso venga rivelato ed incluso nel campione.

Ipotizzando per semplicità che la *sky coverage* sia indipendente dal flusso, ( $S(f) = \Delta\Omega$ ), il numero di ammassi atteso entro un intervallo di massa osservata  $[M_{l,m}^{ob}, M_{l,m+1}^{ob}]$  e redshift  $[z_l, z_{l+1}]$  risulta essere [101]

$$\bar{N}_{l,m} = \Delta\Omega \int_{z_l}^{z_{l+1}} dz \frac{dV}{dz} \int_{M_{l,m}^{ob}}^{M_{l,m+1}^{ob}} dM^{ob} \int_0^\infty n(M, z) P(M^{ob}|M) dM. \quad (2.16)$$

La cosmologia entra in quest'espressione sia attraverso la funzione di massa,  $n(M, z)$ , che attraverso l'elemento di volume,  $dV/dz$ .

In figura 15 è mostrato un esempio di come ottenere vincoli per l'energia oscura confrontando l'evoluzione della funzione di massa degli ammassi osservata con quella predetta da diversi modelli cosmologici [119]. Nel riquadro di sinistra, (a), vengono riportate la funzione di massa calcolata da un campione di ammassi osservati in due intervalli di redshift, e la funzione di massa teorica (*linea continua*) calcolata per lo stesso redshift, entrambe valutate per un modello con  $\Omega_m = 0.25$  e  $\Omega_\Lambda = 0.75$ . Nel riquadro di destra, (b), sia i dati che il modello sono calcolati assumendo  $\Omega_\Lambda = 0$ . Come si può notare sia la funzione di massa teorica, che quella ricavata da dati, variano ad alto redshift rispetto al modello con  $\Omega_\Lambda = 0.75$ . La funzione di massa ottenuta dalle osservazioni cambia in quanto viene derivata con una differente relazione tra distanza e redshift. Il modello d'altra parte cambia poiché in assenza di energia oscura variano le predizioni per la crescita delle strutture e la densità critica ( $\delta_c$ , vedi §1.6.2). Adattando la normalizzazione della funzione di massa teorica ad alto redshift con a quella della stessa funzione valutata a basso redshift, la densità in numero di ammassi attesi per  $z > 0.55$  è in forte disaccordo con i dati. Da questo confronto è possibile rigettare la combinazione di parametri adottata nel secondo modello.

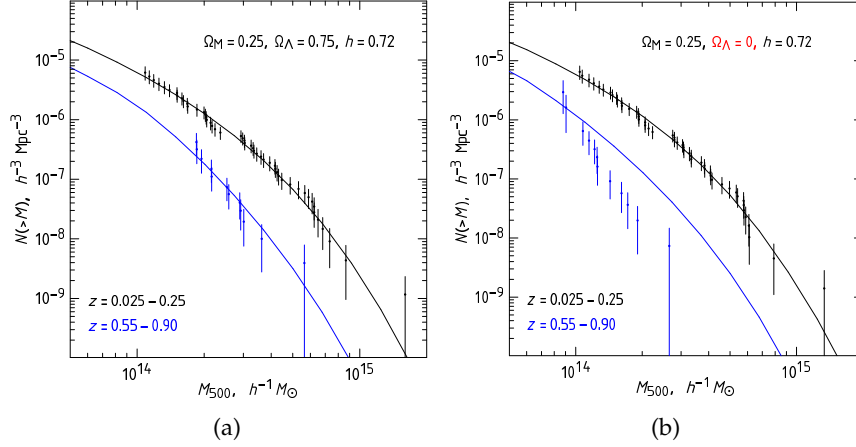


Figura 15: Confronto della funzione di massa degli ammassi misurata per due diversi redshift con le predizioni per un modello  $\Lambda$ CDM piatto (a), ed un modello aperto senza energia oscura (b). Da [119].

Un approccio per includere nell'analisi l'informazione data dal *clustering* degli ammassi è quello di considerare il loro spettro di potenza. Nonostante i vincoli forniti da quest'ultimo non siano molto stringenti, lo spettro di potenza degli ammassi si rivela essere uno strumento utile se usato in combinazione con i vincoli forniti dai *number counts*, in quanto presenta una degenerazione dei parametri differente. Seguendo l'approccio di Majumdar & Mohr (2003)[56] lo spettro di potenza degli ammassi viene definito come

$$P_{cl}(k, z) = b_{eff}^2(z)P(k, z), \quad (2.17)$$

dove il *bias* effettivo,  $b_{eff}$ , corrisponde al *bias* lineare introdotto in §1.7 pesato dalla funzione di massa

$$b_{eff}(z, k) = \frac{\int_0^{\infty} n(M, z)P(M^{ob}|M)b(M, z) dM}{\int_0^{\infty} n(M, z)P(M^{ob}|M) dM}. \quad (2.18)$$

Lo spettro di potenza medio degli ammassi,  $\bar{P}_{cl}$ , calcolato entro un certo intervallo di redshift è dato da:

$$\bar{P}_{cl}(k, z_i) = \frac{\int_{z_l}^{z_{l+1}} \frac{dV}{dz} N^2(z)P_{cl}(k, z) dz}{\int_{z_l}^{z_{l+1}} \frac{dV}{dz} N^2(z) dz}. \quad (2.19)$$

Questo corrisponde a pesare lo spettro di potenza degli ammassi con il quadrato della densità in numero degli ammassi,  $N^2(z)$ , che sono inclusi nella *survey* a redshift  $z$ . Ovviamente  $P_{cl}$  non dipende solo dalla cosmologia ma anche dalla *survey*, tramite la funzione di selezione.

Per approccio alternativo per includere l'informazione data dal *clustering* degli ammassi basto sulla covarianza dei conteggi si veda [54, 24].



### 2.5.2 Frazione di barionica

La frazione di massa in gas caldo,  $f_{\text{gas}}$ , misurata entro un raggio caratteristico dell'ammasso ad un certo redshift  $z$  può essere scritta come

$$f_{\text{gas}}(z) = \Upsilon(z) \left( \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \right), \quad (2.20)$$

dove la funzione  $\Upsilon(z)$  tiene conto della formazione stellare e di altri fenomeni che influenzano la densità barionica entro quel raggio. Dato che i processi di *feedback* portano all'espulsione del gas, generalmente  $\Upsilon < 1$ . Negli ammassi più massivi, dove l'ICM domina il contenuto barionico, la perdita di barioni è molto bassa e, per distanze radiali ragionevolmente grandi, ci si attende  $|1 - \Upsilon| \lesssim 0.1$ .

Noto  $\Omega_b$  (p.es dallo spettro del CMB o dall'abbondanza di deuterio misurata nei sistemi ad alto redshift), e calcolata  $f_{\text{gas}}$  da osservazioni nella banda X, la normalizzazione della curva  $f_{\text{gas}}(z)$  può essere utilizzata per vincolare  $\Omega_m$ . Inoltre, come è stato notato da Sasaki (1996) [102] e Pen (1997) [81], la differente dipendenza dalla distanza,  $d$ , tra la massa del gas ( $\propto d^{5/2}$ ) e la massa totale ( $\propto d$ ) misurate con osservazioni nella banda X, permette di derivare la relazione:  $f_{\text{gas}} \propto d(z)^{3/2}$ . Tramite questa, assumendo che la frazione di massa in gas non evolva con il redshift ( $f_{\text{gas}} \simeq \text{costante}$ ), è possibile discriminare tra diversi modelli cosmologici. In figura 16 viene mostrato un esempio di questo metodo [10]. Nei due riquadri sono riportate le misure della frazione di gas inferite per due modelli cosmologici differenti: a sinistra, (a), con  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$ ,  $h = 0.7$ ; a destra, (b), con  $\Omega_m = 1.0$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ ,  $h = 0.5$ . Il modello cosmologico adottato nell'immagine di sinistra risulta quello più corretto in quanto è consistente con l'ipotesi che la frazione di gas non vari con il redshift. Come le supernove Tipo Ia, gli ammassi di galassie sono utilizzati come sorgenti standard per effettuare calibrazioni, e forniscono un metodo alternativo per studiare la storia d'espansione dell'Universo.

### 2.5.3 Vincoli cosmologici

L'ultimo decennio ha visto un netto miglioramento nella qualità dei dati e delle tecniche d'analisi adottate nella cosmologia degli ammassi. Nella tabella 2 sono riportati i risultati ottenuti da vari autori tramite i diversi test cosmologici esposti fin ora. Le diverse analisi sono state effettuate con campioni provenienti da diverse *survey*, in grado di identificare diverse popolazioni di ammassi, in base alla loro massa e redshift. I risultati dei diversi lavori sono in buon accordo tra loro; in particolare l'accordo tra i vari vincoli su  $\sigma_8$  riflette la convergenza dei risultati per le differenti tecniche utilizzate per inferire la massa.

Lo studio degli ammassi permette di studiare anche altri aspetti fondamentali della cosmologia. Uno di questi è la natura della materia

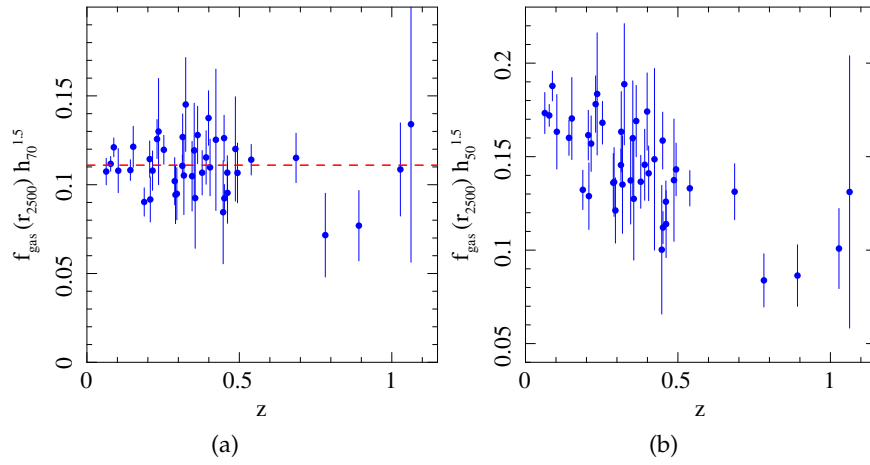


Figura 16: Confronto delle misurazioni della frazione di massa in gas per un modello  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$ ,  $h = 0.7$  (consistente con l'ipotesi  $f_{\text{gas}} \simeq \text{costante}$ ) ed un modello  $\Omega_m = 1.0$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ ,  $h = 0.5$ . Da [10].

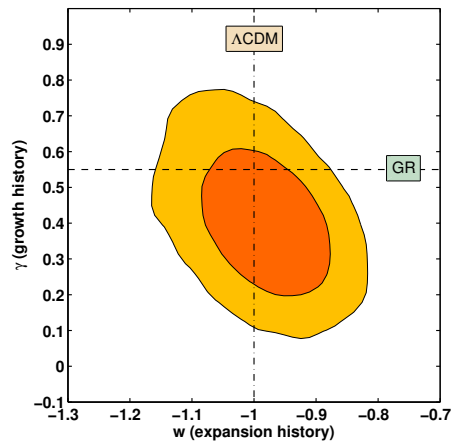


Figura 17: Regioni di confidenza al 68.3% e 95.4% per l'analisi congiunta delle deviazioni dalla relatività generale, parametrizzata da  $\gamma$ , e dalla storia d'espansione per un modello  $\Lambda\text{CDM}$ , parametrizzata da  $w$ . L'analisi utilizza una combinazione di dati provenienti da: *number counts*,  $f_{\text{gas}}$ , WMAP, SNIa, e BAO. Da [90].

Tabella 2: Risultati recenti ottenuti dallo studio degli ammassi di galassie<sup>a,b</sup>

Referenze <sup>c</sup>	Dati	$\sigma_8$	$\Omega_m$	$\Omega_{de}$	$w$	$h$
<b>Local abundance and evolution<sup>d</sup></b>						
M10	X-ray	$0.82 \pm 0.05$	$0.23 \pm 0.04$	$1 - \Omega_m$	$-1.01 \pm 0.20$	
V09	X-ray	$0.81 \pm 0.04$	$0.26 \pm 0.08$	$1 - \Omega_m$	$-1.14 \pm 0.21$	
<b>Local abundance only</b>						
R10	optical	$0.80 \pm 0.07$	$0.28 \pm 0.07$	$1 - \Omega_m$	$-1$	
H09	X-ray	$0.88 \pm 0.04$	$0.3$	$1 - \Omega_m$	$-1$	
<b>Local abundance and clustering</b>						
S03	X-ray	$0.71^{+0.13}_{-0.16}$	$0.34^{+0.09}_{-0.08}$	$1 - \Omega_m$	$-1$	
<b>Gas-mass fraction</b>						
A08	X-ray		$0.27 \pm 0.06$	$0.86 \pm 0.19$	$-1$	
A08	X-ray		$0.28 \pm 0.06$	$1 - \Omega_m$	$-1.14^{+0.27}_{-0.35}$	
E09	X-ray		$0.32 \pm 0.05$	$1 - \Omega_m$	$-1.1^{+0.7}_{-0.6}$	
Lo6	X-ray+SZ		$0.40^{+0.28}_{-0.20}$	$1 - \Omega_m$	$-1$	

<sup>a</sup>  $\Omega_{de} = 1 - \Omega_m$  indica che si assume un modello piatto (o l'utilizzo di *priors* da WMAP che richiedono una densità pari a quella critica entro pochi punti percentuali); i parametri per cui non è indicata l'incertezza sono mantenuti fissi nell'analisi corrispondente.

<sup>b</sup> Le barre di errore di ogni parametro sono calcolate al 68.3% di livello di confidenza marginalizzando rispetto a tutti i parametri restanti, e comprendono la stima degli errori sistematici (fatta eccezione per S04).

<sup>c</sup> A08 = Allen et al. (2008) [10]; E09 = Etori et al. (2009) [29]; H09 = Henry et al. (2009) [39]; Lo6 = LaRoque et al. (2006) [50]; M10 = Mantz et al. (2010) [62]; R10 = Rozo et al. (2010) [99]; S03 = Schuecker et al. (2003) [103]; V09 = Vikhlinin et al. (2009) [119].

<sup>d</sup> Per poter vincolare  $w$  dall'evoluzione della funzione di massa la *survey* deve estendersi oltre  $z \gtrsim 0.3$ .

oscura, che può essere studiata ad esempio analizzando il profilo di densità degli aloni, o ricercando particolari linee di emissione associate al decadimento delle particelle di materia oscura. Inoltre, i vincoli posti dagli ammassi sulla crescita delle strutture, permettono di discriminare i diversi modelli di energia oscura o di gravità modificata. Una parametrizzazione del fattore di crescita lineare ( $D$ ) spesso adottata per valutare possibili deviazioni dalla teoria della relatività generale è

$$\frac{d \ln D}{d \ln a} = \Omega_m(a)^\gamma. \quad (2.21)$$

La relatività generale prevede per il parametro  $\gamma$  un valore costante di circa 0.55 indipendente dalla scala. In due recenti articoli Rapetti et al. [89, 90], utilizzando questa parametrizzazione, hanno ottenuto dei risultati simultaneamente consistenti con la relatività generale ( $\gamma \sim 0.55$ ) ed il modello  $\Lambda$ CDM ( $w = -1$ ) entro un livello di confidenza del 68% (vedi fig. 17).

Infine, come sarà spiegato meglio nel capitolo 3, la crescita delle strutture cosmiche è sensibile alla massa totale dei neutrini,  $\sum m_\nu$ . In particolare lo studio degli ammassi di galassie, grazie ai forti vincoli posti su  $\sigma_8$ , permette di rompere la degenerazione tra questo parametro e  $\sum m_\nu$ , e quindi di porre dei limiti molto stringenti sulla massa totale dei neutrini.

# LA FISICA DEI NEUTRINI MASSIVI

---

La fisica dei neutrini fornisce un affascinante esempio di come la cosmologia e la fisica delle particelle siano tra loro correlate. Dal punto di vista della fisica delle particelle, l'esistenza dei neutrini fu proposta per la prima volta da Pauli nel 1930 [77], per essere poi confermata sperimentalmente ventisei anni dopo da Reines e Cowan [94]. Da quel momento in poi la fisica dei neutrini ha visto un continuo susseguirsi di nuove teorie e scoperte. In particolare la conferma sperimentale che le diverse specie di neutrini oscillano tra di loro ha permesso di stabilire in modo definitivo che i neutrini sono particelle massive, dando così il via ad una lunga serie di esperimenti, tutt'oggi in corso, atti a misurarne la massa. Per quanto riguarda la cosmologia, l'idea che i neutrini massivi potessero influenzare la storia dell'Universo e la formazione di strutture è stata considerata e discussa da più di trent'anni. Inoltre almeno due specie di neutrini possiedono una massa tale da non essere più relativistici ai giorni nostri, costituendo così l'unica componente di materia oscura finora nota. I neutrini massivi incidono su una molteplicità di fenomeni cosmologici, come la formazione di strutture su grande scala, la nucleosintesi del Big Bang, o le anisotropie della radiazione cosmica di fondo. Grazie all'incredibile quantità e qualità dei dati oggi presenti è possibile rivelare tali effetti, ed utilizzarli per vincolare i parametri che descrivono la fisica dei neutrini.

In questo capitolo si darà particolare risalto a questo secondo aspetto, ovvero sui vincoli che la cosmologia permette di porre sulla massa dei neutrini, prestando particolare attenzione ai vincoli che è possibile ricavare dallo studio della formazione delle strutture cosmiche. In dettaglio, nella prima sezione (§3.1) verrà data una panoramica generale della fisica dei neutrini in base ai risultati ottenuti dalla fisica delle particelle elementari; in §3.2 si spiegherà l'origine del fondo cosmico di neutrini, per poi passare in §3.3–§3.4 a descrivere gli effetti che ha sulla formazione di strutture. Nelle sezioni §3.5–§3.6–§3.7 si analizzeranno i modi in cui la massa dei neutrini incide sullo spettro di potenza e sulla funzione di massa. Infine in §3.8 si daranno i vincoli

sulla massa totale dei neutrini che è possibile inferire oggi giorno dai dati cosmologici.

Per approfondire l'argomento è possibile far riferimento a numerosi articoli di rassegna recenti (p.es [52, 37]); mentre per una disamina dettagliata di molti altri aspetti cosmologici relativi alla fisica dei neutrini si rimanda il lettore a [26].

3.1 OSCILLAZIONE DEI NEUTRINI E MISURA DELLA LORO MASSA

Il modello standard delle particelle elementari descrive il neutrino come un particella leptonica priva di carica a massa nulla. Tuttavia quest'ultima assunzione del modello non risiede su forti basi teoriche, difatti esistono molte estensioni ben motivate del modello standard per le quali il neutrino acquista una massa.

Il primo a proporre l'idea che i neutrini, in analogia con l'oscillazione dei kaoni neutri, potessero subire una trasformazione del tipo  $\bar{\nu} \leftrightarrow \nu$  fu Pontecorvo nel 1957 [85]. Pochi anni dopo, in seguito alla scoperta di diverse famiglie leptoniche di neutrini ( $\nu_e, \nu_\mu$ ), Maki, Nakagawa e Sakata [57] suggerirono la possibilità che i neutrini non conservassero la loro carica leptonica,  $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ . Secondo il modello teorico questi processi che violano la conservazione del sapore, detti di oscillazione, possono verificarsi solo se esiste una differenza di massa tra le varie famiglie di neutrini. Oggigiorno si hanno prove incontrovertibili dell'oscillazione dei neutrini date da una grande varietà di esperimenti condotti con neutrini solari, atmosferici, o prodotti in reattori nucleari o acceleratori. Da qui l'esigenza di sviluppare una nuova teoria fondamentale delle particelle, per cui almeno due neutrini abbiano massa non nulla, e di cui il modello standard rappresenti il limite a basse energie.

Dagli esperimenti condotti al *Large Electron-Positron Collider* (LEP) sul decadimento del bosone Z risulta che il numero di neutrini sensibili all'interazione debole (neutrini di sapore o attivi) corrisponde a tre,  $N_\nu = 2.994 \pm 0.012$  [76]. Questi tre stati di sapore ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) altro non sono che combinazioni lineari degli autostati di massa, che in base ai risultati degli esperimenti di oscillazione sono almeno tre (vedi sotto).

In uno scenario in cui sono previsti tre neutrini gli autostati di sapore,  $\nu_f$ , e massa,  $\nu_m$ , sono legati tra loro dalla così detta matrice di *mixing*, o matrice di Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata:

$$\nu_f = U \nu_m \tag{3.1}$$

dove U può essere parametrizzata come [76, 32]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

I vari  $c_{ij}$  e  $s_{ij}$  rappresentano rispettivamente i coseni ed i seni degli angoli di *mixing*  $\theta_{ij}$ , con  $ij = 12, 23, 13$ , mentre  $\delta$  è il fattore di fase legato alla violazione della simmetria CP. Insieme alle tre masse, si ha un totale di sette parametri di "sapore". Nel caso in cui i neutrini

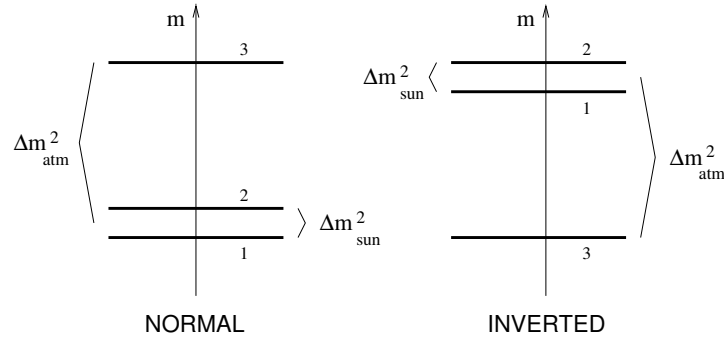


Figura 18: I due possibili spettri di massa dedotti dai dati sperimentali sull'oscillazione dei neutrini: a sinistra la gerarchia normale (NH), a destra la gerarchia inversa (IH). Da [52].

siano particelle di Majorana (ovvero  $\nu = \bar{\nu}$ ) è necessario aggiungere altre due fasi alla matrice di *mixing*, che non incidono sulle osservabili degli esperimenti di oscillazione, ma sono rilevanti nei processi in cui viene violato il numero leptonico come il doppio decadimento beta.

Nel limite relativistico la probabilità che un neutrino oscilli dipende, oltre che dai parametri della matrice di *mixing*, dalla differenza delle masse al quadrato,  $\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2$  o  $\Delta m_{31}^2 = m_3^2 - m_1^2$ , a seconda che si tratti di neutrini solari o atmosferici. Vincoli recenti su questi parametri sono [35]:

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= (34 \pm 3)^\circ, & \theta_{23} &= (43_{-7}^{+11})^\circ, & \theta_{13} &\leq 12.5^\circ, \\ \Delta m_{21}^2 &= (7.6 \pm 0.6) \times 10^{-5} \text{eV}^2, & |\Delta m_{31}^2| &= (2.4 \pm 0.4) \times 10^{-3} \text{eV}^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sfortunatamente gli esperimenti di oscillazione sono insensibili al valore assoluto della massa dei neutrini, in quanto le misurazioni di  $\Delta m_{21}^2$  e  $|\Delta m_{31}^2|$  permettono di ipotizzare due possibili spettri di massa per i neutrini (vedi figura 18), ma lasciano la massa di un neutrino non vincolata. Questi due modelli dipendono dal segno di  $\Delta m_{31}^2$ , e sono noti rispettivamente con il nome di gerarchia normale ( $\Delta m_{31}^2 > 0$ , NH, riquadro di sinistra) e gerarchia inversa ( $\Delta m_{31}^2 < 0$ , IH, riquadro di destra). Se la massa del neutrino più leggero è piccola rispetto a quella delle altre due famiglie allora gli stati di massa seguiranno uno schema gerarchico, al contrario, per una massa minima molto maggiore della differenza di masse, i tre neutrini possono essere considerati degeneri.

É inoltre possibile che il numero di stati di neutrini massivi sia superiore al numero di famiglie leptoniche. In questo caso, per non contraddire i risultati del LEP, questi ulteriori stati del neutrino dovrebbero essere sterili, ovvero insensibili all'interazione debole. In seguito ai controversi risultati del *Liquid Scintillator Neutrino Detector*, i cui dati suggerivano l'esistenza di un quarto neutrino sterile con una massa dell'ordine del eV [58], sono stati avviati vari esperimenti, in corso tutt'oggi, per verificare la veridicità di quest'ipotesi [46, 73].



Come già accennato, gli esperimenti di oscillazione non permettono di inferire il valore assoluto della massa dei neutrini. Per misurare questi parametri è tuttavia possibile analizzare diversi processi sensibili alla massa di queste particelle. Un prima possibilità è quella di cercare gli effetti cinematici di un neutrino massivo nei decadimenti beta ordinari,  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$  (p.es il decadimento del trizio). L'effetto prodotto dalla massa del neutrini è tuttavia molto difficile da rivelare, in quanto si presenta in una parte di spettro degli elettroni caratterizzata da un basso numero di eventi. Gli esperimenti che si basano su questo tipo di decadimento permettono di misurare il parametro di massa effettiva  $m_\beta = (\sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2)^{1/2}$ . Il limite superiore che si ha attualmente per questo parametro è  $m_\beta < 2.3\text{eV}$ , entro il 95% di livello di confidenza [49].

Un'altra possibilità è data dagli esperimenti sul doppio decadimento beta,  $(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^-$  (in breve  $0\nu 2\beta$ ), che può verificarsi nel caso in cui i neutrini siano particelle di Majorana. L'ampiezza di questo processo è proporzionale al parametro di massa effettiva  $m_{\beta\beta} = |\sum_i U_{ei}^2 m_i|$ . Il limite superiore più stringente per  $m_{\beta\beta}$  si ha dal doppio decadimento beta del  $^{76}\text{Ge}$  misurato nell'esperimento Heidelberg-Moscow, che fornisce  $m_{\beta\beta} < 0.27\text{eV}$  entro il 90% di livello di confidenza [97]. Combinando queste due metodologie si arriva a restringere l'intervallo per la somma delle masse delle tre famiglie di neutrini a

$$0.056 (0.095)\text{eV} \lesssim \sum_i m_i \lesssim 6\text{eV}, \quad (3.4)$$

dove il limite superiore viene esclusivamente dai risultati dal decadimento del trizio, mentre il limite inferiore corrisponde al valore minimo della massa totale dei neutrini nella gerarchia normale (inversa).

Un'ultima possibilità è quella di ricercare gli effetti cinematici della massa dei neutrini sulla formazione di strutture cosmiche. Come sarà discusso in modo esaustivo nei prossimi paragrafi, il fatto che i neutrini abbiano massa non nulla implica che queste particelle contribuiscono alla densità di energia oscura attuale. Tuttavia, dato che la loro storia termica differisce notevolmente da quella della materia oscura fredda, i neutrini lasciano un'impronta caratteristica sulle strutture cosmiche dipendente dalla loro massa totale.

## 3.2 FONDO COSMICO DI NEUTRINI

### 3.2.1 Storia termica dei neutrini

Il modello standard del big bang predice l'esistenza di un fondo cosmico di neutrini, con una densità in numero leggermente inferiore a quella dei fotoni che costituiscono il CMB. Prodotti ad alte temperature

dalle interazioni deboli, i neutrini cosmici sono mantenuti in equilibrio termico dal grande numero di interazioni con i leptoni carichi, fintanto che la *rate* di queste reazioni non si riduce a causa dell'espansione dell'Universo. Fino a che i neutrini sono accoppiati con il plasma primordiale, la loro distribuzione dei momenti segue la distribuzione di Fermi-Dirac

$$f_{\text{eq}}(\mathbf{p}) = \left[ \exp \left( \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\mu}_\nu}{T} \right) + 1 \right]^{-1}, \quad (3.5)$$

dove  $T$  è la temperatura del plasma e  $\mathbf{p}$  il momento delle particelle. Il potenziale chimico dei neutrini  $\boldsymbol{\mu}_\nu$  può essere ignorato data la simmetria tra  $\nu$  e  $\bar{\nu}$  presente nel plasma primordiale [106]. Man mano che l'Universo si raffredda, la frequenza con cui hanno luogo le interazioni deboli tra i neutrini ed il plasma,  $\Gamma_\nu$ , si riduce, fintanto che le particelle non si disaccoppiano dal plasma. Per stimare la temperatura a cui avviene questo disaccoppiamento,  $T_d$ , si confronta  $\Gamma_\nu$  con il tasso di espansione dell'Universo dato dal parametro di Hubble; ovvero  $T_d$  è quella temperatura per cui si ha

$$H = \Gamma_\nu \Big|_{T=T_d}. \quad (3.6)$$

La frequenza di interazione è data da

$$\Gamma_\nu = \langle \sigma_\nu n_\nu \rangle, \quad (3.7)$$

dove  $\sigma_\nu \propto G_F^2$  è la sezione d'urto per i processi tra leptoni carichi e neutrini, con  $G_F$  la costante di Fermi, e  $n_\nu$  è la densità in numero di neutrini. Il tasso di espansione invece si può scrivere come

$$H = \sqrt{\frac{8\pi\rho}{3M_P^2}}, \quad (3.8)$$

dove  $\rho$  è la densità di energia totale e  $M_P$  la massa di Planck. Approssimando i fattori numerici all'unità, con  $\Gamma_\nu \approx G_F^2 T^5$  e  $H \approx T^2/M_P$ , si ottiene la stima grossolana  $T_d \approx 1\text{MeV}$ . Calcoli più raffinati forniscono  $T_d(\nu_e) \simeq 2.4\text{MeV}$  e  $T_d(\nu_{\mu,\tau}) \simeq 3.7\text{MeV}$ , utilizzando il modello standard delle particelle [37]. Una temperatura di disaccoppiamento di circa  $2.5 - 3\text{MeV}$  implica che i neutrini si disaccoppiano dal plasma quando sono ancora ultra relativistici. Questo fa sì che la distribuzione dei momenti (eq. (3.5)) non dipenda della massa dei neutrini anche dopo il loro disaccoppiamento.

Poco dopo il disaccoppiamento dei neutrini la temperatura dei fotoni scende al disotto la massa dell'elettrone,  $\simeq 0.5\text{MeV}$ , favorendo l'annichilazione tra elettroni e positroni. L'entropia scambiata in questi processi riscalda il gas di fotoni, ma non influenza i neutrini oramai completamente disaccoppiati dal plasma. Questo fa sì che la temperatura dei fotoni decresca più lentamente di  $a^{-1}$  fintanto che i processi

di annichilazione tra  $e^- - e^+$  continuano, assestando il rapporto tra la temperatura dei fotoni ( $T_\gamma$ ) e quella dei neutrini ( $T_\nu$ ) a

$$\frac{T_\gamma}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \simeq 1.40102 \quad (3.9)$$

Questo valore viene leggermente modificato in 1.3978 tenendo in considerazione i vari processi che distorcono lo spettro dei neutrini, come l'oscillazione tra le famiglie o il disaccoppiamento non istantaneo dal plasma.

Nota la temperatura  $T_\nu$  e la distribuzione dei momenti è possibile ricavare tutte le quantità collegate ai neutrini cosmici per tempi successivi. Ad esempio la densità in numero di ogni famiglia è fissata dalla temperatura

$$n_\nu = \frac{3}{11}n_\gamma = \frac{6\zeta(3)}{11\pi^2}T_\nu^3, \quad (3.10)$$

che fornisce un valore di  $n_\nu = 113\text{cm}^{-3}$  neutrini ed antineutrini per ogni specie di sapore. Per quanto riguarda la densità di energia può essere approssimata nel limite relativistico e non, rispettivamente da

$$\begin{aligned} \rho_\nu(m_\nu \ll T_\nu) &= \frac{7\pi^2}{120} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} T_\nu^4 \\ \rho_\nu(m_\nu \gg T_\nu) &= m_\nu n_\nu u. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si può vedere dalla seconda equazione che nel caso non relativistico la densità di energia dipende dal valore della massa.

Nella loro fase relativistica i neutrini contribuiscono alla densità di materia relativistica, e quindi influiscono sul tasso di espansione dell'Universo durante l'era dominata dalla radiazione. Il loro contributo al contenuto totale di radiazione viene spesso parametrizzato in termini del numero effettivo di neutrini  $N_{\text{eff}}$  tramite la relazione

$$\rho_r = \left[1 + \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} N_{\text{eff}}\right] \rho_\gamma, \quad (3.12)$$

dove il valore attuale della densità di energia dei fotoni ( $\rho_\gamma$ ) è noto dalla misurazione della temperatura del CMB. Considerando tre famiglie di neutrini, e tenendo conto degli effetti di un disaccoppiamento non istantaneo (parte dell'energia dell'annichilazione  $e^- - e^+$  viene depositata nei neutrini) si ottiene  $N_{\text{eff}} = 3.046$ . Ogni discostamento da questo valore rivelerebbe la presenza di un'ulteriore componente relativistica non prevista dal modello standard. L'eq. (3.12) è valida da quando il disaccoppiamento dei neutrini è completo, e lo rimane fintanto che rimangono relativistici.

Il valore di  $N_{\text{eff}}$  può essere vincolato confrontando le previsioni teoriche per le abbondanze primordiali degli elementi leggeri con i dati osservativi, una volta noto il rapporto tra barioni e fotoni  $\eta_b = n_b/n_\gamma$ .

Questo perché il valore di  $N_{\text{eff}}$  incide sul tasso di espansione dell'Universo, e quindi sul parametro  $H$ , tramite il suo contributo alla densità di energia totale. Questo a sua volta incide sulla temperatura alla quale il rapporto tra protoni e neutroni congela, e quindi sull'abbondanza di  ${}^4\text{He}$ . I risultati di queste analisi suggeriscono un valore di  $N_{\text{eff}} \simeq 3.7$ , ovvero più alto di quello previsto dal modello standard, anche se la possibilità di errori sistematici nella misura delle abbondanze primordiali non permette di giungere a conclusioni definitive. È tuttavia interessante notare che anche le osservazioni del CMB attualmente sembrerebbero indicare un valore di  $N_{\text{eff}} > 3$  (p.es. [48] fornisce  $N_{\text{eff}} = 4.25_{-0.80}^{+0.76}$  entro  $2\sigma$ ).

### 3.2.2 Neutrini massivi e materia oscura

I neutrini massivi sono dei candidati naturali a formare parte della materia oscura, soprattutto in quanto si è certi della loro esistenza, al contrario di molte altre particelle ipotizzate. Come i fotoni del CMB, i neutrini cosmici si trovano ovunque nell'Universo con una densità in numero di 339 neutrini ed antineutrini per  $\text{cm}^3$ . A seconda del valore della loro massa questa densità cresce all'interno delle buche di potenziale degli aloni dove i neutrini possono addensarsi, anche se analisi recenti di tali effetti portano a concludere che questa sovradensità è limitata ad un piccolo fattore (p.es. [22]).

Dai risultati degli esperimenti di oscillazione si deduce che almeno due specie massive di neutrini non sono relativistici oggi, poiché sia  $(\Delta m_{31}^2)^{1/2} \simeq 0.047\text{eV}$  che  $(\Delta m_{21}^2)^{1/2} \simeq 0.009\text{eV}$  sono maggiori della temperatura odierna dei neutrini,  $T_{\nu,0} = 1.95\text{K} \simeq 1.7 \times 10^{-4}\text{eV}$ . Il contributo alla densità presente di materia dato da  $N_\nu$  specie di neutrini degeneri con interazioni deboli standard è pari a

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_c} = \frac{N_\nu m_\nu}{94.57 h^2 \text{eV}}. \quad (3.13)$$

Imponendo la semplice condizione che la densità di neutrini non sia superiore alla densità critica ( $\Omega_\nu < 1$ ) si ottiene il limite superiore

$$m_\nu \lesssim \frac{46\text{eV}}{N_\nu}, \quad (3.14)$$

[33]. Un limite superiore più realistico può essere posto considerando i dati osservativi oggi presenti, che indicano  $\Omega_m \simeq 0.3$ , di cui circa il 5% sotto forma di materia barionica. In questo caso  $\Omega_\nu h^2 \lesssim 0.12$ , che implica per la massa di una specie di neutrini il limite superiore

$$m_\nu \lesssim \frac{11\text{eV}}{N_\nu}, \quad (3.15)$$

un valore comparabile al limite superiore imposto dagli esperimenti sul decadimento beta.

Particelle di materia oscura con una grande dispersione di velocità come quella dei neutrini vengono dette materia oscura calda (HDM). Il ruolo dei neutrini come componente principale della materia oscura è stato ampiamente studiato sin dagli anni '70 (per una *review* storica sull'argomento si veda [88]); tuttavia fu ben presto realizzato che un Universo dominato da HDM non poteva riprodurre i dati osservativi (p.es. [121]), in quanto l'alta dispersione di velocità delle particelle non permetteva l'evoluzione delle perturbazioni su scale inferiori alla lunghezza di *free-streaming* (vedi §1.2.3). In particolare per un tale Universo la formazione di strutture segue uno scenario *top-down*, dove per primi si formano gli oggetti più massivi, come i super ammassi di galassie, mentre le strutture più piccole come gli ammassi e le galassie si formano dalla successiva frammentazione degli oggetti più grandi. Questo scenario è in netto contrasto con i dati osservativi che indicano che le galassie sono più vecchie degli ammassi.

Dato il fallimento di questo modello l'attenzione venne spostata su possibili candidati di materia oscura fredda, ovvero particelle che nell'era dominata dalla materia sono già non relativistiche. Il modello oggi favorito è per l'appunto quello di  $\Lambda$ CDM, dove la componente principale di materia oscura è la CDM, e la materia oscura calda costituisce solo una piccola frazione alla densità totale di materia.

### 3.3 L'EFFETTO DEI NEUTRINI MASSIVI SULLA FORMAZIONE DI STRUTTURE

#### 3.3.1 Lunghezza di *free-streaming* per i neutrini

Come si è visto nella sezione precedente i neutrini, data la loro piccola massa, divengono non relativistici solo in epoche recenti, comportandosi quindi come particelle di materia oscura calda. Data la loro natura di particelle debolmente interagenti i neutrini diffondono su scale inferiori alla lunghezza di *free-streaming*, dissipando così le loro fluttuazioni di densità al di sotto di questa scala (vedi §1.2.3). Durante l'era RD e MD la distanza tipica lungo la quale diffondono i neutrini è asintoticamente proporzionale a  $v_{\text{th}}/H$ , dove  $v_{\text{th}}$  è la velocità termica delle particelle. La lunghezza propria di *free-streaming* risulta quindi

$$\lambda_{\text{fs}}(t) = 2\pi \frac{a(t)}{k_{\text{fs}}(t)} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{v_{\text{th}}(t)}{H(t)}, \quad k_{\text{fs}}(t) = \left( \frac{4\pi G \bar{\rho}(t) a^2(t)}{v_{\text{th}}^2(t)} \right). \quad (3.16)$$

Fintanto che i neutrini sono relativistici viaggiano alla velocità della luce e la loro lunghezza di *free-streaming* è uguale al raggio di Hubble. Una volta divenuti non relativistici la loro velocità termica scala come

$$v_{\text{th}} \equiv \frac{\langle p \rangle}{m_{\nu}} \simeq \frac{3T_{\nu}}{m_{\nu}} = \frac{3T_{\nu,0}}{m_{\nu}} \left( \frac{a_0}{a} \right) \simeq 150(1+z) \left( \frac{1\text{eV}}{m} \right) \text{ km s}^{-1}. \quad (3.17)$$

Inserendo quest'equazione nell'eq. (3.16) si ottengono rispettivamente la lunghezza ed il numero d'onda di *free-streaming* nell'era dominata dalla materia o dalla costante cosmologica:

$$\begin{aligned}\lambda_{fs}(t) &= 7.7 \frac{1+z}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3}} \left( \frac{1\text{eV}}{m} \right) h^{-1} \text{Mpc} \\ k_{fs}(t) &= 0.82 \frac{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3}}{(1+z)^2} \left( \frac{1\text{eV}}{m} \right) h \text{Mpc}^{-1},\end{aligned}\quad (3.18)$$

dove  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  sono la densità di materia e di costante cosmologica valutate a  $z = 0$ . Dunque, dopo la transizione alla fase non relativistica, durante l'era dominata dalla materia, la lunghezza di *free-streaming* continua sì a crescere,  $\lambda_{fs} \propto v_{th}/H \propto (aH)^{-1} \propto t^{1/3}$ , ma più lentamente del fattore di scala,  $a \propto t^{2/3}$ , ovvero la lunghezza di *free-streaming* co-movente,  $\lambda_{fs}/a$ , decresce come  $(a^2H)^{-1} \propto t^{-1/3}$ . Di conseguenza, dato che i neutrini diventano non relativistici durante l'era MD, il numero d'onda di *free-streaming* co-movente passa per un minimo,  $k_{nr}$  al momento della transizione di fase, cioè quando  $m = \langle p \rangle = 3T_\nu$ , ovvero per  $(1+z_{nr}) \simeq 2.0 \times 10^3 (m/1\text{eV})$ . Il valore di questo minimo risulta essere

$$k_{nr} \simeq 0.018 \Omega_m^{1/2} \left( \frac{m}{1\text{eV}} \right) h \text{Mpc}^{-1}. \quad (3.19)$$

In figura 19 viene mostrato il numero d'onda di *free-streaming* co-movente in funzione del fattore di scala,  $a$ , per un modello con  $\sum m_\nu = 1.2\text{eV}$ , e la scala di Hubble,  $aH$  [110]. L'area colorata indica i modi delle fluttuazioni di densità dei neutrini che possono crescere, ovvero quelli che si trovano all'interno dell'orizzonte, su scale superiori alla lunghezza di *free-streaming*. Inoltre si può vedere come, passato il punto di minimo  $k_{nr}$ , al crescere del fattore di scala la velocità termica dei neutrini diminuisca, ed il numero di modi che possono crescere aumenta di conseguenza. Da notare che per una massa totale dei neutrini minore la regione colorata sarebbe più piccola poiché  $k_{fs}$  può crescere con il fattore di scala solo dopo che i neutrini divengono non relativistici.

### 3.3.2 Teoria lineare delle perturbazioni in presenza di neutrini

L'evoluzione delle perturbazioni di densità dei neutrini può essere ricavata tramite l'equazione di Boltzmann non collisionale (o equazione di Vlasov) introdotta in §1.3, in particolare risolvendo l'eq. (1.70)

$$f'_1 + ik\mu \frac{q}{E_q} f_1 - \frac{q}{4} \frac{\partial f_0}{\partial q} \Psi_q = 0, \quad (3.20)$$

dove il termine collisionale,  $(\partial f_1 / \partial \tau)_c$ , è stato posto uguale a zero. Quest'equazione fornisce la risposta della funzione di distribuzione dei neutrini nello spazio delle fasi alla perturbazioni della metrica.

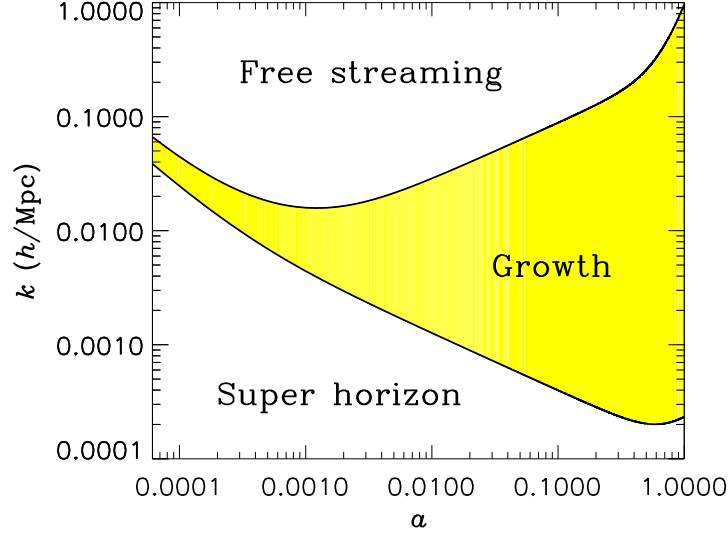


Figura 19: Evoluzione col fattore di scala della scala di Hubble (*linea inferiore*) e del numero d’onda di *free-streaming* (*linea superiore*) per un modello con  $\sum m_\nu = 1.2\text{eV}$ . Tutti i modi all’interno dell’area colorata possono crescere, mentre i modi al disopra della regione colorata sono soppressi dal *free-streaming*). Da [110].

*Perturbazioni dei neutrini durante il regime relativistico*

Usando le stesse notazioni date nel capitolo 1, per neutrini ultra relativistici ( $E_q = q$ ) risolvendo l’equazione di Vlasov al primo ordine in  $k\tau$ , ed utilizzando le equazioni di Einstein (1.51)–(1.52), si ottiene per scale maggiori dell’orizzonte (vedi [52] e referenze all’interno):

$$\delta_\nu = \delta_\gamma = -2\Psi = 4\frac{\delta T_\nu}{T_\nu}, \quad \theta_\nu = \theta_\gamma = -\frac{1}{2}k^2\tau\Psi$$

$$\Phi = \left(1 + \frac{2}{5}R_\nu\right)\Psi, \quad \text{con} \quad R_\nu \equiv \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}_\nu + \bar{\rho}_\gamma}. \quad (3.21)$$

Quindi su scale al disopra dell’orizzonte le fluttuazioni di densità di neutrini è proporzionale alle fluttuazioni della metrica, che fuori dall’orizzonte sono congelate. Per tre neutrini standard non relativistici si ha  $R_\nu \simeq 0.405$  e  $\Phi \simeq 1.162\Psi$ .

Nell’era dominata dalla radiazione, per modi al disotto della scala di Hubble, ovvero su scale inferiori a quella di *free-streaming*, il tensore di *stress* (vedi eq. 1.55) non è più trascurabile. L’effetto che produce è analogo a quello di una forza d’attrito viscoso, che dissipa la fluttuazioni di densità dei neutrini. Passata l’equivalenza, sempre su scale inferiori a quella dell’orizzonte, la perturbazioni della metrica  $\Phi$  e  $\Psi$  sono congelate e risolvendo l’equazione di Vlasov si ottiene

$$\delta_\nu = -4\Psi(k) + \alpha(k) \sin(k\tau)/(k\tau), \quad (3.22)$$

dove  $\alpha(k)$  è una costante d’integrazione. Il primo termine corrisponde alla configurazione di equilibrio stazionario, per la quale la pressione relativistica compensa esattamente la forza gravitazionale.

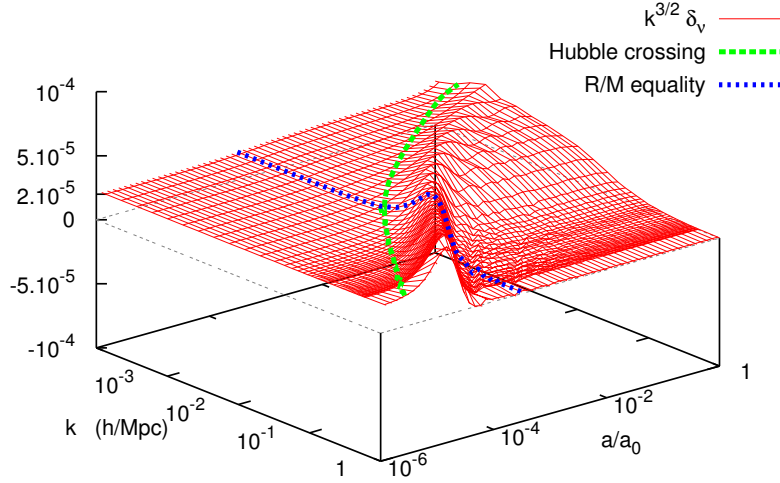


Figura 20: Evoluzione delle perturbazioni di densità dei neutrini nella gauge conforme in funzione del numero d’onda  $k$  e del fattore di scala  $a$ , per un modello  $\Lambda$ CDM con tre neutrini a massa nulla. La soluzione è stata ottenuta numericamente tramite il codice CMBFAST [104], ponendo la condizione iniziale (arbitraria)  $k^{3/2}\Psi = -10^{-5}$ . Come si può vedere, al contrario dei fotoni che al disotto della scala di Hubble oscillano fino all’equivalenza, il contrasto di densità viene immediatamente smorzato dopo appena mezza oscillazione. Dopo l’equivalenza  $\delta_\nu$  rimane costante: la pressione di radiazione ed il *free-streaming* ne ostacolano il collasso gravitazionale. Da [110].

In figura 20 sono riassunti i vari andamenti di  $\delta_\nu$  nel regime relativistico (da [52]). Al disopra dell’orizzonte le perturbazioni di densità restano costanti sia prima che dopo l’equivalenza. Per i modi interni all’orizzonte l’effetto combinato della pressione relativistica e del *free-streaming* risulta in una soppressione del contrasto di densità dei neutrini: durante l’era dominata dalla radiazione  $\delta_\nu$  tende a zero, invece di oscillare come il fluido di barioni-fotoni (vedi §1.3.2), mentre nell’epoca MD rimane costante invece di crescere come  $\delta_{\text{cdm}}$  e  $\delta_b$  (vedi §1.2.4).

*Perturbazioni dei neutrini durante il regime relativistico*

Per neutrini non relativistici le equazioni di continuità (1.59) e di Eulero (1.60) introdotte nel capitolo 1 assumono la forma di quelle per la materia non relativistica

$$\delta'_\nu + \theta_\nu = 3\Phi', \quad \theta'_\nu + \frac{a'}{a}\theta_\nu = k^2\Psi, \tag{3.23}$$



(vedi §1.3.2, eq. (1.75)). Combinando le due si arriva all'equazione di secondo ordine dell'evoluzione

$$\delta''_{\nu} + \frac{a'}{a} \delta'_{\nu} = -k^2 \Psi + 3 \left( \Phi'' + \frac{a'}{a} \Phi' \right). \quad (3.24)$$

Data la piccola massa dei neutrini questi divengono non relativistici durante l'era dominata dalla materia, quando  $\Phi$  e  $\Psi$  sono all'incirca costanti e  $a \propto \tau^2$ . Risolvendo l'eq. (3.24) con queste condizioni si ottiene

$$\delta_{\nu} = A \ln \tau + B - \frac{(k\tau)^2}{6} \Psi = \tilde{A} \ln a + \tilde{B} - \frac{2}{3} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \Psi, \quad (3.25)$$

dove  $A, B$  (o  $\tilde{A}, \tilde{B}$ ) sono delle costanti di integrazione. L'ultimo termine (la soluzione dell'equazione disomogenea) cresce come  $\tau^2$ , cioè come il fattore di scala. Questa soluzione implica che:

- per  $k > k_{nr}$ , ovvero per i modi che sono all'interno del raggio di Hubble quando i neutrini diventano non relativistici, il contrasto di densità  $\delta_{\nu}$  in quel momento è molto inferiore rispetto a  $\delta_{cdm}$  (a causa del *free-streaming*), ma, grazie al termine  $\tilde{A} \ln a$ , cresce più rapidamente delle perturbazioni di materia oscura,  $\delta_{cdm} \propto a$ . Superato il tempo  $\tilde{\tau}(k)$  per il quale il primo ed il terzo termine dell'eq. (3.25) si eguagliano, l'equazione tenderà asintoticamente a

$$\delta_{\nu} \rightarrow -\frac{2}{3} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \Psi \propto a, \quad (3.26)$$

che altro non è che la soluzione dell'equazione di Poisson (1.12) in un Universo dominato dalla materia. In definitiva il contrasto di densità dei neutrini, come quello dei barioni (vedi §1.2.4), tende asintoticamente a  $\delta_{cdm}$ . Tuttavia mentre  $\delta_b$  raggiunge ben presto  $\delta_{cdm}$  dopo l'equivalenza, a causa del *free-streaming* il contrasto di densità dei neutrini è ancora oggi lontano da raggiungere questo asintoto, eccezion fatta per le scale più prossime a  $k_{nr}$ .

- per  $k < k_{nr}$ , cioè per i modi che si trovano al di fuori del raggio di Hubble al momento della passaggio alla fase non relativistica, il contrasto di densità  $\delta_{\nu}$  è indipendente dal tempo, e dello stesso ordine di  $\Psi$  e  $\delta_{cdm}$  fuori da  $R_H$ . Attraversato l'orizzonte la soluzione tende nuovamente a (3.26), e raggiunge rapidamente il contrasto di densità della CDM.

Riassumendo i risultati di questa sezione, alla fine dell'era dominata dalla materia ci si attende che per i modi con  $a_0 H_0 < k < k_{nr}$ ,  $\delta_{\nu}$  sia uguale  $\delta_{cdm} = \delta_b$ , mentre per quelli con  $k > k_{nr}$  il rapporto  $\delta_{\nu}/\delta_{cdm} = \delta_{\nu}/\delta_b$  sia minore di uno, e che tenda a zero per  $k$  che tende

ad infinito. Nell'era dominata dalla costante cosmologica le conclusioni sono essenzialmente le stesse in quanto, per  $a_0 H_0 < k < k_{nr}$ , i tre contrasti di densità vengono smorzati dello stesso fattore, e su scale minori il rapporto  $\delta_\nu/\delta_{cdm}$  non cambia significativamente. Quindi lo spettro di potenza odierno atteso sarà dato da

$$\begin{aligned}
 P(k) &= \left\langle \left( \frac{\delta\rho_{cdm} + \delta\rho_b + \delta\rho_\nu}{\rho_{cdm} + \rho_b + \rho_\nu} \right)^2 \right\rangle \\
 &= \left\langle \left( \frac{\Omega\delta_{cdm} + \Omega\delta_b + \Omega\delta_\nu}{\Omega_{cdm} + \Omega_b + \Omega_\nu} \right)^2 \right\rangle \\
 &= \begin{cases} \langle \delta_{cdm} \rangle & \text{per } k < k_{nr} \\ [1 - \Omega_\nu/\Omega_m]^2 \langle \delta_{cdm} \rangle & \text{per } k \gg k_{nr}, \end{cases} \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

con  $\Omega_m \equiv \Omega_{cdm} + \Omega_b + \Omega_\nu$ . In realtà, come si vedrà nella prossima sezione, la situazione non è così banale, in quanto i neutrini influiscono sull'evoluzione delle perturbazioni delle altre componenti di materia, sopprimendone la crescita.

### 3.4 EFFETTO DEI NEUTRINI SULL'EVOLUZIONE DELLE PERTURBAZIONI DI MATERIA

La presenza dei neutrini incide sull'evoluzione di tutte le componenti di materia. Difatti da una parte la densità media di energia  $\rho_\nu$  entra nell'equazione di Friedmann (1.2), modificando quindi il tasso di espansione dell'Universo, che a sua volta entra nell'equazione di evoluzione delle fluttuazioni; dall'altra, le perturbazioni di densità, pressione e velocità contribuiscono a  $[\delta T]_{\mu\nu}^\nu$ , in particolar modo su scale superiori della lunghezza di *free-streaming*, modificando così l'evoluzione delle perturbazioni della metrica. Inoltre il tensore di *stress* induce una differenza tra  $\Phi$  e  $\Psi$ , costante durante l'era RD su scale al disopra dell'orizzonte, e progressivamente trascurabile su tutte le scale durante l'era MD.

Durante l'era dominata dalla materia, e su scale inferiori alla lunghezza di *free-streaming*, le perturbazioni  $\delta_\nu$  non contribuiscono al *clustering* gravitazionale. Infatti, come si è visto in precedenza, l'effetto di diffusione porta  $\delta_\nu \ll \delta_{cdm}$ , e dato che  $\bar{\rho}_\nu < \bar{\rho}_{cdm}$ , il contributo  $\delta_\nu \bar{\rho}_\nu$  all'equazione di Poisson (1.12) può essere omesso. D'altro canto però i neutrini contribuiscono all'espansione omogenea dell'Universo tramite le equazioni di Friedmann (1.2). L'effetto netto è quello di rallentare la crescita delle perturbazioni di  $\delta_{cdm} = \delta_b$  e di smorzare le fluttuazioni della metrica  $\Phi = \Psi$ , in quanto la componente neutrinica contribuisce solo all'espansione e non al *clustering* gravitazionale. Per stimare l'ampiezza di questo effetto si considerino le equazioni per

la CDM (1.75) [18]. Combinando le due si ottiene l'equazione per l'evoluzione di  $\delta_{\text{cdm}}$ :

$$\delta_{\text{cdm}}'' + \frac{a'}{a} \delta_{\text{cdm}}' = -k^2 \Psi + 3 \left( \Phi'' + \frac{a'}{a} \Phi' \right). \quad (3.28)$$

Per i modi interni all'orizzonte,  $k > aH$ , il termine di sorgente dominante è  $-k^2 \Psi \simeq -k^2 \Phi$  (trascurando il tensore di *stress*). Utilizzando le equazioni di Poisson per esprimere  $-k^2 \Phi$  si ottiene

$$\delta_{\text{cdm}}'' + \frac{a'}{a} \delta_{\text{cdm}}' = 4\pi G a^2 \delta\rho, \quad (3.29)$$

dove  $\delta\rho = \bar{\rho}\delta$  è la densità totale delle perturbazioni. Su scale con  $k \gg k_{\text{nr}}$  si è visto che la densità delle perturbazioni può essere approssimata con  $\delta\rho = (\bar{\rho}_{\text{cdm}} + \bar{\rho}_{\text{b}})\delta_{\text{cdm}}$ . Per quanto riguarda il tasso di espansione invece, l'equazione di Friedmann è data da:  $3(a'/a)^2 = 8\pi G a^2 (\bar{\rho}_{\text{cdm}} + \bar{\rho}_{\text{b}} + \bar{\rho}_{\nu})$ . Supponendo che la densità di energia media di neutrini sia dominata da neutrini non relativistici,  $\bar{\rho}_{\nu} \propto a^{-3}$ , il parametro

$$f_{\nu} \equiv \frac{\rho_{\nu}}{\rho_{\text{cdm}} + \rho_{\text{b}} + \rho_{\nu}} = \frac{\Omega_{\nu}}{\Omega_{\text{m}}} \quad (3.30)$$

rimane all'incirca costante, ed il fattore di scala evolve come  $a \propto \tau^2$  (Universo di EdS). L'equazione d'evoluzione (3.29) può quindi essere scritta come

$$\delta_{\text{cdm}}'' + \frac{2}{\tau} \delta_{\text{cdm}}' - \frac{6}{\tau^2} (1 - f_{\nu}) \delta_{\text{cdm}} = 0. \quad (3.31)$$

Cercando una soluzione del tipo  $\delta_{\text{cdm}} \propto \tau^{2p}$ , si trovano le due radici

$$p_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24(1 - f_{\nu})}}{4}, \quad (3.32)$$

e quindi la soluzione crescente per il contrasto di densità di CDM, assumendo  $f_{\nu} \ll 1$ , è

$$\delta_{\text{cdm}} \propto a^{p_+} \propto a^{1 - \frac{3}{5} f_{\nu}}. \quad (3.33)$$

Sotto la stessa ipotesi l'equazione di Poisson fornisce

$$-k^2 \Phi \propto a^{p_+ - 1} \simeq a^{-\frac{3}{5} f_{\nu}}. \quad (3.34)$$

Finita l'era MD, la presenza della costante cosmologica rallenta ulteriormente la crescita del contrasto di densità  $\delta_{\text{cdm}}$ . L'effetto combinato di  $\Lambda$  e dei neutrini sull'evoluzione delle perturbazioni di CDM è ben approssimato da [41]

$$\delta_{\text{cdm}} \propto [ag(a)]^{p_+} \simeq [ag(a)]^{1 - \frac{3}{5} f_{\nu}}, \quad g(a) = 1 \text{ per } a \ll a_{\Lambda} \quad (3.35)$$

dove  $g(a)$  è il fattore di smorzamento introdotto in §1.3.2 nel paragrafo relativo all'era dominata dall'energia oscura, e  $a_{\Lambda}$  è il fattore di scala all'equivalenza tra materia e costante cosmologica.

3.5 EFFETTO DEI NEUTRINI MASSIVI SULLO SPETTRO DI POTENZA

Noti gli effetti diretti (§3.3) ed indiretti (§3.4) che hanno i neutrini sullo sviluppo delle perturbazioni è possibile predire le differenze che intercorrono tra uno spettro di potenza calcolato per un modello con neutrini a massa nulla (modello  $\Lambda$ CDM), e quello calcolato per un modello con neutrini massivi (modello  $\Lambda$ MDM). Nel fare quest'analisi si assume che i due modelli condividano gli stessi parametri ( $\omega_m, \omega_b, \Omega_\Lambda, \Lambda, n, \tau$ , vedi 1.5.2); la differenza risiede nel valore di  $\omega_\nu = \Omega_\nu h^2$  e  $\omega_{\text{cdm}} = \omega_m - \omega_b - \omega_\nu$ , che verrà parametrizzata da  $f_\nu$ .

Su scale con  $k < k_{\text{nr}}$ , le perturbazioni dei neutrini non sono mai influenzate dal *free-streaming*, e superata la fase relativistica divengono indistinguibili dalle fluttuazioni di CDM. In particolare, al disotto dell'orizzonte i neutrini contribuiscono sia all'equazione di Poisson ( $\delta_\nu = \delta_{\text{cdm}}$ ) che all'espansione dell'Universo, di modo che le perturbazioni crescono come il fattore di scala,  $a$ . Dunque, fissato  $\omega_m$ , questa parte dello spettro è insensibile al valore di  $f_\nu$ , ed alla massa dei neutrini.

Su scale molto piccole, con  $k \gg k_{\text{nr}}$  e  $k \gg k_{\text{eq}}$  (ovvero scale che sono all'interno dell'orizzonte al tempo dell'equivalenza, vedi eq. (1.97)), i due spettri differiscono per varie ragioni. Innanzitutto l'equivalenza nei due modelli non avviene per lo stesso valore del fattore di scala, in quanto

$$\frac{a_{\text{eq}}}{a} = \frac{\omega_r}{\omega_b + \omega_{\text{cdm}}} = \frac{1}{(1 - f_\nu)} \frac{\omega_r}{\omega_m}, \tag{3.36}$$

dove  $\omega_r$  include la densità di energia dei fotoni e dei neutrini relativistici (questi divengono non relativistici solo in epoche recenti). Dato che i due modelli condividono lo stesso valore di  $\omega_r$  e  $\omega_m$ , il rapporto dei due fattori di scala all'equivalenza è

$$\frac{a_{\text{eq}}^{f_\nu}}{a_{\text{eq}}^{f_\nu=0}} = \frac{1}{1 - f_\nu}, \tag{3.37}$$

ovvero in un modello con neutrini massivi l'equivalenza è ritardata\*. Tra l'equivalenza e il momento in cui i neutrini divengono non relativistici i due modelli sono equivalenti, tranne per uno sfasamento nel fattore di scala. Varrà quindi l'identità

$$\delta_{\text{cdm}}^{f_\nu}[a] = \delta_{\text{cdm}}^{f_\nu=0}[(1 - f_\nu)a], \tag{3.38}$$

\* Quest'effetto è di particolare rilievo per lo studio della fisica dei neutrini tramite l'analisi dello spettro del CMB. In particolare il posticipare l'equivalenza induce un aumento dell'effetto Sachs-Wolf integrato, che si manifesta sullo spettro del CMB con un aumento delle perturbazioni intorno al primo picco acustico (vedi [52] e referenze all'interno).

fintanto che  $a \leq a_{nr}$ . Nel modello con neutrini massivi, per  $a > a_{nr}$ , nell'approssimazione che  $f_\nu$  sia indipendente dal tempo (che non è propriamente valida per neutrini massivi non degeneri) il contrasto di densità  $\delta_{cdm}$  seguirà l'andamento dell'eq. (3.33) o dell'eq. (3.35), rispettivamente per l'era MD e per l'era dominata da  $\Lambda$ ,

$$\delta_{cdm}^{f_\nu}[a_0] = \left( \frac{a_0 g(a_0)}{a_{nr}} \right)^{1-\frac{3}{5}f_\nu} \delta_{cdm}^{f_\nu}[a_{nr}]. \quad (3.39)$$

Nel modello  $\Lambda$ CDM, le perturbazioni evolvono come nell'altro modello fino a che  $a = \tilde{a}_{nr} = (1 - f_\nu)a_{nr}$ , ovvero fino a che il fattore di scala non uguaglia il fattore di scala per cui i neutrini divengono non relativistici nel modello  $\Lambda$ MDM, tenendo conto dello sfasamento dato dall'eq. (3.37). In questo caso i neutrini rimangono relativistici, e per  $a > \tilde{a}_{nr}$  la frazione  $f_\nu \propto a^{-1}$  tende a zero, di modo che le fluttuazioni di densità  $\delta_{cdm}^{f_\nu=0}$  divengono una funzione lineare di  $[ag(a)]$ . Il contrasto di densità può essere quindi approssimato con

$$\delta_{cdm}^{f_\nu=0}[a_0] \simeq \left( \frac{a_0 g(a_0)}{(1 - f_\nu)^{1/2} a_{nr}} \right) \delta_{cdm}^{f_\nu=0}[(1 - f_\nu)a_{nr}]. \quad (3.40)$$

In accordo con l'eq. (3.27) si ottiene per  $k \gg k_{nr}$

$$\frac{P(k)^{f_\nu}}{P(k)^{f_\nu=0}} = \frac{(1 - f_\nu)^2 (\delta_{cdm}^{f_\nu}[a_0])^2}{(\delta_{cdm}^{f_\nu=0}[a_0])^2} = (1 - f_\nu)^3 \left( \frac{a_0 g(a_0)}{a_{nr}} \right)^{-\frac{6}{5}f_\nu}. \quad (3.41)$$

Infine sostituendo nell'equazione  $(a_0/a_{nr})$  con  $2000m_\nu/1eV$  (vedi §3.3.1), e ponendo  $m_\nu = (\omega_\nu/N_\nu)94.57eV$  (vedi §(3.13)), si ottiene

$$\frac{P(k)^{f_\nu}}{P(k)^{f_\nu=0}} \simeq (1 - f_\nu)^3 [1.9 \times 10^5 g(a_0) \omega_m f_\nu / N_\nu]^{-\frac{6}{5}f_\nu}. \quad (3.42)$$

Nel limite di  $f_\nu < 0.07$  l'eq. (3.42) può essere approssimata con l'espressione [42]

$$\frac{P(k)^{f_\nu}}{P(k)^{f_\nu=0}} \simeq 1 - 8f_\nu. \quad (3.43)$$

In figura 21 viene riassunto l'andamento di questo rapporto per modelli con differenti valori di  $f_\nu$  e  $\omega_m = 0.147$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$ ,  $N_\nu = 3$  fissati [52], al variare di  $k$ . I spettri di potenza sono stati calcolati tramite il codice CMBFAST [104]. Come atteso dalla trattazione analitica sopra esposta il rapporto approssima una funzione a gradino, uguale ad uno per  $k < k_{nr}$  e ad una costante per  $k > k_{eq} \simeq 1.5 \times 10^{-2} hMpc^{-1}$ . Lo spettro di potenza  $P(k)^{f_\nu}$  è tanto più soppresso a piccole scale quanto più alta è la frazione di densità neutrinica  $f_\nu$  (curve dall'alto verso il basso).

Finora si è focalizzata l'attenzione sullo spettro di potenza a  $z = 0$ , senza considerarne l'evoluzione con il redshift. In assenza di neutrini, e passata l'equivalenza, la forma dello spettro di potenza non dipende

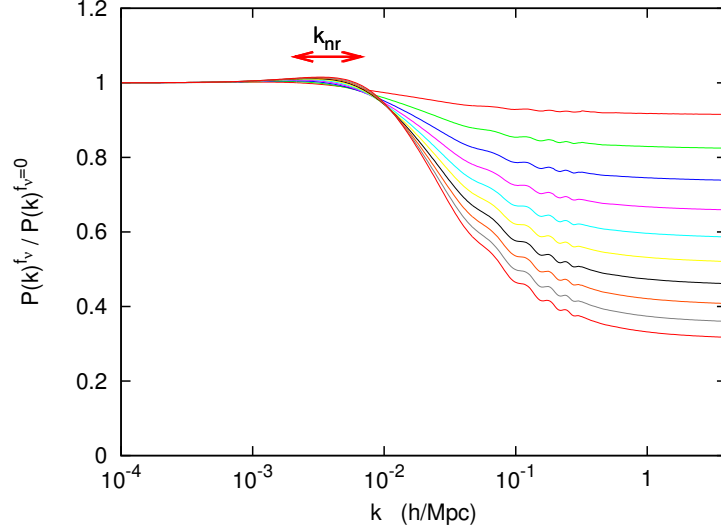


Figura 21: Rapporto tra lo spettro di potenza della materia per un modello con tre neutrini massivi degeneri con frazione di densità  $f_\nu$ , ed uno con neutrini non massivi. I parametri ( $\omega_m = 0.147$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$ ) sono mantenuti fissi, e dalla cima andando verso il basso le curve corrispondono a  $f_\nu = 0.01, 0.02, 0.03, \dots, 0.10$ . La massa di ogni specie varia tra  $0.046 \text{ eV}$  e  $0.46 \text{ eV}$ , e la scala  $k_{nr}$  da  $2.1 \times 10^{-3} \text{ hMpc}^{-1}$  a  $6.7 \times 10^{-3} \text{ hMpc}^{-1}$ .  $k_{eq}$  è all'incirca uguale a  $\simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ hMpc}^{-1}$ . Da [52].

dal redshift, mentre la sua ampiezza cresce come  $[ag(a)]^2$ . In termini di  $z$  si ha quindi

$$P(k, z)^{f_\nu=0} = \left( \frac{g(z)}{(1+z)g(0)} \right)^2 P(k, 0)^{f_\nu=0}, \quad \text{con } k \gg aH. \quad (3.44)$$

In presenza di neutrini massivi, questo non è altrettanto vero, e la forma dello spettro acquista una dipendenza dal redshift. Infatti in questo caso le fluttuazioni di densità delle diverse componenti evolvono in modo differente a seconda della scala: per  $aH < k < k_{nr}$  si ha che  $\delta_\nu = \delta_{\text{cdm}} \propto [ag(a)]$ , mentre per  $k \gg k_{nr}$  si ha che  $\delta_\nu \ll \delta_{\text{cdm}} \propto [ag(a)]^{1-3/5f_\nu}$ . Quindi lo spettro di potenza ha una differente dipendenza dal redshift a seconda della scala considerata

$$P(K, z)^{f_\nu} = \begin{cases} \left( \frac{g(z)}{(1+z)g(0)} \right)^2 P(k, 0)^{f_\nu} & \text{per } aH < k < k_{nr} \\ \left( \frac{g(z)}{(1+z)g(0)} \right)^{2-6/5f_\nu} P(k, 0)^{f_\nu} & \text{per } k \gg k_{nr}. \end{cases} \quad (3.45)$$

Una formula analitica che descrive lo spettro di potenza in caso di neutrini massivi degeneri, ricavata dal *fit* dei risultati numerici ottenuti tramite CMBFAST [104], è quella di Eisenstein & Hu (1999) [28]. In particolare i due autori forniscono una formula per la funzione di trasferimento (vedi §1.4) dipendente dal numero d'onda, dal redshift, e da sei parametri cosmologici tra cui  $\Omega_\nu$  ed il numero di famiglie

degeneri  $N_\nu$ . Più in dettaglio la funzione di trasferimento può essere decomposta come

$$T(k, z) = T_{\text{master}}(k)\tilde{D}(k, z), \quad (3.46)$$

dove la funzione  $T_{\text{master}}(k)$  indipendente dal tempo riflette lo spettro delle perturbazioni alla ricombinazione, mentre il fattore di crescita  $\tilde{D}(k, z)$  incorpora gli effetti post-ricombinazione, e la dipendenza dalla scala è legata all'effetto di *free-streaming* dei neutrini.

### 3.6 EFFETTI DELLA DEGENERAZIONE DELLO SPETTRO DEI NEUTRINI

Le formule trattate finora descrivono modelli con uno o più specie di neutrini massivi degeneri. In questo caso si è visto come la posizione in cui lo spettro perde potenza è legata a  $k_{\text{nr}}$  (vedi figura 21), ovvero al momento in cui neutrini divengono non relativistici, che dipende dalla massa della singola specie  $m_\nu$  (vedi eq. (3.19)), mentre l'ampiezza di questa perdita di potenza è legata sia a  $f_\nu$  che a  $\alpha_{\text{nr}}$ , che dipendono rispettivamente dalla massa totale  $\sum m_\nu$  e da quella individuale. Quindi, nonostante l'effetto dominante sia quello legato alla massa totale, ci si attende che a parità di  $\sum m_\nu$  si abbiano diversi comportamenti al variare di famiglie degeneri,  $N_\nu = 1, 2, 3$ , in cui lo spettro di potenza della materia presenta variazioni sulla scala e sull'ampiezza dell'effetto di smorzamento indotto dai neutrini. Per gli spettri di massa raffigurati in figura 18, le differenze per  $P(k)$  sono ancora più sottili, in quanto ci sono tre distinti valori di  $m_\nu$ ,  $\alpha_{\text{nr}}$  e  $k_{\text{nr}}$ .

In figura 22 sono rappresentati gli effetti che si hanno sullo spettro di potenza, data una differente distribuzione della massa totale,  $\sum m_\nu = 0.12\text{eV}$ , su una o più famiglie, [53]. In particolare viene visualizzato il rapporto tra lo spettro di potenza nel caso di gerarchia normale, gerarchia inversa, di una o due famiglie degeneri, e lo spettro di potenza ottenuto per  $N_\nu = 3$ . Il picco intorno a  $k = 10^{-2}\text{hMpc}^{-1}$  è causato dalla variazione di  $k_{\text{nr}}$ ; difatti nel caso  $N_\nu = 3$  la massa di ogni singola specie è inferiore rispetto agli altri modelli considerati, e di conseguenza  $k_{\text{nr}}$  risulterà più piccolo. Su piccole scale invece il valore asintotico differisce da uno in quanto varia l'ampiezza della soppressione dello spettro: maggiore è la massa della singola specie maggiore è la perdita di potenza su piccole scale (vedi eq. (3.42)).

### 3.7 NEUTRINI MASSIVI ED ABBONDANZA DEGLI AMMASSI DI GALASSIE

Lo spettro di potenza della materia non è l'unica osservabile delle strutture su grande scala ad essere influenzato dalla fisica dei neutrini massivi. Ad esempio sia le misure del *weak lensing* che degli ammassi

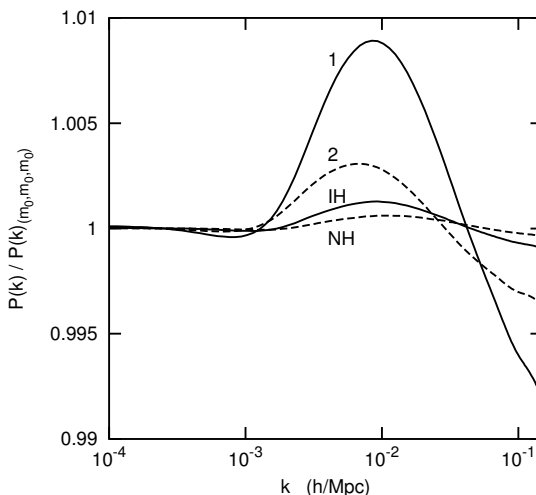


Figura 22: Confronto di spettri di potenza ottenuti da vari modelli per cui la stessa massa totale  $\sum m_\nu = 0.12\text{eV}$  viene distribuita differenzialmente tra le varie famiglie. Le quattro curve corrispondono ai casi con 1 o 2 specie massive, gerarchia normale (NH) e gerarchia inversa (IH), divise per il caso con tre famiglie degeneri. La differenza nelle masse individuali di ogni specie incide sulla posizione e sull'ampiezza della soppressione del  $P(k)$ . Da [53].

di galassie potranno nel prossimo decennio essere di grande aiuto per inferire la massa dei neutrini. In particolare la densità in numero di ammassi, come già sottolineato nel capitolo 2, è particolarmente sensibile all'evoluzione delle perturbazioni, e quindi alla fisica dei neutrini. In particolare si ricorda che la funzione di massa, che regola il numero di aloni osservati entro un certo intervallo di massa e redshift, è una funzione dei parametri  $\delta_c$ , e  $\sigma(M, z)$  (vedi p.es. eq. (1.119)), dove  $\sigma^2(M, z)$  è la varianza del campo di densità, mentre  $\delta_c$  è la densità critica estrapolata dalla teoria lineare (vedi §1.6). Quindi studiando gli effetti che i neutrini massivi hanno su queste due quantità è possibile prevedere gli effetti che i neutrini massivi hanno sulla funzione di massa.

Per analizzare queste quantità è consuetudine oramai sfruttare le simulazioni ad N-corpi (p.es. [22, 118, 43, 63]), che permettono di studiare lo sviluppo delle perturbazioni oltre il regime lineare. In figura 23 viene mostrato un esempio dei risultati ottenuti in una simulazione idrodinamica ad N-corpi [118]. Le due sequenze mettono a confronto le fluttuazioni di densità risultanti da un modello con (colonna di destra) e senza (colonna di sinistra) neutrini. Ogni immagine corrisponde ad una proiezione della simulazione tridimensionale di un parallelepipedo spesso  $6h^{-1}\text{Mpc}$ , e di lato  $60h^{-1}\text{Mpc}$ , a redshift  $z = 3$ . Le prime due righe mostrano il contrasto di densità di materia oscura (riquadro in blu) e di gas (riquadro rosso) nei due modelli, mentre l'immagine infondo a destra rappresenta le fluttuazioni di densità dei neutrini (riquadro verde). Anche dalle simulazioni risulta



evidente che i neutrini rallentano la crescita delle strutture, che infatti nella colonna di sinistra sono meno evolute. Per vederlo si confrontino ad esempio le zone meno dense della distribuzione di gas; nei riquadri di destra queste sono meno “vuote”, ovvero il gas si è addensato di meno intorno ai picchi di densità (zone rosse più brillanti).

Un altro esempio di quest’analisi è riportato in figura 24 dove si mostra l’evoluzione dei contrasti di densità delle diverse componenti di materia all’interno di una regione sovradensa sferica (*top-hat overdensity*) [43]. Si può vedere come le componenti fredde della materia, ovvero quella barionica e di CDM, collassano pressoché contemporaneamente. D’altra parte invece il contrasto di densità dei neutrini rimane molto basso, e praticamente non contribuisce alla massa dell’alone. Questo è dovuto all’alta velocità termica dei neutrini che non permette alle particelle di addensarsi all’interno delle buche di potenziale degli aloni. Più precisamente la lunghezza di *free-streaming* presente dei neutrini, in unità co-moventi, è  $\lambda_{fs} \simeq \sigma_v^v/H_0 \sim 40h^{-1}\text{Mpc}$  [113], ovvero è molto superiore al raggio viriale degli aloni massivi, che è dell’ordine  $\sim\text{Mpc}$ .

In definitiva dallo studio di queste simulazioni si evince che i neutrini massivi hanno l’effetto, per una data massa, di ritardare il collasso dell’alone, e di ridurre la densità. Come atteso questi effetti sono tanto più pronunciati quanto più grande è la massa dei neutrini. Per tener conto di questi risultati nel calcolo della funzione di massa è sufficiente (1) assumere che solo la componente fredda di materia (CDM + barioni) può collassare in aloni virializzati, (2) utilizzare la varianza del campo di densità lineare ottenuta per un modello di sola CDM e barioni [43]:

$$\frac{dn}{d \ln M} = \frac{\bar{\rho}_{cb}}{M} \times f\left(\nu = \frac{\delta_c}{\sigma_{cb}}\right) \frac{d\nu}{d \ln M} \quad (3.47)$$

dove  $f(\nu)$  è la funzione definita nell’eq. (1.118),  $\bar{\rho}_{cb} = \bar{\rho}_{cdm} + \bar{\rho}_b$ , e  $\sigma_{cb}$  è calcolata come

$$\sigma_{cb}^2(M, z) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^3}{2\pi^2} P_{cb}(k, z) \tilde{W}_R(k) \quad (3.48)$$

dove  $P_{cb}(k, z)$  è lo spettro di potenza lineare ottenuto utilizzando una funzione di trasferimento pesata solo sui barioni e CDM (vedi p.es eq. (6) in [28]), e  $\tilde{W}_R(k)$  è il filtro *top-hat* già introdotto in §1.5.1. Infine la scala di filtraggio e la massa degli aloni sono collegate dalla relazione  $M = (4\pi/3)\bar{\rho}_{cb,0}R^3$ .

Nel pannello superiore in figura 25(a,b) sono mostrate le funzioni di massa per due redshift,  $z = 1$  (a),  $z = 1.5$  (b), ottenute in tre diversi modelli: uno senza neutrini massivi (CDM), e due con neutrini massivi, dove la massa del neutrino più pesante è pari a 0.05eV e 0.1eV. Questi due valori sono motivati dal fatto che corrispondono all’incirca al valore minimo della massa rispettivamente per uno spettro di massa NH e IH (vedi eq. (3.4)). Dunque questi sono gli effetti minimi, nell’uno (NH) o nell’altro caso (IH), che inevitabilmente saranno osservati nel

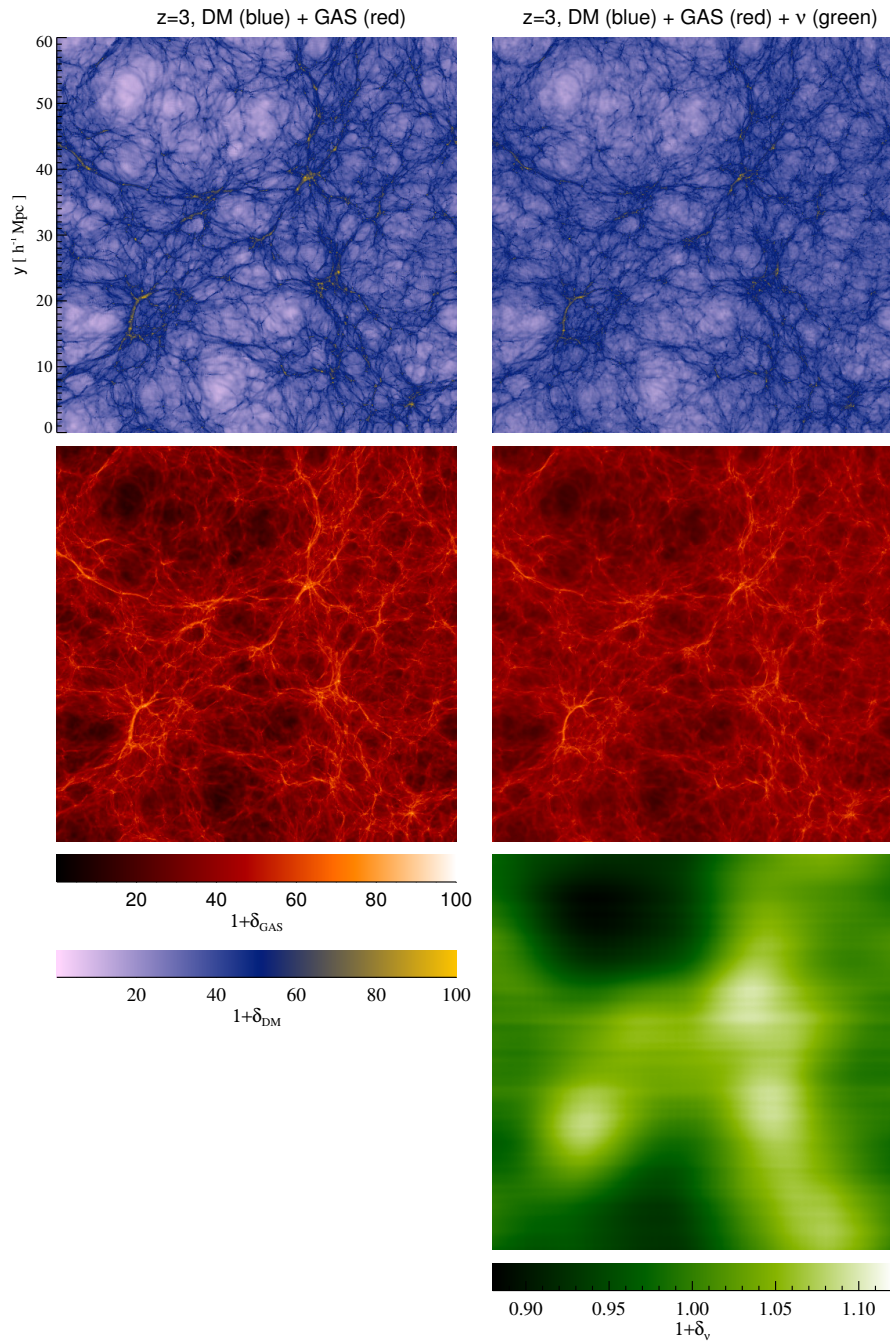


Figura 23: Fluttuazioni di densità ottenute in due simulazioni idrodinamiche con (colonna di destra) e senza (colonna di sinistra) neutrini. Ogni immagine rappresenta una fetta di  $6h^{-1}\text{Mpc}$  di spessore e lato  $60h^{-1}\text{Mpc}$  della simulazione. La presenza dei neutrini influisce chiaramente (riquadro verde in basso a destra) sia sulla distribuzione di gas (riquadro rosso) che di materia oscura (riquadro blu). Da [118].

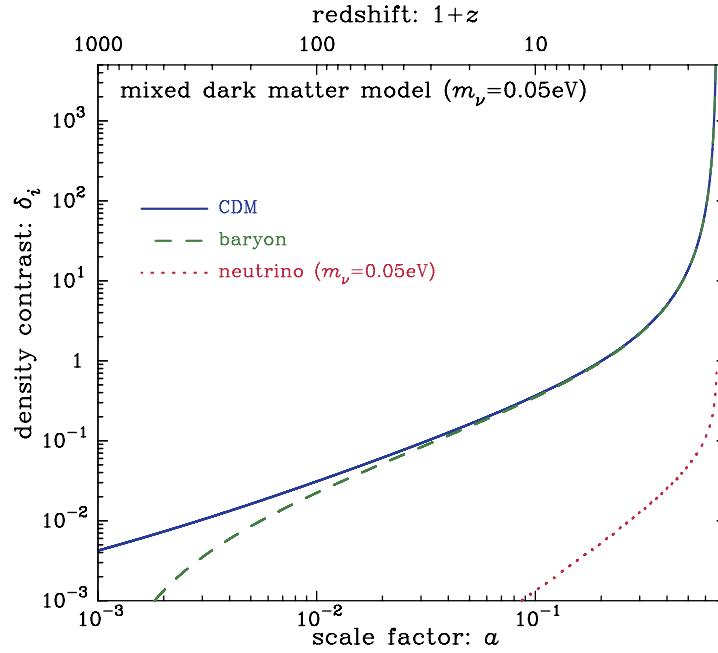


Figura 24: Evoluzione temporale dei contrasti di densità delle diverse componenti di materia, mediate entro una regione sovradensa *top-hat*. Da [43].

nostro Universo. Nel pannello inferiore si mostra il rapporto tra le funzioni di massa nel caso con e senza neutrini massivi [43].

È evidente che la presenza di neutrini massivi diminuisce l'abbondanza di aloni; in particolar modo la riduzione è più accentuata per aloni massivi che si trovano nella coda esponenziale della funzione di massa. Questo è dovuto al fatto che la perdita di potenza delle fluttuazioni sposta il valore della massa caratteristica  $M^*$  ad un dato  $z$  a valori più bassi (vedi §1.6.2), ovvero è ridotta la massa massima per cui si formano un numero significativo di aloni ad un dato redshift. La riduzione nell'abbondanza di aloni è di circa un fattore 2 intorno a  $5 \times 10^{15} h^{-1} M_\odot$ . Confrontando il riquadro inferiore di (a) con quello di (b) si vede inoltre che la riduzione della funzione di massa è più accentuata a redshift maggiori. Questo poiché andando a redshift più alto le scale per cui i neutrini collassano sono superiori, ovvero il  $k_{fs}$  è inferiore, mentre i modi di  $\delta_\nu$  che erano già all'interno della lunghezza di *free-streaming* hanno avuto meno tempo per poter crescere.

Infine è utile confrontare l'effetto che hanno i neutrini massivi sulla funzione di massa con quello dato da una riduzione di  $\sigma_8$  (vedi §1.5.1). Infatti la presenza di neutrini massivi abbassa il valore della varianza del campo di densità su  $8h^{-1} \text{ Mpc}$  di qualche punto percentuale (fissata la normalizzazione a grande scala. Ad esempio a  $z = 0$  per i tre modelli in figura 25 si ha:  $\sigma_8 = 0.802$  per CDM,  $\sigma_8 = 0.790$  per  $m_\nu = 0.05 \text{ eV}$  e  $\sigma_8 = 0.776$  per  $m_\nu = 0.1 \text{ eV}$ . In figura 26 si possono confrontare la funzione di massa per un modello  $\Lambda$ MDM con  $m_\nu = 0.1 \text{ eV}$  e quella per un modello  $\Lambda$ CDM per cui il valore di  $\sigma_8$

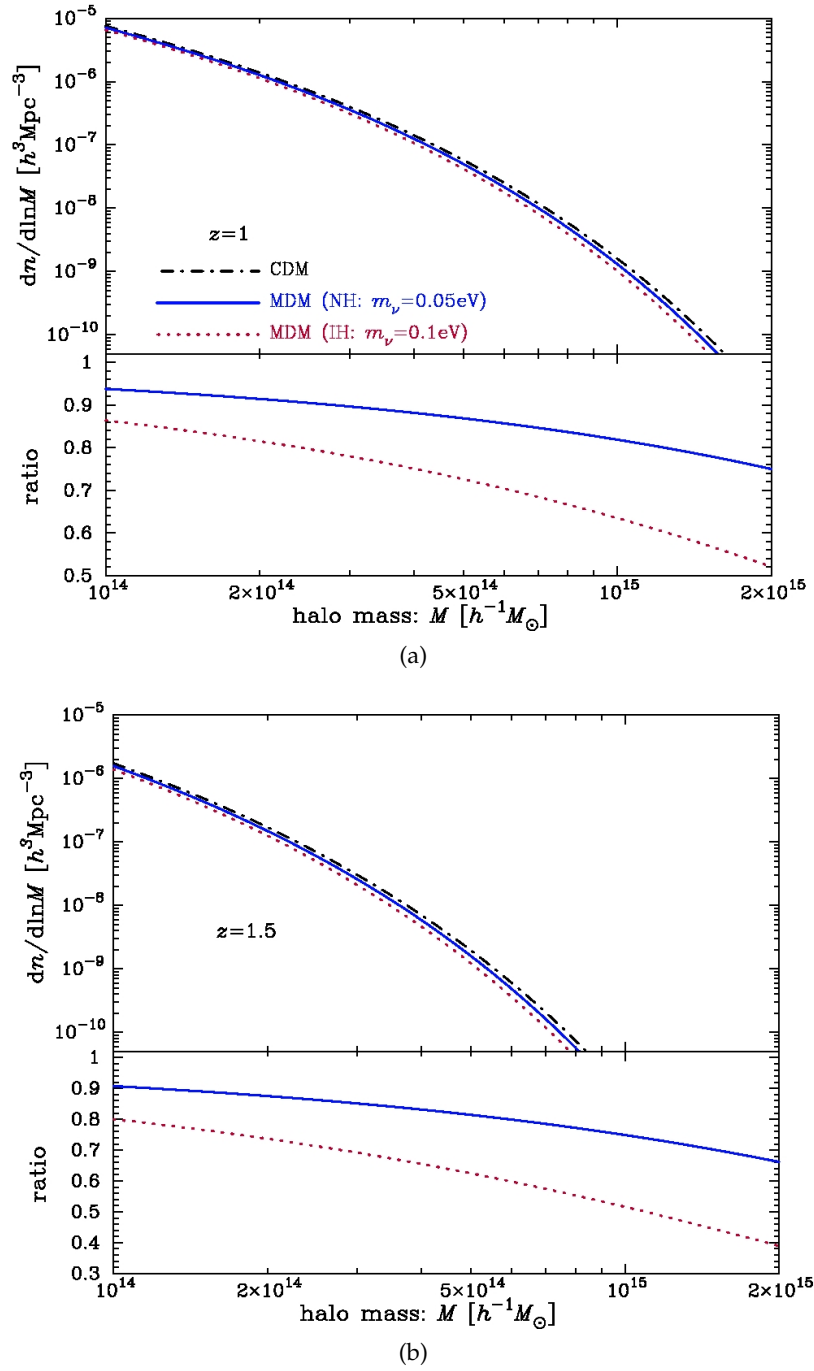


Figura 25: *Pannello superiore*: Funzione di massa valutata a due redshift ( $z = 1$  (a),  $z = 1.5$  (b)) per tre modelli: uno senza neutrini massivi (CDM), e due con neutrini massivi. I diversi modelli condividono la stessa  $\Omega_m$ . *Pannello inferiore*: Rapporto delle funzioni di massa con e senza neutrini massivi. Da [43].

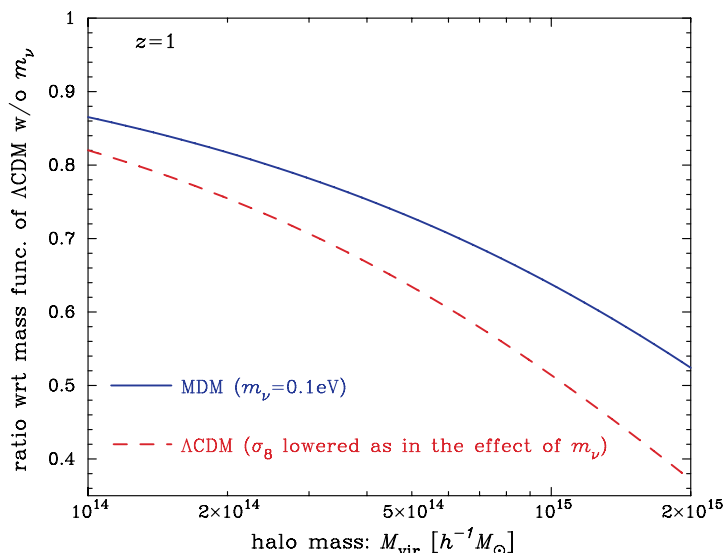


Figura 26: Confronto tra la funzione di massa per un modello di MDM con  $m_\nu = 0.1\text{eV}$  e la funzione di massa per un modello di pura CDM con  $\sigma_8$  ridotto in modo da riprodurre l'effetto di soppressione delle fluttuazioni su scala di  $8h^{-1}\text{Mpc}$  indotto dai neutrini massivi. Il modello CDM con  $\sigma_8$  ridotto riproduce solo approssimativamente (entro il 30% di accuratezza nell'intervallo di massa considerato) la funzione di massa per un modello MDM con la stessa  $\Omega_m$ . Da [43].

è stato abbassato per riprodurre il valore ottenuto nel modello  $\Lambda\text{MDM}$ , a  $z = 1$  [43]; nello specifico,  $\sigma_8^{\text{CDM}}(z = 1)$  è stato portato da 0.500 a 0.486. Come si può vedere la funzione ottenuta con il modello  $\Lambda\text{CDM}$  approssima solo grossolanamente quella per neutrini massivi, a causa del differente spettro di potenza lineare che entra nelle due funzioni. Tuttavia il confronto del  $\sigma_8$  ottenuto ad esempio dall'abbondanza osservata di ammassi di galassie con quello atteso da modelli di pura CDM permette di porre dei vincoli sulla massa dei neutrini [119].

### 3.8 VINCOLI COSMOLOGICI SULLA MASSA DEI NEUTRINI

Dato che i neutrini massivi modificano la formazione delle strutture è possibile vincolarne la massa combinando diversi dati cosmologici. L'approccio standard per stimare i parametri cosmologici consiste nell'utilizzare una statistica bayesiana, che permette, tramite il calcolo della probabilità a posteriori, di derivare delle regioni di confidenza per i parametri (vedi p.es. [38]). I vincoli che si ottengono con tale metodo dipendono in genere dal numero di parametri che si intende vincolare con un dato set di dati. Infatti a causa della degenerazione tra i vari parametri i vincoli che si ottengono per uno di essi divengono più deboli all'aumentare dei parametri usati nel *fit*. Ad esempio i vincoli sulla massa dei neutrini ottenuti dai dati del CMB e delle LSS degradano notevolmente (oltre un fattore 2) lasciando libera di

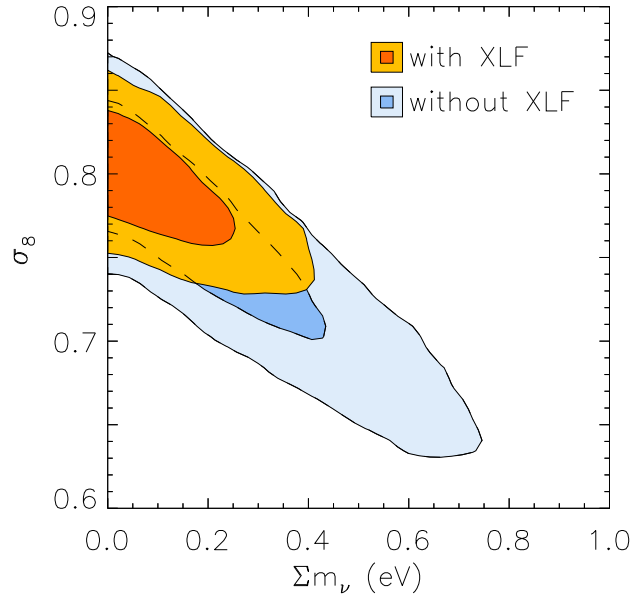


Figura 27: Regioni entro il 68.3% e 95.4% di confidenza nel piano  $M_\nu - \sigma_8$  dalla combinazione dei dati del CMB;  $f_{\text{gas}}$ , SNIa e BAO (*blu*), e combinando ulteriormente i risultati dell’analisi di un campione di ammassi (giallo). Da [61].

variare l’equazione di stato dell’energia oscura. Incorporando le *priors* di più esperimenti è possibile in genere rompere queste degenerazioni, permettendo una stima più accurata dei parametri del modello.

Utilizzando i soli dati di WMAP-7 è possibile vincolare la somma delle masse dei neutrini a  $\sum m_\nu < 1.3\text{eV}$  entro il 95% di livello di confidenza [48]. Questo è vero assumendo un modello  $\Lambda\text{CDM}+m_\nu$ ; al contrario, anche ponendo una forte *prior* su  $H_0$ , data dagli ultimi risultati del Hubble Space Telescope [96], sui dati del CMB il vincolo sulla massa degrada fino a  $\sum m_\nu < 2.1\text{eV}$  al 95% C.L. rilassando l’ipotesi  $N_\nu = 3.046$ , e a  $\sum m_\nu < 2.6\text{eV}$  al 95% C.L. rilassando l’ipotesi  $w = -1$  [36].

Includendo i dati sulle strutture su grande scala i vincoli migliorano in modo significativo. Ad esempio combinando i dati del CMB con quelli dello spettro di potenza degli aloni [93] si ottiene il limite massimo di 0.61eV nel modello minimale, e 1.16eV in quello esteso  $\Lambda\text{CDM}+m_\nu+N_\nu+w$ . Combinando invece i dati del CMB con quelli delle BAO [83] la massa totale limite è 0.85eV nel modello minimale e 1.4eV nel modello esteso [36]. Grazie alle misure fotometriche di un grande campione di galassie fornite dalla SDSS, combinate con i dati di WMAP-5, SNIa, BAO e HST, Thomas et al. (2010) [115] hanno ottenuto un limite superiore di  $\sum m_\nu < 0.28\text{eV}$ . Un limite analogo,  $\sum m_\nu < 0.33\text{eV}$ , è stato ottenuto da Mantz et al. (2010) [61] tramite l’analisi di un campione di 238 ammassi di galassie ottenuto dalla RASS, ed i dati combinati di CMB,  $f_{\text{gas}}$ , SNIa e BAO, assumendo un modello minimale  $\Lambda\text{CDM}+\nu$  (vedi figura 27).

Un'altra sonda della potenza delle fluttuazioni su piccola scala è la foresta Lyman- $\alpha$ . Dall'analisi di questi dati si ricava un limite superiore per la massa totale dei neutrini pari a 0.9eV [118].

Attualmente i vincoli piu' stringenti sulla massa totale dei neutrini sono quelli derivati da un'analisi congiunta dello spettro di potenza del flusso Lyman- $\alpha$  della SDSS assieme ai dati di struttura su grande scala (CMB e spettro di potenza di galassie) [105]. Questo limite molto competitivo risulta essere  $\sum m_\nu < 0.17\text{eV}$  ( $2\sigma$  C.L.) ed e' essenzialmente determinato dalla misura dello spettro di potenza lineare effettuato a  $z = 3$  e a scale di circa 10Mpc comoventi (dove i neutrini producono soppressione) utilizzando l'assorbimento in Lyman- $\alpha$  osservato negli spettri di sorgenti distanti.

Riassumendo, i vincoli attuali sulla massa totale dei neutrini si collocano nell'intervallo tra 0.2eV e 2eV, a seconda dei dati e dei parametri utilizzati. In particolare combinando dati dal CMB con quelli delle LSS, ed includendo le *priors* sul parametro di Hubble, si ottengono dei vincoli robusti al di sotto di 1eV, anche rilassando le ipotesi su  $N_\nu$  e  $w$ .



# VINCOLI SULLA MASSA DEI NEUTRINI

---

Nei prossimi anni, grazie ai dati forniti da campagne osservative, sia da terra che dallo spazio, sarà possibile studiare con un'altissima precisione la strutture cosmiche in un ampio intervallo di scale e redshift. Alcune di queste *surveys* utilizzano o utilizzeranno tecniche già adottate per migliorare ulteriormente la qualità dei dati, come ad esempio Planck[6], lanciato nel 2009, che sta misurando le anisotropie del CMB, o la *survey* di galassie BOSS [2], avviata dal 2009. Altre invece baseranno le loro osservazioni su tecniche innovative, come ad esempio il telescopio eROSITA [7] che dal 2013 mapperà il cielo nella banda X, o EUCLID [3], il cui lancio è previsto per il 2019, che tramite osservazioni nella banda del visuale e del vicino infrarosso sarà in grado di fare misurazioni di *weak lensing* gravitazionale.

Questa enorme quantità di dati permetterà di studiare molti aspetti della cosmologia moderna, offrendo così la possibilità di porre dei vincoli molto stringenti sui vari parametri cosmologici, ed in particolare sulla massa totale dei neutrini. La precisione con cui potrà essere misurata questa massa dipende da molti fattori; primo fra tutti la sensibilità della *survey* scelta alla massa dei neutrini. In questo caso una *survey* in grado di tracciare l'evoluzione della strutture cosmiche sarebbe la più adatta (vedi Cap. 3). Oltre a questo i vincoli sui parametri cosmologici risentono delle specifiche della *survey* stessa come ad esempio il volume di Universo coperto dalla *survey* o la precisione con cui vengono misurate le osservabili, nonché l'accuratezza con cui possono essere inferite le varie quantità poi utilizzate per misurare i parametri (p.es. la stima della massa tramite relazioni di scala, vedi Cap. 2).

Note queste caratteristiche è ovviamente interessante chiedersi quanto una futura *survey* potrà vincolare la massa totale dei neutrini. In particolare lo scopo di questo capitolo, che contiene i risultati originali della tesi, è quello di calcolare i vincoli attesi per la massa dei neutrini da una *survey* di ammassi di galassie come quella che sarà data



dall'analisi dei dati fotometrici di EUCLID [51]. Per ottenere questo risultato verrà utilizzata la matrice d'informazione di Fisher (FM), che è uno strumento statistico ormai divenuto di uso comune per questo tipo di analisi.

Il capitolo è strutturato nel modo seguente: nella prima sezione (§4.1) verrà introdotto il formalismo della matrice di Fisher ed alcune proprietà utili per poterla manipolare. Nella seconda sezione (§4.2) si entrerà più nello specifico spiegando come sono calcolate le matrici di Fisher che sono state utilizzate nell'analisi dei risultati. Infine in §4.3 saranno esposti e commentati i risultati ottenuti.

## 4.1 LA MATRICE D'INFORMAZIONE DI FISHER

Dato un esperimento con lo scopo specifico di vincolare i parametri di un certo modello teorico, è importante stabilire quanto questi vincoli potranno essere stringenti. Queste previsioni vengono in genere mostrate come regioni di confidenza nello spazio dei parametri. La tecnica della matrice di Fisher, approssimando queste regioni a delle ellissi Gaussiane, fornisce un pratico strumento per questo tipo di analisi.

## 4.1.1 Stima dei parametri

Introduciamo ora il formalismo necessario per sviluppare la matrice di Fisher e comprenderne il significato.

Supponiamo da una parte di aver ottenuto un set di dati,  $\mathbf{x}$ , grazie ad un esperimento in grado di misurare una certa osservabile con una data precisione, e dall'altra di avere un modello teorico dipendente da un set di parametri,  $\theta$ , da determinare, che fornisca delle relazioni tra l'osservabile misurata e questo set di parametri. L'obiettivo della stima dei parametri è per l'appunto quello di stimare il valore dei parametri e calcolarne l'errore, o meglio la distribuzione di probabilità di  $\theta$  dato il set di dati  $\mathbf{x}$ . Questa viene chiamata distribuzione della probabilità a posteriori,  $p(\theta|\mathbf{x})$ , e fornisce la probabilità che i parametri  $\theta$  prendano certi valori, dopo aver ottenuto un set di dati  $\mathbf{x}$  da un esperimento. Nota  $p(\theta|\mathbf{x})$  è possibile calcolare il valore di aspettazione dei parametri ed il loro errore.

In genere quello che però si può calcolare direttamente è l'opposto,  $p(\mathbf{x}|\theta)$ , ovvero la distribuzione dei dati che ci si attende dato un modello e noti i valori dei parametri. Si consideri ad esempio un modello che preveda per le osservabili  $x_i$  una distribuzione gaussiana con varianza  $\sigma_i^2$ , e che questa osservabile possa essere descritta da una funzione  $f_i$  dipendente dai parametri  $\theta$ . Se i parametri  $\theta$  sono quelli che descrivono il vero Universo allora la probabilità di ottenere il set di misure  $\mathbf{x}$  sarà proporzionale a

$$p(\mathbf{x}|\theta) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} \chi^2 \right] = \exp \left[ -\sum_i \frac{(x_i - f_i(\theta))^2}{2\sigma_i^2} \right]. \quad (4.1)$$

L'ultima uguaglianza è vera solo nel caso che le varie osservabili  $x_i$  siano tra loro scorrelate. In caso contrario il  $\chi^2$  può essere espresso più genericamente come

$$\chi^2 = \sum_{ij} (x_i - f_i(\theta)) C_{ij}^{-1} (x_j - f_j(\theta)), \quad (4.2)$$

dove i vari  $C_{ij} = \langle (x_i - f_i(\theta))(x_j - f_j(\theta)) \rangle$  sono gli elementi della matrice di covarianza.

Per ottenere la probabilità cercata  $p(\theta|x)$  si può utilizzare il teorema di Bayes, che per un generico set di dati  $x$  fornisce la relazione

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)}, \quad (4.3)$$

dove

- $p(\theta|x)$  è la probabilità a posteriori dei parametri.
- $p(x|\theta)$  è la cosiddetta funzione di verosimiglianza o *likelihood*, indicata anche con il simbolo  $L(x; \theta)$ .
- $p(\theta)$  è la probabilità a priori, o semplicemente *prior*, ed esprime quello che già si sa sui parametri prima di compiere l'esperimento (ad esempio il risultato di un esperimento precedente). Nel caso si assuma una completa ignoranza dei parametri si pone  $p(\theta) = \text{costante}$  (*prior* uniforme), ovvero tutti i valori del parametro sono equiprobabili.
- $p(x)$  è la probabilità a priori di  $x$ , che nel caso della stima dei parametri funge solo da costante di normalizzazione,  $p(x) = \int p(x|\theta)p(\theta)d\theta$ .

Dunque nel caso di *priors* uniformi si avrà semplicemente che

$$p(\theta|x) \propto L(x; \theta) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2}\chi^2 \right]. \quad (4.4)$$

La stima dei parametri può essere fatta cercando il set di parametri  $\tilde{\theta}$  che massimizza la funzione di *likelihood* (ovvero che minimizza il valore di  $\chi^2$ ), mentre l'errore viene espresso in termini di regioni di confidenza intorno ai valori stimati.

#### 4.1.2 Matrice di Fisher

In caso non si abbia ancora effettuato l'esperimento, ovvero non si disponga del set di dati  $x$ , come possiamo stimare l'errore atteso per una certa configurazione nota dell'esperimento? In generale ci attendiamo che il minimo del  $\chi^2$  si abbia nel punto dello spazio dei parametri corrispondente al loro valore reale  $\theta_0$ . Anche non sapendo quali siano questi valori ci si può domandare quanto il  $\chi^2(\theta)$  varia rapidamente allontanandoci dal punto di minimo  $\theta_0$ . Se il suo valore cresce rapidamente allora l'errore sui parametri sarà piccolo, al contrario se il  $\chi^2$  aumenta lentamente si avrà un errore grande.

In modo più quantitativo si può espandere il  $\chi^2$  intorno al suo minimo,  $\theta^i = \theta_0^i + \delta\theta^i$ :

$$\chi^2(\theta) = \chi^2(\theta_0) + \left. \frac{\partial \chi^2}{\partial \theta^i} \right|_{\theta_0} \delta\theta^i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \theta^j \partial \theta^k} \right|_{\theta_0} \delta\theta^j \delta\theta^k + \dots \quad (4.5)$$

Il termine lineare è nullo in quanto il  $\chi^2$  ha un punto di minimo per  $\theta_0$ . Il termine interessante è quello quadratico in quanto il suo fattore ci dà indicazioni su quanto il  $\chi^2$  vari rapidamente allontanandosi dal suo minimo, ovvero ci permette di dare una stima dell'errore. Si definisce dunque la matrice d'informazione di Fisher (FM) come

$$F_{jk} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \theta^j \partial \theta^k} \right\rangle_{\theta_0} = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial f_i}{\partial \theta^j} \frac{\partial f_i}{\partial \theta^k}. \quad (4.6)$$

In particolare nel caso in cui la funzione di *likelihood* sia una multivariata gaussiana (ovvero se vale l'eq. (4.1)), è facile dimostrare che la FM può essere espressa come (p.es. [38])

$$F_{jk} = - \left\langle \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^j \partial \theta^k} \right\rangle, \quad (4.7)$$

da cui segue che

$$F_{jk} = (C^{-1})_{jk}, \quad (4.8)$$

ovvero la matrice di Fisher altro non è che l'inverso della matrice di covarianza, e viceversa. È chiaro dunque che la stima dell'errore sul parametro  $\theta_i$  sarà data da

$$\sigma_i = \sqrt{(F^{-1})_{ii}}. \quad (4.9)$$

Generalmente la funzione di *likelihood* non è propriamente una gaussiana, tuttavia se i parametri sono distribuiti approssimativamente in modo gaussiano la stima sull'errore che si ottiene è sufficientemente accurata.

È importante sottolineare che in base alla disuguaglianza di Cramér-Rao la matrice di covarianza data da uno stimatore dei parametri a *bias* nullo (ovvero  $\langle \theta \rangle = \theta_0$ ) non potrà essere migliore di  $(F^{-1})$  (vedi p.es [38]), ovvero

$$\Delta \theta_i \geq \sqrt{(F^{-1})_{ii}}. \quad (4.10)$$

In altre parole la FM fornisce il limite inferiore sulla barra di errore che è possibile ottenere dall'esperimento, qualunque sia il metodo di stima dei parametri utilizzato.

#### 4.1.3 Alcune proprietà utili

La matrice di Fisher ha il vantaggio di essere molto facile da manipolare. In particolare se si intende combinare due o più esperimenti indipendenti è sufficiente sommare le matrici di Fisher ottenute nei due casi. Questa proprietà deriva dal fatto che  $F \propto \ln L$ . Sempre per la stessa ragione, se invece si è interessati a porre un vincolo a priori  $\sigma_i$

su un unico parametro  $\theta_i$  basta sommare all'elemento della diagonale della FM corrispondente al parametro  $i$ -esimo  $1/\sigma_i^2$ , ovvero

$$F_{jk} \rightarrow F_{jk} + \frac{\delta_{ij}\delta_{ik}}{\sigma_i^2}. \quad (4.11)$$

Se il vincolo che si intende porre è particolarmente forte ( $\sigma^2 \ll 1$ ) è sufficiente rimuovere la riga e la colonna corrispondenti al parametro dalla FM. Agli scopi pratici questo può divenire necessario per evitare instabilità numeriche negli algoritmi di inversione della FM.

Infine può essere necessario produrre una matrice di Fisher in uno spazio dei parametri inferiore rispetto a quello originale, ad esempio nel caso in cui si vogliano produrre le ellissi d'errore (vedi sotto). Per fare questo è necessario marginalizzare rispetto ai parametri che non si intende analizzare, ovvero integrare la distribuzione rispetto ai parametri non d'interesse senza assumere alcuna ulteriore *prior* sul loro valore.

Supponiamo ad esempio che il vettore di parametri  $\theta$  sia dato dall'unione di due insiemi,  $\theta = \mu \cup \nu$ , e che si sia interessati alla matrice di Fisher dei soli parametri  $\mu$ . La nuova matrice di Fisher dei soli parametri  $\mu$  ottenuta dalla marginalizzazione rispetto a  $\nu$  può essere espressa come

$$F_r = F_{\mu\mu} - F_{\mu\nu}F_{\nu\nu}^{-1}F_{\nu\mu}, \quad (4.12)$$

dove le  $F_{\mu\mu}$ ,  $F_{\mu\nu}$ ,  $F_{\nu\nu}$ ,  $F_{\nu\mu}$ , sono le sottomatrici di Fisher corrispondenti agli elementi  $(\mu, \mu)$ ,  $(\mu, \nu)$ ,  $(\nu, \nu)$ ,  $(\nu, \mu)$ .

All'atto pratico questo si riduce a:

- invertire la FM
- rimuovere la righe e le colonne corrispondenti ai parametri  $\nu$  rispetto a cui si intende marginalizzare
- invertire nuovamente la matrice per ottenere la FM desiderata.

In genere la marginalizzazione è utile quando si intende studiare il tipo di degenerazione che intercorre tra due parametri, ovvero come sono tra loro correlati. A tale scopo si marginalizza la FM rispetto a tutti i parametri tranne i due analizzati, e si utilizza la nuova matrice di Fisher ridotta,  $F_r$ , per produrre le cosiddette ellissi d'errore, ovvero le regioni di confidenza nello spazio bidimensionale dei parametri studiati. Più precisamente, la distanza tra due punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_0$  in uno spazio  $\mathbb{R}^n$  è data da

$$d^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T M (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (4.13)$$

dove l'apice "T" indica il vettore trasposto, e  $M$  è la metrica dello spazio. Definendo le curve di isodistanza come

$$I : \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T M (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = d^2 \}, \quad (4.14)$$

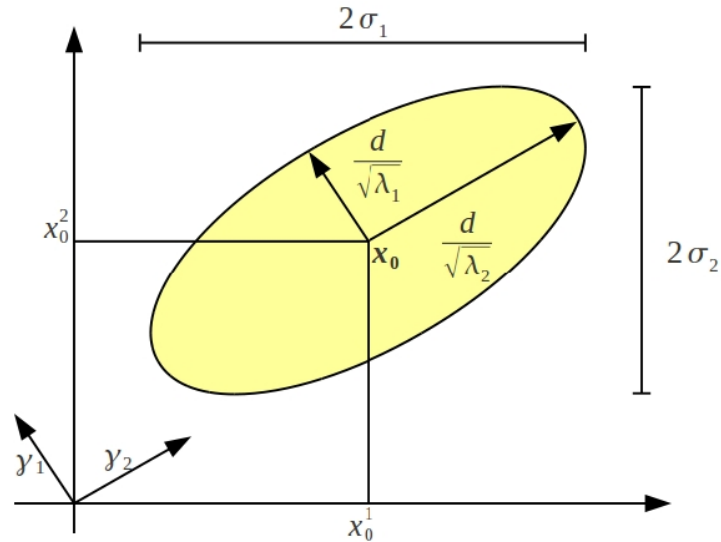


Figura 28: Esempio di un'ellisse d'errore per due parametri  $x^1$  e  $x^2$  correlati tra loro.

le ellissi d'errore corrispondono alle curve di isodistanza nello spazio dei parametri  $\mathbb{R}^2$  dove la metrica è data dalla matrice di Fisher ridotta  $F_r$ , e per cui  $d^2 = \Delta\chi^2 = \chi^2(\theta) - \chi^2(\theta_0)$ . Detto in altri termini le ellissi d'errore sono le curve per le quali il  $\chi^2(\theta)$  incrementa di  $\Delta\chi^2$  rispetto al suo valore minimo  $\chi^2(\theta_0)$ . Il valore dato a  $\Delta\chi^2$  dipende dalle regioni di confidenza che si vogliono ottenere; ad esempio per un livello di confidenza del 68.3% si ha  $\Delta\chi^2 = 2.30$ , mentre per un livello di confidenza del 95.4% si passa a  $\Delta\chi^2 = 6.17$ .

In figura 28 si mostra un esempio di ellissi d'errore per due generici parametri  $x^1$  e  $x^2$  correlati tra loro. Il centro dell'ellisse  $x_0$  è dato dal valore di fiducia assegnato ai parametri; la direzione dei suoi assi è invece legata agli autovettori della FM ridotta,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , mentre la lunghezza dei semiassi dipende dal valore di  $\Delta\chi^2$  (ovvero dalla regione di confidenza che si intende mostrare) e dagli autovalori di  $F_r$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . L'errore marginale sul singolo parametro si ottiene proiettando l'ellisse lungo l'asse corrispondente. Infine per capire il tipo di degenerazione che è presente tra i due parametri basta osservare la rotazione dell'ellisse rispetto ai due assi cartesiani. Per un'ellisse come quella in figura i due parametri sono correlati (l'aumento dell'uno comporta la crescita dell'altro), mentre un'inclinazione nel senso opposto avrebbe implicato una anticorrelazione (la crescita di uno tende a fare diminuire l'altro). Invece parametri tra loro non correlati danno un'ellisse con gli assi paralleli agli assi cartesiani. Il grado di correlazione/anticorrelazione si evince dall'eccentricità delle ellissi: tanto è maggiore tanto è più forte la degenerazione.

4.2 VINCOLI SULLA MASSA DEI NEUTRINI DA UNA *survey* DI AMMASSI

Come già accennato, lo scopo di questa tesi è prevedere i vincoli che è possibile porre sulla massa totale dei neutrini grazie ad una *survey* di ammassi di galassie come EUCLID. EUCLID è una missione di classe media, da poco approvata dall’Agenzia Spaziale Europea (ESA) nell’ambito del programma *Cosmic Vision 2015-2025*, con l’obiettivo primario di comprendere l’origine dell’espansione dell’Universo. Per raggiungere questo scopo il satellite verrà dotato di un telescopio Korsch da 1.2m, progettato per avere un ampio campo visivo, e di due strumenti: uno che lavora nella banda del visivo (550 – 900nm) che permetterà di osservare la forma delle galassie con una risoluzione  $< 0.2\text{arcsec}$ , ed uno che lavora nella banda del vicino infrarosso (920 – 2000nm), composto da uno spettrometro ed un fotometro che lavora nelle tre bande Y (920 – 1146nm), J (1146 – 1372nm) e H (1372 – 2000nm). Con questa strumentazione, coprendo oltre 15,000  $\text{deg}^2$  di cielo, la *survey* permetterà di ottenere immagini e misure fotometriche di oltre un miliardo di galassie, e lo spettro di diversi milioni di galassie, fino a redshift  $z > 2$ . Questa enorme quantità di dati permetterà, oltre che di studiare il *clustering* delle galassie e fare misure di *weak lensing*, di identificare un grande numero di ammassi di galassie. Il metodo più efficiente per fare questo tramite EUCLID risiede nell’analisi dei dati fotometrici, un approccio già applicato a basso redshift nella SDSS (p.es. [47]). Stime viste al ribasso, basate su cataloghi simulati, prevedono che EUCLID identificherà oltre 60,000 ammassi di galassie con un rapporto segnale rumore maggiore di 3, di cui ben 10,000 a redshift  $z > 1$ . La descrizione della procedura di identificazione degli ammassi è al di là dello scopo della tesi, ed è tutt’ora in corso nell’ambito del Galaxy Clusters Science Working Group di EUCLID.

La bontà dei vincoli sui parametri cosmologici dati da una così buona statistica è limitata solo dall’accuratezza con cui si conoscono la funzione di selezione, gli errori sistematici e le relazioni di scala utilizzate per inferire la massa degli oggetti. Il punto di forza di EUCLID risiede proprio in quest’ultimo punto: tramite la misurazione del *weak lensing* sarà in grado di calibrare con precisione la relazione tra massa-osservabile e la sua dispersione.

4.2.1 *Matrice di Fisher del numero di ammassi e del loro spettro di potenza*

Una *survey* di ammassi di galassie permette da una parte di misurare la loro abbondanza entro un certo intervallo di redshift e massa, dall’altra di osservarne la distribuzione, e quindi di calcolare il loro spettro di potenza. Dunque per fare una previsione sul potere vincolante di questo tipo di *survey*, sfruttandone appieno le potenzialità, è

necessario combinare la FM data dal conteggio degli ammassi e quella ottenuta dal loro spettro di potenza.

*Matrice di Fisher dei number counts*

Seguendo l'approccio di Majumdar & Mohr (2003,2004) [55, 56] e Sartoris et al. (2010,2011) ([101, 100], e referenze all'interno) la matrice di Fisher del numero di ammassi,  $N_{l,m}$ , entro un intervallo di massa osservata  $[M_{l,m}^{\text{ob}}, M_{l,m+1}^{\text{ob}}]$  e redshift  $[z_l, z_{l+1}]$  (vedi 2.5.1) può essere scritta come

$$F_{\alpha,\beta}^N = \sum_{l,m} \frac{\partial N_{l,m}}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial N_{l,m}}{\partial \theta_\beta} \frac{1}{N_{l,m}}, \quad (4.15)$$

dove la sommatoria su "l" e "m" copre rispettivamente tutti gli intervalli di redshift e massa. Con questa notazione si ha che  $M_{l,m=0}^{\text{ob}} = M_{\text{thr}}(z)$ , dove  $M_{\text{thr}}(z)$  è definita come la massa limite osservabile di un ammasso che può essere rivelata nella *survey* a redshift  $z$ , e dipende dalla funzione di selezione (vedi §2.4).

Nel caso di EUCLID, per quanto riguarda l'utilizzo dei dati fotometrici nella banda *Near-IR*, combinati con i dati da terra nella banda del visibile delle *surveys* Pan-STARRS [5] e LSST [4], gli ammassi vengono identificati in base alla sovradensità di galassie, misurata entro l'area dell'ammasso, rispetto alle galassie di campo, ovvero calcolando  $N_{\text{gl}}/\sigma_{\text{field}}$ , dove  $N_{\text{gl}}$  è il numero di galassie appartenenti all'ammasso mentre  $\sigma_{\text{field}}$  è la deviazione standard delle galassie di campo. Un ammasso viene identificato con un rapporto segnale rumore  $S/N = n$ , se il suo numero di galassie rilevate dalla *survey* entro  $R_{200}$  (ovvero  $\Delta_c = 200$ , vedi 2.3) corrisponde a "n" volte la deviazione standard delle galassie di campo nell'area dell'ammasso.

In figura 29 è mostrata la funzione di selezione stimata per la *survey* fotometrica degli ammassi\*. La linea continua e quella tratteggiata corrispondono rispettivamente all'identificazione dell'ammasso a  $5\sigma$  e a  $3\sigma$ . Si può vedere che la funzione di selezione attesa è pressoché indipendente dal redshift. Dunque ai fini di questa tesi è stata utilizzata per il calcolo della matrice di Fisher una funzione di selezione indipendente dal redshift, e, in accordo con queste stime, una massa limite osservabile pari a  $10^{14}h^{-1}M_\odot$ . Nonostante questa massa limite sia un po' ottimistica rispetto a quanto mostrato in figura 29, è tuttavia più conservativa rispetto a quella prevista per la Dark Energy Survey (DES) ( $M_{\text{thr}} = 10^{13.7}h^{-1}M_\odot$ , vedi p.es. [24]), che sarà meno profonda della *survey* di EUCLID.

\* Immagine prodotta da A. Biviano nell'ambito della fase di studio della missione EUCLID.



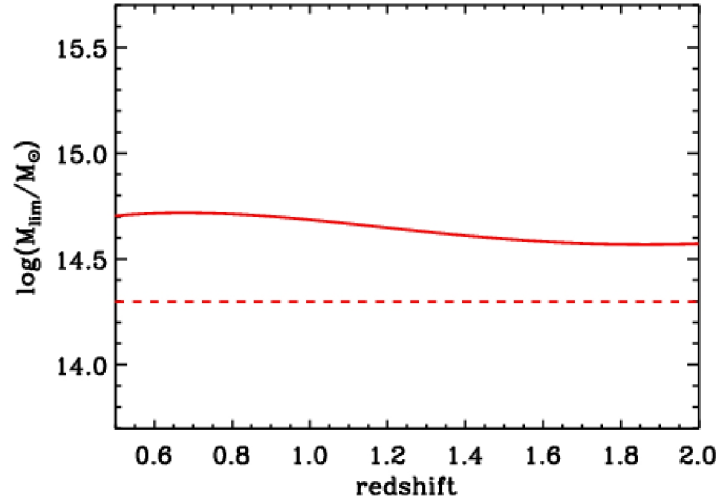


Figura 29: Funzione di selezione fotometrica stimata per EUCLID\*. La linea continua e tratteggiata corrispondono rispettivamente all'identificazione dell'ammasso a  $5\sigma$  e a  $3\sigma$ .

Tornando all'eq. (4.15), il numero di ammassi atteso nei vari intervalli di massa osservata e redshift, in accordo con l'eq. (2.16), è dato da

$$N_{l,m} = \Delta\Omega \int_{z_l}^{z_{l+1}} dz \frac{dV}{dz} \int_{M_{l,m}^{ob}}^{M_{l,m+1}^{ob}} dM^{ob} \int_0^{\infty} n(M,z) P(M^{ob}|M) dM, \quad (4.16)$$

dove la notazione utilizzata è la stessa del capitolo 2. Sempre per emulare le specifiche di EUCLID, la *sky coverage*  $\Delta\Omega$  viene posta uguale a  $15,000 \text{ deg}^2$ , anche se per semplicità viene assunta indipendente dalla massa (in quanto tale può essere fattorizzata fuori dall'integrale).

La funzione di massa  $n(M,z)$  utilizzata è quella di Tinker et al. (2008) [116], adottando le prescrizioni di Ichiki & Takada (2011) [43] esposte in §3.7. Inoltre per tener conto degli effetti dei neutrini massivi sullo sviluppo delle fluttuazioni lo spettro di potenza è stato calcolato tramite la funzione di trasferimento di Eisenstein & Hu (1999) (EH) [28] (vedi §3.5).

Per il calcolo della FM il numero di conteggi  $N_{l,m}$  è stato valutato in 60 intervalli di redshift equispaziati tra  $z = 0$  e  $z = 2$ , e in 200 intervalli di massa osservata con un'ampiezza di  $\Delta \log M = 0.015$ . Nell'analisi è stato verificato che una suddivisione più fine degli intervalli non apporta una maggiore informazione alla matrice di Fisher.

*Matrice di Fisher dello spettro di potenza degli ammassi*

Sempre seguendo le prescrizioni di Majumdar & Mohr (2004) [56] e Sartoris et al. (2010,2011) [101, 100] la matrice di Fisher dello spettro di potenza degli ammassi è definita come

$$F_{\alpha\beta}^P = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{l,m} \frac{\partial \ln \bar{P}_{cl}(k_m, z_l)}{\theta_\alpha} \frac{\partial \ln \bar{P}_{cl}(k_m, z_l)}{\theta_\beta} V_{l,m}^{eff} k_m^2 \Delta k, \quad (4.17)$$

dove la sommatoria su “l” e “m” copre rispettivamente gli intervalli di redshift e numero d’onda  $k$ . Le varie quantità sono quelle già introdotte in 2.5.1, eccezion fatta per  $V_{l,m}^{eff}$  che è definito come

$$V^{eff}(k, z) = V_0(z) \left[ \frac{N(z) \bar{P}_{cl}(k, z)}{1 + N(z) \bar{P}_{cl}(k, z)} \right]^2, \quad (4.18)$$

ovvero il volume effettivo accessibile dalla *survey* a redshift  $z$  e al numero d’onda  $k$ , ottenuto pesando il volume co-movente totale dell’intervallo centrato in  $z$ ,  $V_0(z)$ , con il rumore poissoniano,  $1/N(z)$  [114]. In questo maniera i modi  $k$  che ad un dato redshift  $z$  massimizzano il prodotto  $N(z)P_{cl}(k, z)$  sono quelli che contribuiscono maggiormente ai vincoli ottenuti per quel redshift.

In base alle eq. (2.17) lo spettro di potenza degli ammassi è dato da

$$P_{cl}(k, z) = b_{eff}^2(z) P(k, z), \quad (4.19)$$

dove  $b_{eff}(z)$  è dato dall’eq. (2.18). Come nel caso precedente lo spettro di potenza della materia viene calcolato utilizzando la funzione di trasferimento di EH, mentre la funzione di *bias* utilizzata è quella di Tinker et al. [117] introdotta in §1.7.

Per quanto riguarda il calcolo della matrice di Fisher dello spettro di potenza sono stati utilizzati i modi di Fourier compresi tra  $10^{-3} \text{Mpc}^{-1} < k < 0.3 \text{Mpc}^{-1}$ . Utilizzare un valore arbitrariamente piccolo di  $k$  non influenza il risultato in quanto i modi legati a scale troppo grandi non vengono campionati dalla *survey*, e quindi non contribuiscono alla FM. Per quanto concerne il valore massimo del numero d’onda è stato scelto in modo da massimizzare l’informazione estratta dalla *survey* evitando però di considerare quelle scale dove la validità del modello di *bias* lineare è compromessa dalla non linearità dell’evoluzione delle perturbazioni [82]. Lo spettro di potenza medio,  $\bar{P}_{cl}$ , definito nell’eq. (2.19) è calcolato integrando su intervalli di redshift di ampiezza  $\Delta z = 0.2$ . Questa suddivisione poco fine, in confronto a quella utilizzata nell’analisi del numero di ammassi, è dettata dalla necessità da una parte di massimizzare l’informazione data dall’evoluzione dello spettro, dall’altra di avere una covarianza trascurabile tra intervalli adiacenti (p.es. [111]). Infatti il contributo dato da diversi intervalli di redshift può essere sommato come nell’eq. (4.17) solo se questi sono statisticamente indipendenti l’uno dall’altro.

## 4.3 ANALISI E RISULTATI

Il calcolo delle matrici di Fisher è stato realizzato adottando il programma sviluppato da Sartoris et al. (2010[101], 2011 [100]) per lo studio delle potenzialità delle *surveys* in banda X di prossima generazione nel vincolare i parametri cosmologici. In particolare per ottenere dei vincoli sulla massa dei neutrini è stato necessario aggiungere una *routine* per il calcolo della funzione di trasferimento di EH, in modo da introdurre una dipendenza nello spettro di potenza, e quindi nella funzione di massa, dai parametri  $\Omega_\nu$  e  $N_\nu$ .

*Parametri di riferimento*

Nell'analisi sono stati assunti i seguenti valori di riferimento per i parametri cosmologici, consistenti con quelli ottenuti dal modello di *best-fitting* di WMAP-7 [48]:  $\Omega_m = 0.272$  per il parametro di densità di materia,  $\sigma_8 = 0.81$  per la normalizzazione dello spettro di potenza,  $\Omega_k = 0$  per il contributo dalla curvatura,  $w_0 = -1$  e  $w_a = 0$  per descrivere l'equazione di stato dell'energia oscura ( $w(a) = w_0 + (1 - a)w_a$ ),  $\Omega_b = 0.046$  per il contributo barionico alla densità di materia,  $h = 0.70$  per il parametro di Hubble,  $n = 0.96$  per l'indice spettrale primordiale,  $\Omega_\nu = 0$  per il contributo dei neutrini alla densità di materia e  $N_\nu = 3$  per il numero di famiglie di neutrini. In totale il modello dipende da 10 parametri cosmologici, che a seconda dell'analisi che si intende effettuare possono essere lasciati liberi di variare nel calcolo delle matrici di Fisher delle eq. (4.15)–(4.17).

Per tener conto delle incertezze relative alla relazione tra osservabile e massa molti autori hanno proposto il cosiddetto metodo di auto-calibrazione (p.es. [56, 54]). In questo approccio la relazione tra massa ed osservabile (nel nostro caso un numero di galassie corrispondente ad un certo valore del rapporto segnale rumore) è definito a meno di una dispersione intrinseca,  $\sigma_{\ln M}$ , includendo anche la possibilità di eventuali *bias* sistematici,  $M_{\text{bias}}$ , nella stima della massa degli ammassi (vedi § 2.4, eq. (2.13)). Parametrizzando la loro dipendenza dal redshift come nelle eq. (2.14)–(2.15), si hanno quattro ulteriori parametri,  $\ln M_{\text{bias}}(0)$ ,  $\sigma_{\ln M}(0)$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , detti di *nuisance*, che possono essere lasciati liberi di variare nel calcolo della matrice di Fisher. Dato che la calibrazione della relazione massa-osservabile adottata da EUCLID si basa sulle misurazioni di massa da equilibrio idrostatico (vedi §2.2.1), e che in base all'analisi di diverse simulazioni idrodinamiche questo stimatore di massa sottostima il valore della massa reale entro  $R_{500}$  di circa il 10 – 15 per cento (p.es. [91, 74, 12]), è stato preso come valore di riferimento per il *bias* della massa  $\ln M_{\text{bias}}(0) = -0.15$ , e per quanto riguarda la sua evoluzione  $\beta = 0$  [101]. Per quanto riguarda il valore di riferimento della dispersione si è assunto  $\sigma_{\ln M}(0) = 0.25$ , in analogia con la dispersione intrinseca nella relazione  $M - L_X$  misurata da Maughan (2007) [64], e  $\alpha = 0$  per la sua evoluzione [101].

### Priors

Negli anni a venire, con la pubblicazione dei risultati del satellite Planck, saranno disponibili dei forti vincoli su vari parametri cosmologici dallo studio delle anisotropie del CMB. Per vedere quanto questi risultati permetteranno di migliorare le stime dei parametri, nell'analisi si terrà conto anche della matrice di Fisher di Planck. In particolare la FM di Planck utilizzata in questo lavoro di tesi è quella utilizzata da Sartoris et al. (2010) seguendo la descrizione fornita dalla Dark Energy Task Force [9] ed utilizzando il metodo descritto in [92]. La FM è calcolata assumendo un modello  $\Lambda$ CDM con neutrini a massa nulla, dunque non fornisce vincoli diretti su  $\Omega_\nu$  e  $N_\nu$ . Tuttavia l'introduzione di *priors* sugli altri 8 parametri cosmologici permette, come mostrato in seguito, di ridurre notevolmente la stima dell'errore anche su  $\Omega_\nu$ . Questo perché i vincoli di Planck permettono di rompere le degenerazioni tra  $\Omega_\nu$  e gli altri parametri cosmologici, riducendone così l'incertezza sulla loro stima.

Nell'analisi il numero di famiglie di neutrini massivi viene fissato a 3 a meno che esplicitamente indicato. Questo perché analizzando la matrice di Fisher si è visto che per quanto riguarda la distribuzione del parametro  $N_\nu$  non è ben approssimata da una gaussiana, e quindi lasciando il parametro libero di variare si incorre in un errore nella stima dei vincoli. In figura 30 viene mostrato come la non-gaussianità della distribuzione del parametro  $N_\nu$  si ripercuote sulle regioni di confidenza nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$ . Le varie ellissi sono ottenute da FM calcolate valutando il rapporto incrementale  $[f(N_\nu + \Delta N_\nu) - f(N_\nu)]/\Delta N_\nu$  (vedi eq. (4.6)) per diversi valori di  $\Delta N_\nu$ . Se il parametro fosse distribuito normalmente nello spazio dei parametri le varie ellissi si sarebbero sovrapposte pressoché perfettamente, invece come si può vedere in figura ciò non accade, ed oltre a cambiare l'area racchiusa dalle ellissi, varia anche il grado di correlazione dei due parametri.

Per quanto riguarda i parametri di *nuisance*, nell'analisi verrà considerato il caso di perfetta conoscenza di questi parametri (ovvero vengono mantenuti fissi nel calcolo della FM), o, se lasciati liberi di variare, si porranno delle *priors* deboli su ognuno di essi ( $\Delta \ln M_{\text{bias}}(0) = 0.05$ ,  $\Delta \sigma_{\ln M}(0) = 0.1$ ,  $\Delta \alpha = 1$ ,  $\Delta \beta = 1$ ). Questa scelta di vincoli è abbastanza prudente in vista dell'alto numero di ammassi che verrà identificato da EUCLID, e della buona calibrazione che si avrà della relazione massa-osservabile grazie alle stime di massa dal *weak lensing* [51].

In tabella 3 sono riportati i vari modelli adottati nell'analisi. Le varie colonne indicano rispettivamente quali parametri sono stati lasciati liberi di variare ( $\surd$ ) e quali non (*fixed*). I parametri " $\Lambda$ CDM" corrispondono a quelli del modello  $\Lambda$ CDM standard:  $\Omega_m$ ,  $\sigma_8$ ,  $\Omega_b$ ,  $h$ ,  $n$ ; i parametri "*nuisance*" sono i 4 parametri che definiscono la relazione tra massa ed osservabile con le *priors* sopra elencate. Le

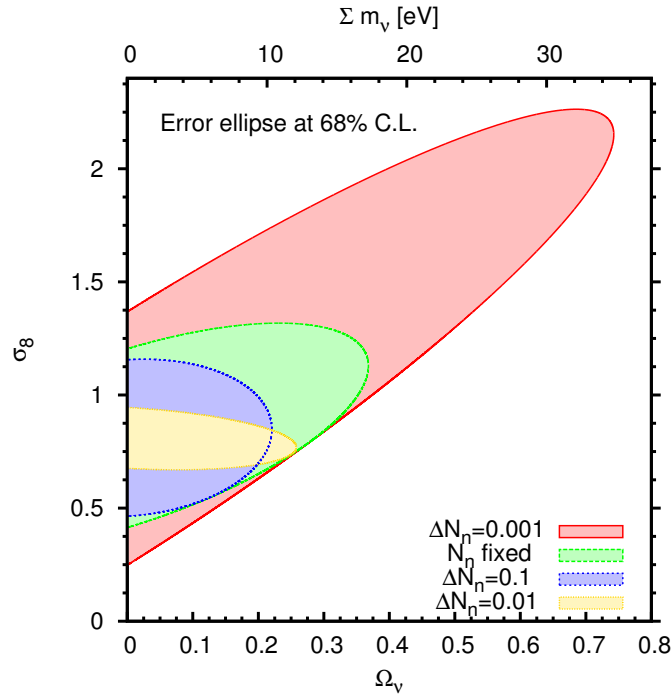


Figura 30: Esempio degli effetti della distribuzione non-gaussiana del parametro  $N_\nu$  sulle regioni di confidenza nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$ .

Tabella 3: Modelli utilizzati nell'analisi dei risultati

Modello	$\Lambda$ CDM	$\Omega_\nu$	$\Omega_k$	$w$	<i>nuisance</i>
$\Lambda$ CDM+ $\nu$ +K+w+ <i>nuis</i>	✓	✓	✓	✓	✓
$\Lambda$ CDM+ $\nu$ +K+w	✓	✓	✓	✓	<i>fixed</i>
$\Lambda$ CDM+ $\nu$ +K	✓	✓	✓	<i>fixed</i>	<i>fixed</i>
$\Lambda$ CDM+ $\nu$ +w	✓	✓	<i>fixed</i>	✓	<i>fixed</i>
$\Lambda$ CDM+ $\nu$	✓	✓	<i>fixed</i>	<i>fixed</i>	<i>fixed</i>
$\Lambda$ CDM+w	✓	<i>fixed</i>	<i>fixed</i>	✓	<i>fixed</i>

regioni di confidenza che verranno mostrare (tranne in un caso) sono quelle nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$ . Questa scelta è dovuta al fatto che mentre gli altri parametri riescono ad essere stimati con grande precisione da altre osservabili (come ad esempio le anisotropie del CMB), una *survey* di ammassi, data la sua capacità sondare le strutture su grande scala dell'Universo, è in grado di porre vincoli stringenti in particolare su  $\sigma_8$  e  $\Omega_\nu$ .

#### Vincoli sul piano $\Omega_\nu - \sigma_8$

In figura 31 vengono mostrati i vincoli ottenuti per  $\Omega_\nu$  e  $\sigma_8$  lasciando tutti i parametri liberi di variare (modello  $\Lambda$ CDM+ $\nu$ +K+w+*nuis*). Le ellissi rappresentano le regioni entro il 68% di confidenza ottenute rispettivamente dal solo conteggio di ammassi (NC, ellisse *rossa*), dalla

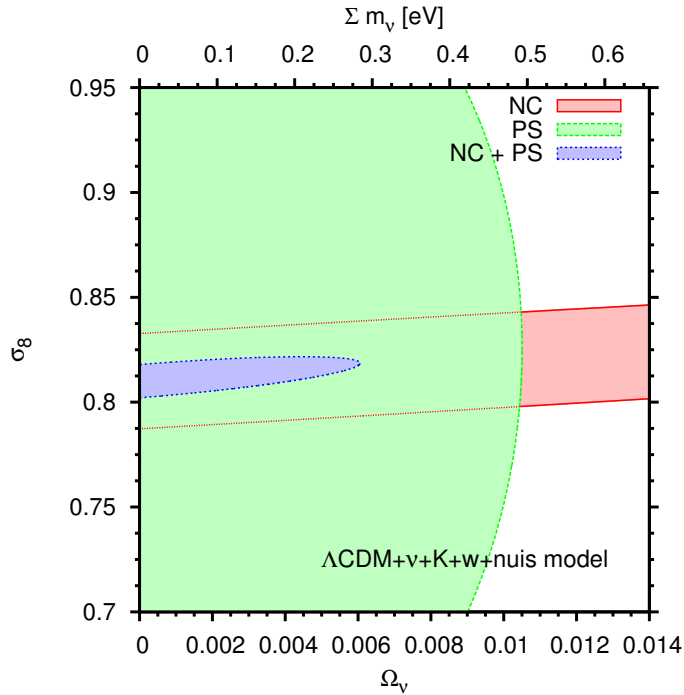


Figura 31: Ellissi d'errore al 68% C.L. nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$  ottenute rispettivamente: dal numero di conteggi (NC, ellisse *rossa*), dallo spettro di potenza (PS, ellisse *verde*) e dalla combinazione dei due (NC+PS, ellisse *blu*), nel modello  $\Lambda\text{CDM}+\nu+K+w+\text{nuis}$ .

sola FM dello spettro di potenza degli ammassi (PS, ellisse *verde*), e dalla combinazione delle due (NC+PS, ellisse *blu*). Come si può vedere utilizzando solo l'informazione proveniente da una *survey* di ammassi del tipo di EUCLID è già possibile porre un limite superiore di  $\sum m_\nu \lesssim 0.3\text{eV}$  sulla massa totale dei neutrini. La forma delle ellissi conferma la forte correlazione attesa per i due parametri (indice di correlazione:  $\rho_{\sigma_8, m_\nu} = 0.955$ ): per compensare la perdita di potenza delle fluttuazioni su piccola scala data dai neutrini massivi la normalizzazione dello spettro di potenza deve aumentare. La figura dimostra chiaramente come il conteggio degli ammassi ed il loro *clustering* siano complementari nel vincolare  $\Omega_\nu$  e  $\sigma_8$ : mentre il numero di ammassi dipende sensibilmente dal valore di  $\sigma_8$ , i vincoli che pone sulla massa totale dei neutrini non sono troppo stringenti ( $\sum m_\nu \lesssim 3.5\text{eV}$ ); viceversa lo spettro di potenza, grazie alla sua forte dipendenza dalla massa dei neutrini, fornisce degli ottimi vincoli su  $\sum m_\nu < 0.5\text{eV}$ , ma è molto meno sensibile al valore della normalizzazione,  $\sigma_8$ .

Nella figura 32 si mostra invece come l'aggiunta delle *priors* di Planck permette di ridurre ulteriormente l'errore sui due parametri. Nonostante la FM di Planck non pone vincoli diretti su  $\Omega_\nu$  le ellissi di confidenza sono ridotte dalla rottura della degenerazione tra i vari parametri. In particolare Planck permetterà di ottenere dei vincoli molto stringenti sui parametri di densità ( $\Omega_m, \Omega_b, \Omega_k$ ) e sul parametro

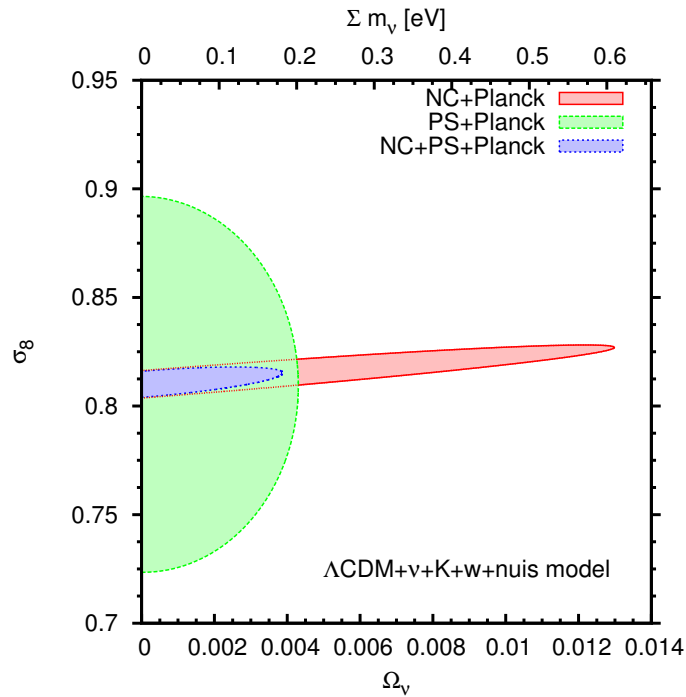


Figura 32: Come nell'immagine precedente (figura 31) con l'aggiunta delle *priors* di Planck.

di Hubble  $h$ . Tenendo conto di questa informazione il vincolo sulla massa totale dei neutrini si riduce a  $< 0.2\text{eV}$ .

Nell'ipotesi meno conservativa che i parametri di *nuisance* siano noti con un'incertezza piccola, come si prospetta per la missione EUCLID, è possibile mantenerli fissi nel calcolo della FM (modello  $\Lambda\text{CDM}+\nu+K+w$ ). In figura 33 vengono per l'appunto confrontate le regioni di confidenza ottenute in questo modello con quelle stimate in precedenza. In entrambi i casi sono state utilizzate le *priors* di Planck. Come si può vedere la stima di  $\sigma_8$  migliora notevolmente, passando da  $\Delta\sigma_8 = 5 \times 10^{-3}$  del caso precedente a  $\Delta\sigma_8 = 10^{-3}$ , confermando che una buona conoscenza delle relazioni tra massa ed osservabile permette una stima molto più fine del parametro di normalizzazione. D'altro canto però l'errore sulla massa dei neutrini si riduce solo di circa il 3% imponendo forti *priors* sui parametri di *nuisance*. Dunque una conoscenza più o meno precisa dei parametri che determinano la relazione massa-osservabile non incide particolarmente sulla stima della massa dei neutrini.

Tramite le future *surveys* che studieranno la storia d'espansione dell'Universo (ad esempio tramite le BAO o le SNe-Ia) sarà possibile determinare con precisione la geometria dell'Universo e l'equazione di stato che governa l'energia oscura. Mostriamo quindi in figura 34 come il limite sulla massa totale dei neutrini varia fissando la piattezza ( $\Omega_k = 0$ , ellisse *gialla*) o l'equazione di stato dell'energia oscura ( $w_0 = -1$ ,  $w_a = 0$ , ellisse *rossa*). Come si può vedere in entrambi

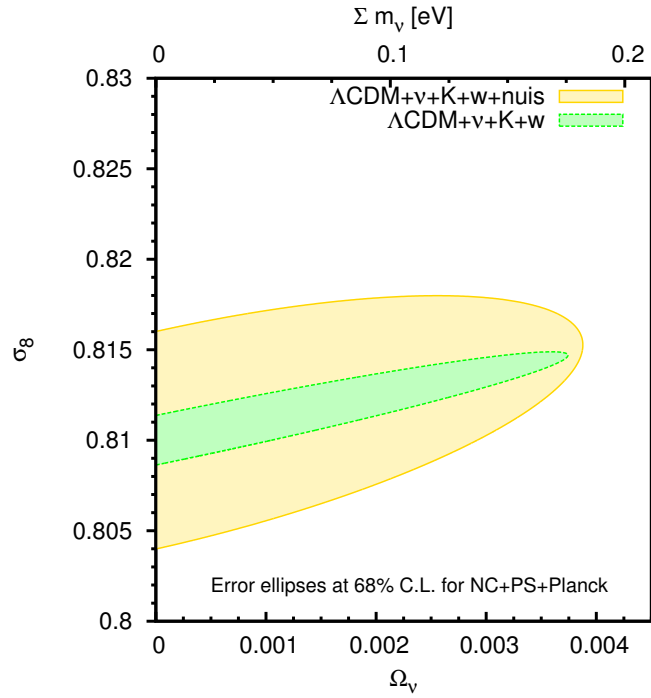


Figura 33: Confronto tra le regioni al 68% di confidenza nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$  ottenute rispettivamente nel modello  $\Lambda\text{CDM}+\nu+K+w+\text{nuis}$  (ellisse *gialla*) e nel modello  $\Lambda\text{CDM}+\nu+K+w$  (ellisse *verde*). In entrambi i modelli le regioni di confidenza sono state calcolate combinando l'informazione del conteggio degli ammassi, dello spettro di potenza e le *priors* di Planck.

i casi l'errore si riduce, anche se in modo più sostanziale fissando l'equazione di stato dell'energia oscura (circa del 25% contro il 12% fissando  $\Omega_k$ ). Questo non è dovuto ad un diverso grado di correlazione dei parametri con  $\Omega_\nu$  (per entrambi  $\rho \simeq -0.5$ ), ma al semplice fatto che l'informazione contenuta nella *survey* di ammassi permette di vincolare meglio  $\Omega_k$  rispetto all'equazione di stato dell'energia oscura. Dunque fissando  $w(a)$  si aggiunge più informazione che fissando la curvatura. Anche la stima di  $\sigma_8$  migliora, anche se non in maniera sostanziale, dato che i vincoli che si ottengono su questo parametro (prevalentemente dal conteggio degli ammassi) sono già molto stringenti.

Infine per confrontare i risultati ottenuti con i vincoli inferiti da Mantz et al. (2010) [61] dallo studio di un campione di 238 ammassi estratti dalla RASS assumiamo un modello minimale  $\Lambda\text{CDM}+\nu$ , ovvero assumiamo noti gli stessi parametri cosmologici fissati nell'analisi di Mantz et al. (2010). In figura 35 sono mostrate le regioni entro il 68% (ellisse *rossa*) ed il 95.4% (ellisse *gialla*) di confidenza ottenute per questo modello confrontate con le analoghe regioni di confidenza di Mantz et al. (2010). La riduzione dell'errore, soprattutto per  $\sigma_8$ , rispetto ai risultati di Mantz et al. (2010) è netta: il grande nume-



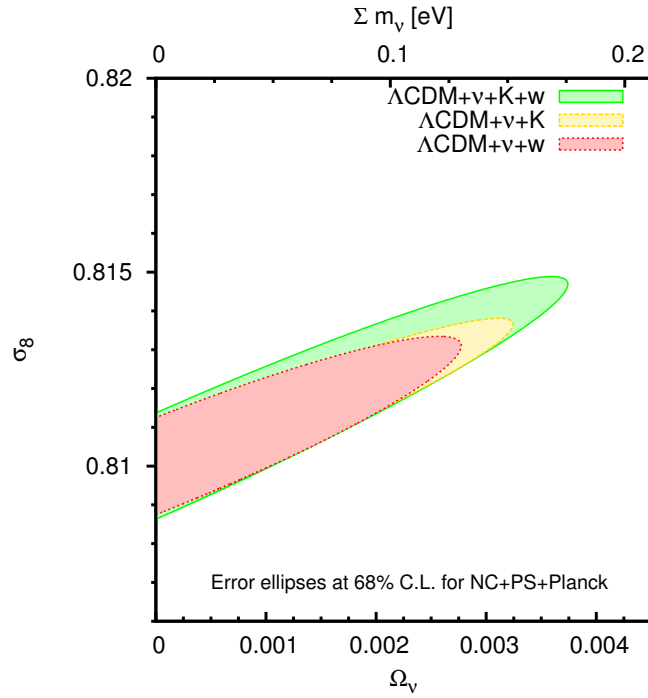


Figura 34: Regioni al 68% di confidenza nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$  ottenute fissando la piattezza (ellisse *gialla*) o l'equazione di stato della DE (ellisse *rossa*), confrontate con il modello  $\Lambda\text{CDM}+\nu+K+w+nuis$  (ellisse *verde*). In tutti e tre i casi sono considerate le *priors* di Planck.

ro di ammassi che EUCLID sarà in grado di identificare permetterà da una parte di vincolare in maniera molto più decisa il valore di  $\sigma_8$ , dall'altra di dimezzare l'incertezza sulla massa totale dei neutrini,  $\sum m_\nu < 0.2\text{eV}$  entro  $2\sigma$ . È da notare inoltre che l'analisi fatta da Mantz et al. (2010) tiene conto dell'informazione data dallo spettro del CMB da WMAP-5 sulla massa dei neutrini, mentre le stime sull'incertezza ottenute in questa tesi no. È rilevante osservare infine che le regioni di confidenza ottenute dai dati di WMAP-5 presentano una direzione di degenerazione opposta a quella ottenuta nella nostra analisi, a causa della differente dipendenza dai parametri cosmologici dello spettro del CMB.

Nonostante il vincolo ottenuto sia molto stringente non è ancora tuttavia sufficiente per distinguere una gerarchia normale ( $\sum m_\nu \sim 0.05\text{eV}$ ) da una gerarchia inversa ( $\sum m_\nu \sim 0.1\text{eV}$ ); per poter raggiungere questo risultato sarebbe necessario dimezzare ulteriormente l'errore su  $\Omega_\nu$  (p.es. [105]). Questo probabilmente sarà possibile includendo l'informazione su  $\Omega_\nu$  proveniente da Planck, che oltre a vincolare direttamente la massa dei neutrini, grazie al diverso tipo di correlazione tra  $\Omega_\nu - \sigma_8$ , permetterà un sostanziale miglioramento della stima del parametro.

Finora tutte le analisi sono state fatte ipotizzando 3 famiglie di neutrini degeneri, ha senso tuttavia chiedersi come una diversa distri-

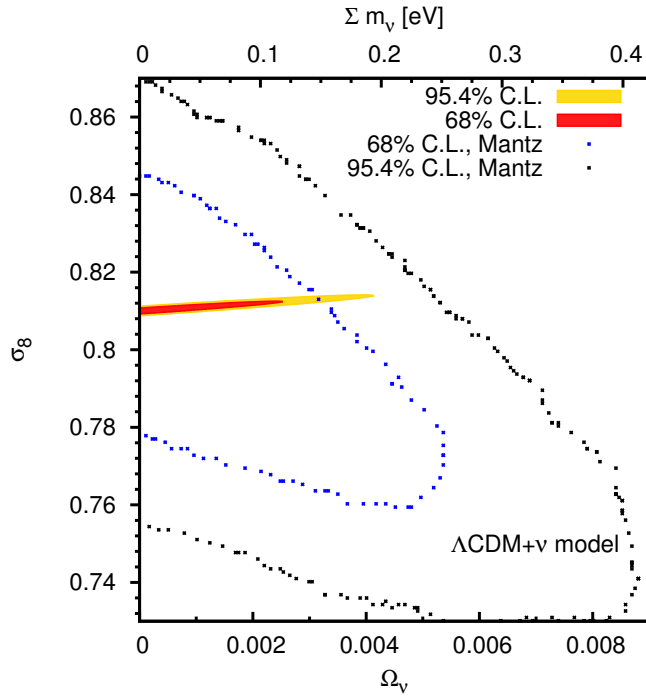


Figura 35: Confronto delle regioni di confidenza nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$  ottenute in un modello  $\Lambda\text{CDM}+\nu$  (ellissi *piene*) con i risultati di Mantz et al. (2010) [61] (punti *blu* e *neri*).

buzione della masse totale tra le varie specie influenzi la stima dei parametri cosmologici. In figura 36 sono messe a confronto le regioni al 68% di confidenza ottenute per un modello con 3 e 1 famiglie di neutrini massivi. Quest'ultimo modello, per  $\sum m_\nu < 0.1\text{eV}$ , corrisponde al caso della gerarchia normale, in cui due specie di neutrini hanno una massa trascurabile rispetto al neutrino più massivo. Come si può vedere nel caso con una sola famiglia massiva (ellisse *gialla*) i vincoli migliorano leggermente (circa del 10%). Questo è chiaro alla luce dell'analisi fatta in § 3.6. Infatti riducendo  $N_\nu$  ad uno la massa totale dei neutrini non viene più ripartita tra più specie, ampliando così gli effetti di soppressione dello spettro di potenza a parità di  $\Omega_\nu$  (vedi eq. (3.42)); in altre parole il conteggio ed in particolare lo spettro di potenza della distribuzione degli ammassi diventano più sensibili alla massa totale dei neutrini.

Molte delle *surveys* che verranno finanziate nei prossimi anni (tra cui anche EUCLID stessa) avranno come scopo primario lo studio della natura dell'energia oscura. Per quantificare quanto una futura *survey* riuscirà a vincolare l'equazione di stato (EoS) dell'energia oscura è stata introdotta la cosiddetta *figure-of-merit* (vedi [9]), definita come

$$\text{FoM} = (\det[C_{w_0, w_a}])^{-1/2}, \quad (4.20)$$

dove  $C_{w_0, w_a}$  è la matrice di covarianza tra  $w_0$  e  $w_a$ . Così definito questo parametro è inversamente proporzionale all'area racchiusa

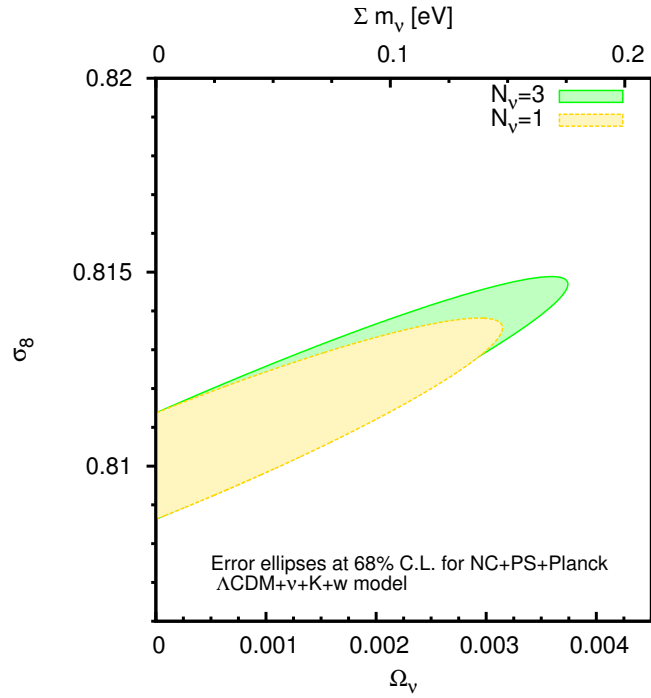


Figura 36: Confronto delle regioni entro il 68% di confidenza nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$  ottenute in un modello  $\Lambda\text{CDM}+\nu+K+w$  al variare del numero di famiglie:  $N_\nu = 3$  ellisse *verde*,  $N_\nu = 1$  ellisse *gialla*.

dall'ellisse entro il 68% di confidenza, di modo che tanto è più grande il suo valore, tanto più la *survey* sarà in grado di vincolare la EoS dell'energia oscura. In figura 37 viene illustrato come l'incertezza sulla massa dei neutrini influisce sui vincoli dei parametri dell'equazione di stato dell'energia oscura. Come si può vedere fissare o meno  $\Omega_\nu$  (rispettivamente ellisse *verde* e *rossa*) non condiziona molto la stima di  $w_0$  o di  $w_a$ . Infatti la *figure-of-merit* viene degradata da  $\text{FoM} = 956$  a  $\text{FoM} = 752$  tenendo in conto l'incertezza sulla massa totale dei neutrini. Quindi l'accuratezza con cui sarà possibile determinare l'equazione di stato dell'energia oscura non è fortemente influenzata dalla conoscenza del parametro  $\Omega_\nu$ .

Infine, per studiare con quale livello di confidenza sarà possibile determinare che i neutrini hanno massa non nulla, assumiamo un modello  $\Lambda\text{CDM}+\nu+K+w$  con  $\Omega_\nu = 0.002$ . Questo valore del parametro di densità dei neutrini corrisponde ad una massa totale  $\sum m_\nu = 0.1\text{eV}$ , ovvero il valore minimo di massa ottenuto da esperimenti di oscillazione nel caso di gerarchia inversa. In questo caso il neutrino più leggero ha una massa trascurabile rispetto a quella delle altre due specie, quindi nel calcolo della FM si è posto come valore di riferimento  $N_\nu = 2$ . La figura 38 mostra per l'appunto le ellissi d'errore entro il 68% (ellisse *gialla*) ed il 95.4% (ellisse *rossa*) di livello di confidenza ottenute in questo caso, combinando le matrici di Fisher dei conteggi, dello spettro di potenza e di Planck. Come si può vedere entrambe

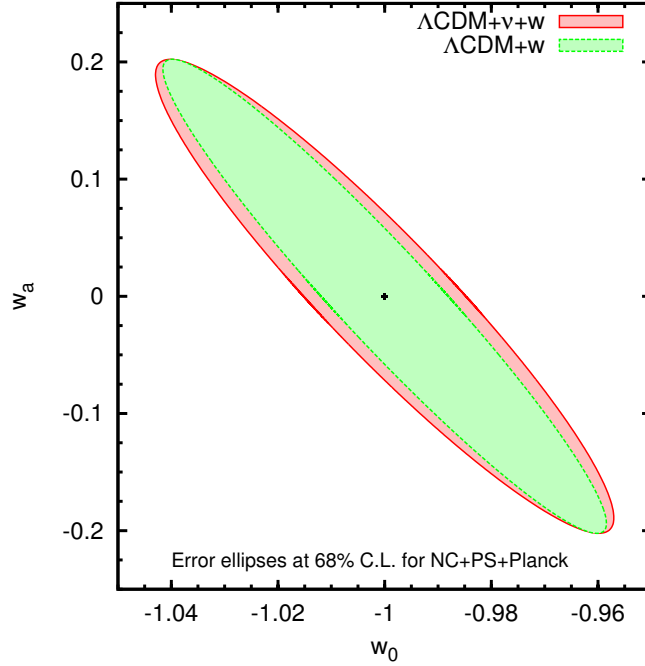


Figura 37: Confronto delle regioni entro il 68% di confidenza nel piano  $w_0 - w_a$  tenendo conto (ellisse *rossa*) o meno (ellisse *verde*) dell'incertezza sulla massa totale dei neutrini.

le regioni di confidenza sono più piccole rispetto al modello analogo calcolato con i valori di riferimento  $\Omega_\nu = 0$  e  $N_\nu = 3$  (vedi ellissi *verdi* in figura 39). In parte la riduzione dell'errore è legata, come spiegato in precedenza, alla riduzione del numero di famiglie massive da 3 a 2 (vedi eq. (3.42) e figura 36), in parte al fatto che lo spettro di potenza valutato nell'intorno di  $\Omega_\nu = 0.002$  è più sensibile alle variazioni di del parametro di densità dei neutrini. Questa combinazione di fattori fa sì che entro il 68% di livello di confidenza, se la massa totale dei neutrini è circa  $0.1\text{eV}$ , la *survey* sarà in grado di confermare che i neutrini hanno massa non nulla.

Riassumendo una *survey* di ammassi di galassie come quella che sarà effettuata da EUCLID, unita alle *priors* che si otterranno da Planck, sarà in grado di porre un limite superiore sulla massa totale dei neutrini compreso tra  $0.2\text{eV} < \Delta \sum m_N < 0.3\text{eV}$  (entro  $2\sigma$ ) a seconda dei vincoli adottati (vedi figura 39), migliorando quindi di circa un fattore due la stima sull'errore inferita dalle *surveys* di ammassi ad ora disponibili (p.es. [61]), pur senza includere le informazioni su  $\sum m_\nu$  date dal CMB. Le incertezze sulle relazioni massa-osservabile incidono solo indirettamente sull'errore di  $\Omega_\nu$ . Fissando i parametri di *nuisance* si ottiene solo un lieve miglioramento sulla sua stima, dato dalla forte correlazione di  $\Omega_\nu$  e  $\sigma_8$ . Assumendo una conoscenza pressoché perfetta dei parametri  $w(a)$  e/o  $\Omega_k$  l'errore sulla massa totale dei

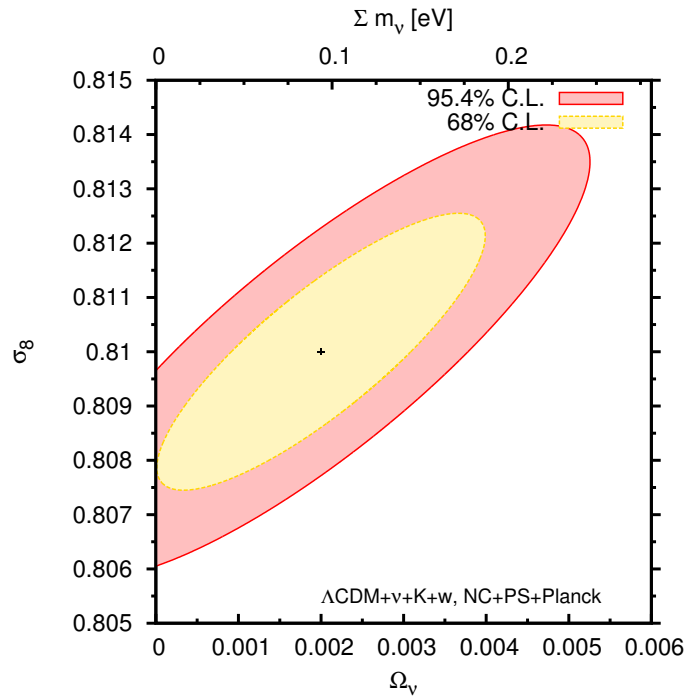
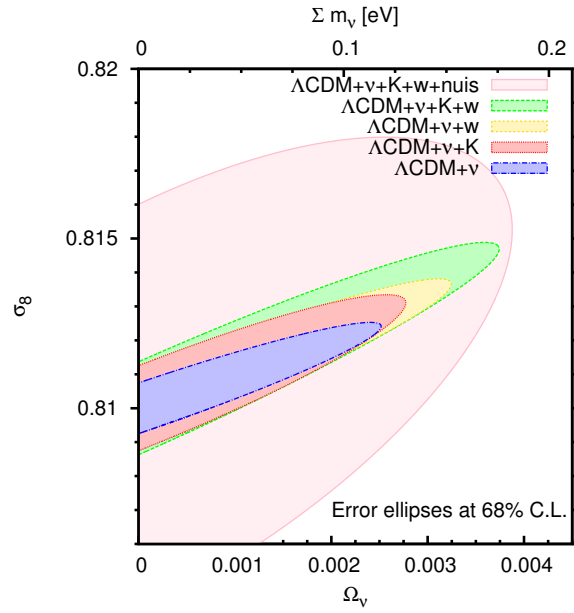
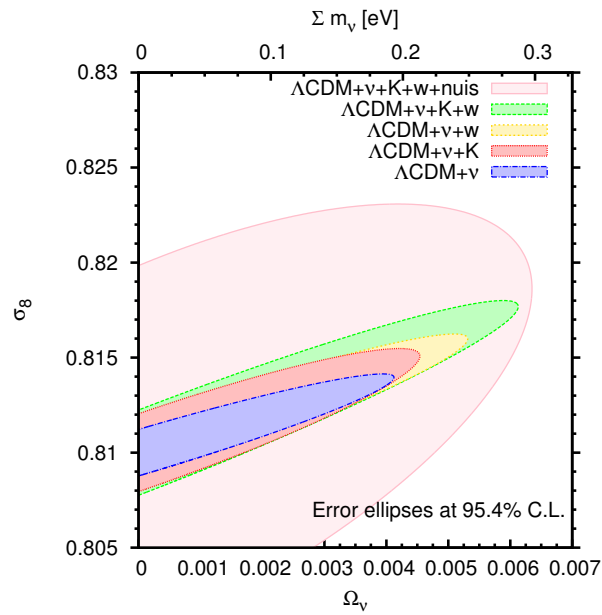


Figura 38: Regioni entro il 68% (ellisse *gialla*) ed il 95.4% (ellisse *rossa*) di livello di confidenza per un modello  $\Lambda$ CDM+ $\nu$ +K+w con parametri di riferimento per i neutrini  $\Omega_\nu = 0.002$  ( $\sum m_\nu = 0.1\text{eV}$ ) e  $N_\nu = 2$ .

neutrini viene ulteriormente ridotto,  $\sum m_\nu < 0.2\text{eV}$  (entro  $2\sigma$ ), ma non a sufficienza per determinare lo spettro di massa dei neutrini. Un ulteriore miglioramento sarebbe possibile includendo nell'analisi i vincoli dati da Planck sulla massa totale dei neutrini; si ricorda infatti che nell'analisi compiuta in questa tesi la matrice di Fisher di Planck non contiene informazioni sul parametro  $\Omega_\nu$ , tuttavia dallo studio delle anisotropie del CMB è possibile ottenere un vincolo diretto sulla massa dei neutrini. Inoltre dato che la direzione di degenerazione tra  $\Omega_\nu$  e  $\sigma_8$  è diversa da quella degli ammassi [59], ci si attende che il miglioramento nella stima di  $\Omega_\nu$  sia piuttosto pronunciato.



(a)



(b)

Figura 39: Riepilogo delle regioni entro il 68% (a) ed il 95.4% (b) di confidenza nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$  ottenute ponendo diverse *priors* sui vari parametri analizzati.

# CONCLUSIONI

---

## SOMMARIO

I neutrini massivi, influenzando in vario modo la formazione delle strutture cosmiche, lasciano una firma caratteristica dipendente dalla loro massa sulle strutture su grande scala dell'Universo. Questa impronta può essere rivelata in vari modi, ad esempio misurando le anisotropie della radiazione cosmica di fondo o mappando la distribuzione delle strutture cosmiche, come le galassie ad alto redshift o gli ammassi di galassie.

Future *surveys* della struttura su grande scala, come EUCLID [3] prevista per il 2019, permetteranno di identificare un grandissimo numero di questi oggetti, e quindi di ottenere delle ottime statistiche della loro distribuzione. In questa tesi, tramite l'utilizzo della matrice d'informazione di Fisher, sono stati calcolati i vincoli che sarà possibile inferire sulla massa totale dei neutrini da una futura *survey* di ammassi come quella di EUCLID. In particolare l'analisi è stata incentrata sulle regioni di confidenza ottenute nel piano  $\Omega_\nu - \sigma_8$ , in quanto proprio grazie alla capacità degli ammassi di tracciare l'evoluzione e la distribuzione dei picchi di densità delle fluttuazioni di materia, il loro conteggio ed il loro spettro di potenza sono particolarmente sensibili a  $\sigma_8$  e  $\Omega_\nu$ . Nel calcolare le regioni di confidenza sono stati adottati vari modelli che prevedono vincoli a priori (*priors*) più o meno forti su vari parametri cosmologici (vedi tabella 3) in vista dei risultati che saranno disponibili entro pochi anni da altre *surveys*. Per quanto riguarda i valori di riferimento dei parametri sono stati utilizzati i risultati del modello di *best-fitting* di WMAP-7 [48], con  $\Omega_\nu = 0$  e  $N_\nu = 3$ . Inoltre per tener conto di eventuali incertezze nella relazione tra massa ed osservabile sono stati introdotti nel calcolo della matrice di Fisher altri quattro parametri, detti di *nuisance*, per parametrizzare tali incertezze.

Dall'analisi risulta che un così grande campione di ammassi come quello atteso per EUCLID (oltre 60,000 seconde le stime [51]) permetterà di stimare la massa dei neutrini con un'incertezza compresa tra 0.25eV e 0.47eV entro il 95.4% di livello di confidenza, a seconda delle assunzioni fatte, senza aggiungere informazione alcuna da altre

*surveys* (vedi figura 40). Anche nel caso più conservativo che non si assumano *priors* su nessun parametro cosmologico (ad eccezion fatta per  $N_\nu$  posto uguale a 3), e si tenga conto dell'incertezza sulla relazione massa-osservabile, il limite superiore ottenuto di 0.47eV risulta già competitivo se si considera che gli esperimenti condotti sul decadimento beta forniscono un limite superiore dell'ordine dell'elettronvolt, mentre altre *surveys* cosmologiche, come ad esempio WMAP-7 danno un limite superiore di 1.3eV [48] assumendo un modello minimale  $\Lambda$ CDM+ $\nu$  (ovvero imponendo dei vincoli sulla curvatura e sull'equazione di stato dell'energia oscura). A contribuire maggiormente alla stima dell'errore su  $\Omega_\nu$  è l'informazione contenuta nello spettro di potenza (vedi figura 31), che presa singolarmente pone un limite di 0.5eV entro un  $\sigma$  sulla massa totale dei neutrini. Viceversa il conteggio degli ammassi è particolarmente sensibile al parametro di normalizzazione  $\sigma_8$  (al contrario dello spettro di potenza), mentre dipende più debolmente dal valore di  $\Omega_\nu$ . Questa caratteristica rende i due strumenti statistici fortemente complementari, e combinandone l'informazione, data la forte degenerazione presente tra i due parametri, è possibile vincolare  $\Omega_\nu$  e  $\sigma_8$  con accuratezza.

In base alle prestazioni attese per EUCLID, ed in particolare grazie alle misure che effettuerà di *weak lensing*, l'incertezza sulla relazione massa-osservabile potrà esser ridotta notevolmente. Si è verificato tuttavia che imponendo delle forti *priors* sui parametri di *nuisance*, si riduce sì l'errore su  $\sigma_8$ , ma la stima di  $\Omega_\nu$  resta all'incirca invariata (vedi figura 33). Dunque per poter vincolare accuratamente la massa dei neutrini risulta superfluo calibrare la relazione tra massa ed osservabile con estrema precisione.

Ovviamente la stima dell'errore può essere migliorata tenendo in considerazione i vincoli che l'esperimento in corso Planck[6] potrà fornire dallo studio delle anisotropie del fondo cosmico di microonde. Combinando le matrici di Fisher ottenute dal conteggio degli ammassi e dal loro spettro di potenza con la matrice di Fisher calcolata per Planck la stima dell'errore oscilla tra 0.2eV e 0.3eV entro  $2\sigma$ , a seconda delle *priors* che si utilizzano (vedi figura 39(b)). É da notare che nell'analisi svolta in questa tesi la matrice di Fisher di Planck utilizzata non tiene conto dell'informazione data dallo spettro delle anisotropie del CMB sulla massa dei neutrini, e quindi la riduzione dell'errore sulla stima di  $\Omega_\nu$  è legata ai vincoli posti sui parametri direttamente o indirettamente degeneri con la massa dei neutrini. Confrontando questi risultati con quelli ottenuti da Mantz et al. (2010) utilizzando un campione di 238 ammassi identificati dalla RASS ed i dati di WMAP-5 (vedi figura 35), la nostra analisi prevede che sarà possibile all'incirca dimezzare la miglior stima dell'errore sulla massa dei neutrini attualmente calcolata tramite *survey* di ammassi di galassie. L'analisi di Mantz et al. (2010) tuttavia si basa sul conteggio di ammassi relativo ad un piccolo campione, sarebbe dunque interessante valutare quanto



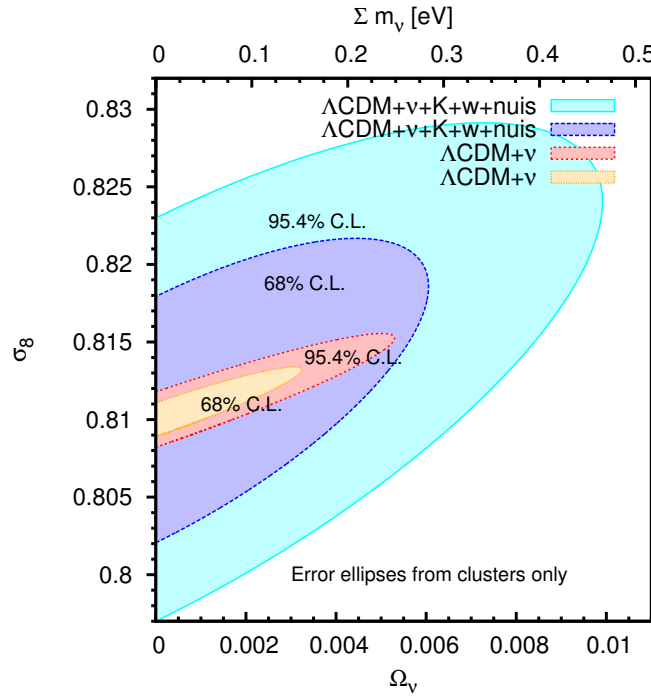


Figura 40: Regioni di confidenza previste entro il 68% ed il 95.4% di livello di confidenza per una *survey* di ammassi come quella di EUCLID, calcolate con (ellissi gialla e rossa) e senza (ellissi blu e azzurra) *priors*.

misure dello spettro di potenza degli ammassi, possibili grazie ai dati già disponibili [13], possano vincolare il valore di  $\Omega_\nu$ , soprattutto alla luce del fatto che più che il conteggio degli ammassi è lo spettro di potenza che vincola il valore di questo parametro.

*Surveys* future, come BOSS [2] o EUCLID stessa, che studieranno la storia d'espansione dell'Universo (ad esempio tramite le BAO o le SNe-Ia) saranno in grado di porre vincoli particolarmente stringenti sull'equazione di stato dell'energia oscura e sulla geometria dell'Universo. In base a questo si è analizzato l'effetto che si ha sulla stima della massa dei neutrini fissando rispettivamente  $\Omega_k = 0$ , ovvero la piattezza dell'Universo, o  $w_0 = -1$  e  $w_a = 0$ , cioè assumendo una costante cosmologica. In entrambi i casi l'errore su  $\sigma_8$  resta pressoché invariato, grazie alla grande precisione con cui viene stimato questo parametro dal conteggio degli ammassi, mentre l'errore sulla massa dei neutrini si riduce nel primo caso del 12% e nel secondo del 25% rispetto alla stima ottenuta lasciando liberi entrambi i parametri. Questo diverso comportamento è dovuto al fatto che la combinazione dell'informazione data dagli ammassi con quella data da Planck permetterà di vincolare meglio la geometria dell'Universo rispetto all'equazione di stato dell'energia oscura (lo spettro del CMB è pressoché insensibile a  $w(a)$ ), dunque fissando il valore di  $w_0$  e  $w_a$  si aggiunge più informazione alla matrice di Fisher rispetto al caso in cui ad essere

fissata sia la piatezza.

A secondo dello spettro di massa che posseggono i neutrini, ovvero a seconda di come è distribuita la massa totale tra le varie famiglie, i vincoli attesi per la massa dei neutrini variano (vedi figura 34 e figura 38). In particolare assumendo un numero di famiglie minore, e quindi ripartendo tra meno specie la massa totale, l'errore stimato si riduce (ad esempio del 10% passando da tre famiglie massive ad una). Questo perché lo spettro di potenza risulta, a parità di  $\Omega_\nu$ , più soppresso nel caso di neutrini più massivi. Per la stessa ragione assumendo un valore di riferimento per  $\Omega_\nu$  diverso da zero la stima dell'errore cala. Ad esempio ipotizzando una massa totale di 0.1eV, corrispondente alla massa totale minima nel caso di gerarchia inversa, e di conseguenza assumendo due famiglie di neutrini, l'errore sulla massa è di circa 0.15eV entro  $2\sigma$ . Inoltre da questa analisi si evince che se la massa totale dei neutrini è perlomeno uguale a 0.1eV questo tipo di *survey* sarà in grado di stabilire entro il 68% di livello di confidenza che la loro massa è non nulla.

#### SVILUPPI FUTURI

Sono varie le ulteriori analisi che è possibile effettuare per estendere i risultati presentati in questo lavoro di tesi. Prima fra tutte l'inclusione nel calcolo delle regioni di confidenza dei vincoli dati da Planck direttamente su  $\Omega_\nu$ . Difatti dai risultati dalle misure delle anisotropie del CMB sarà possibile ricavare un vincolo diretto sulla massa dei neutrini stimato a 0.2eV entro un  $\sigma$  [84]. Aggiungendo dunque queste informazioni a quelle provenienti da una *survey* di ammassi, considerando il fatto che la direzione di degenerazione tra  $\sigma_8$  e  $\Omega_\nu$  data dal CMB è diversa da quella data dagli ammassi di galassie, sarà possibile ridurre notevolmente l'errore sulla massa totale dei neutrini, plausibilmente al di sotto di 0.05eV [120]. Un limite così basso permetterebbe in linea di principio di distinguere quale tra i due diversi spettri di massa possibili per i neutrini (gerarchia inversa o normale) si realizza in Natura. Un altro contributo che si potrebbe tener in considerazione nell'analisi è quello dato dall'informazione contenuta nella distorsione, dovuta alla velocità peculiari degli oggetti osservati, tra il campo di densità nello spazio reale e quello nello spazio del redshift (brevemente *redshift space distortion*). Difatti è stato mostrato di recente come il contributo di questo effetto possa, anche nel caso di *survey* di ammassi, aiutare molto nel vincolare i parametri cosmologici [100].

Un'ulteriore analisi utile, alla luce del fatto che è principalmente lo spettro di potenza degli ammassi a vincolare  $\sum m_\nu$ , è quella di valutare quali modi di Fourier contribuiscono di più a vincolare la massa dei neutrini. Considerando il fatto che lo spettro perde potenza a causa dei neutrini massivi su scale al disotto della lunghezza di *free-streaming* (ovvero per modi  $k > k_{fs}$ ), è plausibile che il contributo

ai vincoli su  $\Omega_\nu$  dato dai modi  $k \gtrsim k_{fs}$  sia trascurabile. In questo caso la *survey* più adatta a vincolare la massa dei neutrini risulterebbe, piuttosto che quella considerata in questa analisi con una *sky coverage* di  $15,000\text{deg}^2$  ed una massa limite osservabile di  $10^{14}h^{-1}M_\odot$  (in linea con le specifiche di EUCLID), una *survey* su un'area minore di cielo, in grado di campionare i modi utili a vincolare la massa dei neutrini, ma con una massa limite inferiore, in modo da ridurre al massimo il rumore poissoniano.

In questo lavoro di tesi per calcolare i vincoli sui diversi parametri si è utilizzata la matrice di Fisher. Tuttavia le regioni di confidenza che si ottengono con questo metodo si basano sull'assunzione che lo spazio dei parametri sia ben approssimato da una gaussiana multivariata. In generale questa può essere una buona approssimazione, ma in alcuni casi, come si è visto ad esempio per il parametro  $N_\nu$ , risulta essere un'approssimazione grossolana che porta ad errori sulla stima dei parametri. Dunque uno sviluppo successivo richiederebbe l'utilizzo di metodi che si basano sugli algoritmi Monte Carlo Markov Chain. Questi metodi, anche se richiedono tempi computazionali più lunghi rispetto alla FM, permettono di esplorare lo spazio dei parametri con maggiore accuratezza, fornendo risultati più attendibili che non dipendono da assunzioni circa la gaussianità della funzione di *likelihood*.

In definitiva la cosmologia di precisione fornisce un prezioso strumento per lo studio di molti aspetti fondamentali della fisica, ed in particolare delle proprietà dei neutrini. Combinando un numero sempre maggiore di dati provenienti da diverse sonde della struttura su grande scala dell'Universo, come gli ammassi di galassie, osservazioni del *weak lensing*, misure delle anisotropie del CMB, sarà possibile vincolare la massa di queste particelle con una precisione di  $\sim 0.05\text{eV}$ , permettendo così anche di discriminare quale tra i due spettri di massa possibili sia quello che si realizza in Natura. Infine lo sviluppo di metodi numerici e semi-analitici sempre più accurati permetterà di fare previsioni teoriche sull'evoluzione delle strutture in regime non lineare, consentendo così di sfruttare appieno le potenzialità delle future *surveys* in grado di esplorare scale per cui cessa di valere la teoria lineare, e quindi plausibilmente di misurare la massa assoluta dei neutrini tramite la cosmologia di precisione.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] The 2df galaxy redshift survey, . URL <http://msowww.anu.edu.au/2dFGRS/>.
- [2] Baryon oscillation spectroscopic survey, . URL <http://www.sdss3.org/surveys/boss.php>.
- [3] Euclid mission, . URL <http://www.euclid-emc.org/>.
- [4] Large synoptic survey telescope, . URL <http://www.lsst.org/lsst/>.
- [5] Panoramic survey telescope & rapid response system, . URL <http://pan-starrs.ifa.hawaii.edu/public/>.
- [6] Placnk mission, . URL <http://www.esa.int/SPECIALS/Planck/index.html>.
- [7] erosita telescope, . URL <http://www.mpe.mpg.de/erosita/>.
- [8] G. O. Abell. The Distribution of Rich Clusters of Galaxies. *Astrophysical Journal Supplement*, 3:211–+, May 1958. doi: 10.1086/190036.
- [9] A. Albrecht, L. Amendola, G. Bernstein, D. Clowe, D. Eisenstein, L. Guzzo, C. Hirata, D. Huterer, R. Kirshner, E. Kolb, and R. Nichol. Findings of the Joint Dark Energy Mission Figure of Merit Science Working Group. *ArXiv e-prints*, January 2009.
- [10] S. W. Allen, D. A. Rapetti, R. W. Schmidt, H. Ebeling, R. G. Morris, and A. C. Fabian. Improved constraints on dark energy from Chandra X-ray observations of the largest relaxed galaxy clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 383: 879–896, January 2008. doi: 10.1111/j.1365-2966.2007.12610.x.
- [11] S. W. Allen, A. E. Evrard, and A. B. Mantz. Cosmological Parameters from Observations of Galaxy Clusters. *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 49:409–470, September 2011. doi: 10.1146/annurev-astro-081710-102514.
- [12] S. Ameglio, S. Borgani, E. Pierpaoli, K. Dolag, S. Ettori, and A. Morandi. Reconstructing mass profiles of simulated galaxy clusters by combining Sunyaev-Zeldovich and X-ray images. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 394:479–490, March 2009. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.14324.x.

- [13] A. Balaguera-Antolínez, A. G. Sánchez, H. Böhringer, C. Collins, L. Guzzo, and S. Phleps. The REFLEX II galaxy cluster survey: power spectrum analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 413:386–400, May 2011. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.18143.x.
- [14] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, and A. S. Szalay. The statistics of peaks of Gaussian random fields. *Astrophysical Journal*, 304:15–61, May 1986. doi: 10.1086/164143.
- [15] M. Bartelmann. Gravitational Lensing. *ArXiv e-prints*, October 2010.
- [16] M. R. Becker and A. V. Kravtsov. On the Accuracy of Weak-lensing Cluster Mass Reconstructions. *Astrophysical Journal*, 740: 25–+, October 2011. doi: 10.1088/0004-637X/740/1/25.
- [17] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic dynamics*. 1987.
- [18] J. R. Bond, G. Efstathiou, and J. Silk. Massive neutrinos and the large-scale structure of the universe. *Physical Review Letters*, 45: 1980–1984, December 1980. doi: 10.1103/PhysRevLett.45.1980.2.
- [19] J. R. Bond, S. Cole, G. Efstathiou, and N. Kaiser. Excursion set mass functions for hierarchical Gaussian fluctuations. *Astrophysical Journal*, 379:440–460, October 1991. doi: 10.1086/170520.
- [20] S. Borgani. Cosmology with clusters of galaxies. *ArXiv Astrophysics e-prints*, May 2006.
- [21] S. Borgani and L. Guzzo. X-ray clusters of galaxies as tracers of structure in the Universe. *Nature*, 409:39–45, January 2001. doi: 10.1038/35051000.
- [22] J. Brandbyge, S. Hannestad, T. Haugbølle, and Y. Y. Y. Wong. Neutrinos in non-linear structure formation – the effect on halo properties. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 9:14–+, September 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/09/014.
- [23] S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner. The cosmological constant. *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 30:499–542, 1992. doi: 10.1146/annurev.aa.30.090192.002435.
- [24] C. Cunha, D. Huterer, and O. Doré. Primordial non-Gaussianity from the covariance of galaxy cluster counts. *Physical Review D*, 82(2):023004–+, July 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.82.023004.
- [25] M. Davis and P. J. E. Peebles. A survey of galaxy redshifts. V - The two-point position and velocity correlations. *Astrophysical Journal*, 267:465–482, April 1983. doi: 10.1086/160884.

- [26] A. D. Dolgov. Neutrinos in cosmology. *Physics Reports*, 370: 333–535, November 2002. doi: 10.1016/S0370-1573(02)00139-4.
- [27] D. J. Eisenstein and W. Hu. Baryonic Features in the Matter Transfer Function. *Astrophysical Journal*, 496:605–+, March 1998. doi: 10.1086/305424.
- [28] D. J. Eisenstein and W. Hu. Power Spectra for Cold Dark Matter and Its Variants. *Astrophysical Journal*, 511:5–15, January 1999. doi: 10.1086/306640.
- [29] S. Ettori, A. Morandi, P. Tozzi, I. Balestra, S. Borgani, P. Rosati, L. Lovisari, and F. Terenziani. The cluster gas mass fraction as a cosmological probe: a revised study. *Astronomy and Astrophysics*, 501:61–73, July 2009. doi: 10.1051/0004-6361/200810878.
- [30] A. E. Evrard, T. J. MacFarland, H. M. P. Couchman, J. M. Colberg, N. Yoshida, S. D. M. White, A. Jenkins, C. S. Frenk, F. R. Pearce, J. A. Peacock, and P. A. Thomas. Galaxy Clusters in Hubble Volume Simulations: Cosmological Constraints from Sky Survey Populations. *Astrophysical Journal*, 573:7–36, July 2002. doi: 10.1086/340551.
- [31] A. Finoguenov, T. H. Reiprich, and H. Böhringer. Details of the mass-temperature relation for clusters of galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 368:749–759, March 2001. doi: 10.1051/0004-6361:20010080.
- [32] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, and A. Palazzo. Global analysis of three-flavor neutrino masses and mixings. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 57:742–795, October 2006. doi: 10.1016/j.pnpnp.2005.08.002.
- [33] S. S. Gershtein and Y. B. Zel'Dovich. Rest Mass of Muonic Neutrino and Cosmology. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 4:120–+, September 1966.
- [34] M. Girardi, G. Giuricin, F. Mardirossian, M. Mezzetti, and W. Boschin. Optical Mass Estimates of Galaxy Clusters. *Astrophysical Journal*, 505:74–95, September 1998. doi: 10.1086/306157.
- [35] M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, and J. Salvado. Updated global fit to three neutrino mixing: status of the hints of  $\theta_{13} > 0$ . *Journal of High Energy Physics*, 4:56–+, April 2010. doi: 10.1007/JHEP04(2010)056.
- [36] J. Hamann, S. Hannestad, J. Lesgourgues, C. Rampf, and Y. Y. Y. Wong. Cosmological parameters from large scale structure - geometric versus shape information. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 7:22–+, July 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/07/022.

- [37] S. Hannestad. Neutrino physics from precision cosmology. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 65:185–208, October 2010. doi: 10.1016/j.pnpnp.2010.07.001.
- [38] A. Heavens. Statistical techniques in cosmology. *ArXiv e-prints*, June 2009.
- [39] J. P. Henry, A. E. Evrard, H. Hoekstra, A. Babul, and A. Mahdavi. The X-Ray Cluster Normalization of the Matter Power Spectrum. *Astrophysical Journal*, 691:1307–1321, February 2009. doi: 10.1088/0004-637X/691/2/1307.
- [40] H. Hoekstra. A comparison of weak-lensing masses and X-ray properties of galaxy clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 379:317–330, July 2007. doi: 10.1111/j.1365-2966.2007.11951.x.
- [41] W. Hu and D. J. Eisenstein. Small-Scale Perturbations in a General Mixed Dark Matter Cosmology. *Astrophysical Journal*, 498:497–+, May 1998. doi: 10.1086/305585.
- [42] W. Hu, D. J. Eisenstein, and M. Tegmark. Weighing Neutrinos with Galaxy Surveys. *Physical Review Letters*, 80:5255–5258, June 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.5255.
- [43] K. Ichiki and M. Takada. The impact of massive neutrinos on the abundance of massive clusters. *ArXiv e-prints*, August 2011.
- [44] A. Jenkins, C. S. Frenk, S. D. M. White, J. M. Colberg, S. Cole, A. E. Evrard, H. M. P. Couchman, and N. Yoshida. The mass function of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 321:372–384, February 2001. doi: 10.1046/j.1365-8711.2001.04029.x.
- [45] N. Kaiser. Evolution and clustering of rich clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 222:323–345, September 1986.
- [46] G. Karagiorgi et al. Leptonic CP violation studies at MiniBooNE in the (3+2) sterile neutrino oscillation hypothesis. *Phys. Rev.*, D75:013011, 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.75.013011.
- [47] B. P. Koester, T. A. McKay, J. Annis, R. H. Wechsler, A. E. Evrard, E. Rozo, L. Bleem, E. S. Sheldon, and D. Johnston. MaxBCG: A Red-Sequence Galaxy Cluster Finder. *Astrophysical Journal*, 660: 221–238, May 2007. doi: 10.1086/512092.
- [48] E. Komatsu et al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophysical Journal Supplement*, 192:18–+, February 2011. doi: 10.1088/0067-0049/192/2/18.

- [49] C. Kraus, B. Bornschein, L. Bornschein, J. Bonn, B. Flatt, A. Kovalik, B. Ostrick, E. W. Otten, J. P. Schall, T. Thümmeler, and C. Weinheimer. Final results from phase II of the Mainz neutrino mass search in tritium  $\{\beta\}$  decay. *European Physical Journal C*, 40:447–468, April 2005. doi: 10.1140/epjc/s2005-02139-7.
- [50] S. J. LaRoque, M. Bonamente, J. E. Carlstrom, M. K. Joy, D. Nagai, E. D. Reese, and K. S. Dawson. X-Ray and Sunyaev-Zel'dovich Effect Measurements of the Gas Mass Fraction in Galaxy Clusters. *Astrophysical Journal*, 652:917–936, December 2006. doi: 10.1086/508139.
- [51] R. Laureijs, J. Amiaux, S. Arduini, J. . Auguères, J. Brinchmann, R. Cole, M. Cropper, C. Dabin, L. Duvet, A. Ealet, and et al. et al. Euclid Definition Study Report. *ArXiv e-prints*, October 2011.
- [52] J. Lesgourgues and S. Pastor. Massive neutrinos and cosmology. *Physics Reports*, 429:307–379, July 2006. doi: 10.1016/j.physrep.2006.04.001.
- [53] J. Lesgourgues, S. Pastor, and L. Perotto. Probing neutrino masses with future galaxy redshift surveys. *Physical Review D*, 70(4):045016–+, August 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.045016.
- [54] M. Lima and W. Hu. Self-calibration of cluster dark energy studies: Observable-mass distribution. *Physical Review D*, 72(4):043006–+, August 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.72.043006.
- [55] S. Majumdar and J. J. Mohr. Importance of Cluster Structural Evolution in Using X-Ray and Sunyaev-Zeldovich Effect Galaxy Cluster Surveys to Study Dark Energy. *Astrophysical Journal*, 585:603–610, March 2003. doi: 10.1086/346179.
- [56] S. Majumdar and J. J. Mohr. Self-Calibration in Cluster Studies of Dark Energy: Combining the Cluster Redshift Distribution, the Power Spectrum, and Mass Measurements. *Astrophysical Journal*, 613:41–50, September 2004. doi: 10.1086/422829.
- [57] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata. *Prog. Theor. Phys.* 28 (1962) 870.
- [58] M. Maltoni, T. Schwetz, M. Tortola, and J. W. F. Valle. Status of global fits to neutrino oscillations. *New Journal of Physics*, 6:122–+, September 2004. doi: 10.1088/1367-2630/6/1/122.
- [59] A. Mantz, S. Allen, D. Rapetti, H. Ebeling, and A. Drlica-Wagner. Constraints on Cosmology and X-ray Scaling Relations from the Growth of Massive Galaxy Clusters. In S. Wolk, A. Fruscione, & D. Swartz, editor, *Chandra's First Decade of Discovery*, September 2009.



- [60] A. Mantz, S. W. Allen, H. Ebeling, D. Rapetti, and A. Drlica-Wagner. The observed growth of massive galaxy clusters - II. X-ray scaling relations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406:1773–1795, August 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16993.x.
- [61] A. Mantz, S. W. Allen, and D. Rapetti. The observed growth of massive galaxy clusters - IV. Robust constraints on neutrino properties. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406:1805–1814, August 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16794.x.
- [62] A. Mantz, S. W. Allen, D. Rapetti, and H. Ebeling. The observed growth of massive galaxy clusters - I. Statistical methods and cosmological constraints. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406:1759–1772, August 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16992.x.
- [63] F. Marulli, C. Carbone, M. Viel, L. Moscardini, and A. Cimatti. Effects of massive neutrinos on the large-scale structure of the Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, page 1424, September 2011. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.19488.x.
- [64] B. J. Maughan. The L<sub>X</sub>-Y<sub>X</sub> Relation: Using Galaxy Cluster X-Ray Luminosity as a Robust, Low-Scatter Mass Proxy. *Astrophysical Journal*, 668:772–780, October 2007. doi: 10.1086/520831.
- [65] B. J. Maughan, L. R. Jones, H. Ebeling, and C. Scharf. The evolution of the cluster X-ray scaling relations in the Wide Angle ROSAT Pointed Survey sample at  $0.6 < z < 1.0$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 365:509–529, January 2006. doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.09717.x.
- [66] J.-B. Melin, J. G. Bartlett, and J. Delabrouille. The selection function of SZ cluster surveys. *Astronomy and Astrophysics*, 429:417–426, January 2005. doi: 10.1051/0004-6361:20048093.
- [67] M. Meneghetti, E. Rasia, J. Merten, F. Bellagamba, S. Ettori, P. Mazzotta, K. Dolag, and S. Marri. Weighing simulated galaxy clusters using lensing and X-ray. *Astronomy and Astrophysics*, 514:A93+, May 2010. doi: 10.1051/0004-6361/200913222.
- [68] P. Meszaros. The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum. *Astronomy and Astrophysics*, 37:225–228, December 1974.
- [69] H. J. Mo and S. D. M. White. An analytic model for the spatial clustering of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 282:347–361, September 1996.

- [70] H. J. Mo, Y. P. Jing, and S. D. M. White. The correlation function of clusters of galaxies and the amplitude of mass fluctuations in the Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 282:1096–1104, October 1996.
- [71] Houjun Mo, Frank Van den Bosch, and Simon White. *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, May 2010. ISBN 9780521857932.
- [72] P. M. Motl, E. J. Hallman, J. O. Burns, and M. L. Norman. The Integrated Sunyaev-Zeldovich Effect as a Superior Method for Measuring the Mass of Clusters of Galaxies. *Astrophysical Journal Letters*, 623:L63–L66, April 2005. doi: 10.1086/430144.
- [73] Th. A. Mueller et al. Improved Predictions of Reactor Antineutrino Spectra. *Phys. Rev.*, C83:054615, 2011. doi: 10.1103/PhysRevC.83.054615.
- [74] D. Nagai, A. Vikhlinin, and A. V. Kravtsov. Testing X-Ray Measurements of Galaxy Clusters with Cosmological Simulations. *Astrophysical Journal*, 655:98–108, January 2007. doi: 10.1086/509868.
- [75] J. P. F. Osmond and T. J. Ponman. The GEMS project: X-ray analysis and statistical properties of the group sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 350:1511–1535, June 2004. doi: 10.1111/j.1365-2966.2004.07742.x.
- [76] Particle Data Group, S. Eidelman, et al. Review of Particle Physics. *Physics Letters B*, 592:1–5, July 2004. doi: 10.1016/j.physletb.2004.06.001.
- [77] W. Pauli. in letter to participants of the Conference in Tübingen (1930); Septieme Conseil de Physique Solvay 1933, *Noyaux Atomiques*, 324 (1934).
- [78] J. A. Peacock. *Cosmological Physics*. January 1999.
- [79] P. J. E. Peebles. Large-scale background temperature and mass fluctuations due to scale-invariant primeval perturbations. *Astrophysical Journal Letters*, 263:L1–L5, December 1982. doi: 10.1086/183911.
- [80] P. J. E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. 1993.
- [81] U.-L. Pen. Measuring the universal deceleration using angular diameter distances to clusters of galaxies. *New Astronomy*, 2: 309–317, October 1997. doi: 10.1016/S1384-1076(97)00021-3.

- [82] W. J. Percival and M. White. Testing cosmological structure formation using redshift-space distortions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 393:297–308, February 2009. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.14211.x.
- [83] W. J. Percival et al. Baryon acoustic oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 401:2148–2168, February 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15812.x.
- [84] L. Perotto, J. Lesgourgues, S. Hannestad, H. Tu, and Y. Y Y Wong. Probing cosmological parameters with the CMB: forecasts from Monte Carlo simulations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 10:13, October 2006. doi: 10.1088/1475-7516/2006/10/013.
- [85] B. M Pontecorvo. Sov. Phys. JETP 6 (1957) 429 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33 (1957)549].
- [86] P. Popesso, A. Biviano, H. Böhringer, M. Romaniello, and W. Voges. RASS-SDSS galaxy cluster survey. III. Scaling relations of galaxy clusters. *Astronomy and Astrophysics*, 433:431–445, April 2005. doi: 10.1051/0004-6361:20041915.
- [87] W. H. Press and P. Schechter. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. *Astrophysical Journal*, 187:425–438, February 1974. doi: 10.1086/152650.
- [88] J. R. Primack. Whatever Happened to Hot Dark Matter? *ArXiv Astrophysics e-prints*, December 2001.
- [89] D. Rapetti, S. W. Allen, A. Mantz, and H. Ebeling. Constraints on modified gravity from the observed X-ray luminosity function of galaxy clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400:699–704, December 2009. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15510.x.
- [90] D. Rapetti, S. W. Allen, A. Mantz, and H. Ebeling. The observed growth of massive galaxy clusters - III. Testing general relativity on cosmological scales. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406:1796–1804, August 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16799.x.
- [91] E. Rasia, P. Mazzotta, S. Borgani, L. Moscardini, K. Dolag, G. Tormen, A. Diaferio, and G. Murante. Mismatch between X-Ray and Emission-weighted Temperatures in Galaxy Clusters: Cosmological Implications. *Astrophysical Journal Letters*, 618:L1–L4, January 2005. doi: 10.1086/427554.

- [92] A. Rassat, A. Amara, L. Amendola, F. J. Castander, T. Kitching, M. Kunz, A. Refregier, Y. Wang, and J. Weller. Deconstructing Baryon Acoustic Oscillations: A Comparison of Methods. *ArXiv e-prints*, October 2008.
- [93] B. A. Reid et al. Cosmological constraints from the clustering of the Sloan Digital Sky Survey DR7 luminous red galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 404:60–85, May 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16276.x.
- [94] F. Reines and C. L. Cowan. Unknow. *Nature*, (178):446, 1956.
- [95] T. H. Reiprich and H. Böhringer. The Mass Function of an X-Ray Flux-limited Sample of Galaxy Clusters. *Astrophysical Journal*, 567:716–740, March 2002. doi: 10.1086/338753.
- [96] A. G. Riess, L. Macri, S. Casertano, M. Sosey, H. Lampeitl, H. C. Ferguson, A. V. Filippenko, S. W. Jha, W. Li, R. Chornock, and D. Sarkar. A Redetermination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope from a Differential Distance Ladder. *Astrophysical Journal*, 699:539–563, July 2009. doi: 10.1088/0004-637X/699/1/539.
- [97] V. Rodin, A. Faessler, F. Šimkovic, and P. Vogel. Uncertainties in the  $0\nu\beta\beta$ -decay nuclear matrix elements. *Czechoslovak Journal of Physics*, 56:495–503, May 2006. doi: 10.1007/s10582-006-0113-7.
- [98] P. Rosati, S. Borgani, and C. Norman. The Evolution of X-ray Clusters of Galaxies. *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 40:539–577, 2002. doi: 10.1146/annurev.astro.40.120401.150547.
- [99] E. Rozo, R. H. Wechsler, E. S. Rykoff, J. T. Annis, M. R. Becker, A. E. Evrard, J. A. Frieman, S. M. Hansen, J. Hao, D. E. Johnston, B. P. Koester, T. A. McKay, E. S. Sheldon, and D. H. Weinberg. Cosmological Constraints from the Sloan Digital Sky Survey maxBCG Cluster Catalog. *Astrophysical Journal*, 708:645–660, January 2010. doi: 10.1088/0004-637X/708/1/645.
- [100] B. Sartoris, S. Borgani, P. Rosati, and J. Weller. Probing dark energy with the next generation x-ray surveys of galaxy clusters. Submitted.
- [101] B. Sartoris, S. Borgani, C. Fedeli, S. Matarrese, L. Moscardini, P. Rosati, and J. Weller. The potential of X-ray cluster surveys to constrain primordial non-Gaussianity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 407:2339–2354, October 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.17050.x.
- [102] S. Sasaki. A New Method to Estimate Cosmological Parameters Using the Baryon Fraction of Clusters of Galaxies. *Publ. of the Astronomical Society of Japan*, 48:L119–L122, December 1996.

- [103] P. Schuecker, H. Böhringer, C. A. Collins, and L. Guzzo. The REFLEX galaxy cluster survey. VII.  $\Omega_m$  and  $\sigma_8$  from cluster abundance and large-scale clustering. *Astronomy and Astrophysics*, 398:867–877, February 2003. doi: 10.1051/0004-6361:20021715.
- [104] U. Seljak and M. Zaldarriaga. A Line-of-Sight Integration Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies. *Astrophysical Journal*, 469:437–+, October 1996. doi: 10.1086/177793.
- [105] U. Seljak, A. Slosar, and P. McDonald. Cosmological parameters from combining the Lyman- $\alpha$  forest with CMB, galaxy clustering and SN constraints. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 10:14, October 2006. doi: 10.1088/1475-7516/2006/10/014.
- [106] P. D. Serpico and G. G. Raffelt. Lepton asymmetry and primordial nucleosynthesis in the era of precision cosmology. *Physical Review D*, 71(12):127301–+, June 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.71.127301.
- [107] L. D. Shaw, G. P. Holder, and P. Bode. The Impact of Halo Properties, Energy Feedback, and Projection Effects on the Mass-SZ Flux Relation. *Astrophysical Journal*, 686:206–218, October 2008. doi: 10.1086/589849.
- [108] R. K. Sheth and G. Tormen. Large-scale bias and the peak background split. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 308:119–126, September 1999. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02692.x.
- [109] R. K. Sheth, H. J. Mo, and G. Tormen. Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 323:1–12, May 2001. doi: 10.1046/j.1365-8711.2001.04006.x.
- [110] M. Shoji and E. Komatsu. Erratum: Massive neutrinos in cosmology: Analytic solutions and fluid approximation [Phys. Rev. D 81, 123516 (2010)]. *Physical Review D*, 82(8):089901–+, October 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.82.089901.
- [111] A. Stril, R. N. Cahn, and E. V. Linder. Testing standard cosmology with large-scale structure. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 404:239–246, May 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16193.x.
- [112] R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich. The Observations of Relic Radiation as a Test of the Nature of X-Ray Radiation from the Clusters of Galaxies. *Comments on Astrophysics and Space Physics*, 4:173–+, November 1972.

- [113] M. Takada, E. Komatsu, and T. Futamase. Cosmology with high-redshift galaxy survey: Neutrino mass and inflation. *Physical Review D*, 73(8):083520–+, April 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.73.083520.
- [114] M. Tegmark. Measuring Cosmological Parameters with Galaxy Surveys. *Physical Review Letters*, 79:3806–3809, November 1997. doi: 10.1103/PhysRevLett.79.3806.
- [115] S. A. Thomas, F. B. Abdalla, and O. Lahav. Upper Bound of 0.28 eV on Neutrino Masses from the Largest Photometric Redshift Survey. *Physical Review Letters*, 105(3):031301, July 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.105.031301.
- [116] J. Tinker, A. V. Kravtsov, A. Klypin, K. Abazajian, M. Warren, G. Yepes, S. Gottlöber, and D. E. Holz. Toward a Halo Mass Function for Precision Cosmology: The Limits of Universality. *Astrophysical Journal*, 688:709–728, December 2008. doi: 10.1086/591439.
- [117] J. L. Tinker, B. E. Robertson, A. V. Kravtsov, A. Klypin, M. S. Warren, G. Yepes, and S. Gottlöber. The Large-scale Bias of Dark Matter Halos: Numerical Calibration and Model Tests. *Astrophysical Journal*, 724:878–886, December 2010. doi: 10.1088/0004-637X/724/2/878.
- [118] M. Viel, M. G. Haehnelt, and V. Springel. The effect of neutrinos on the matter distribution as probed by the intergalactic medium. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 6:15–+, June 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/06/015.
- [119] A. Vikhlinin, A. V. Kravtsov, R. A. Burenin, H. Ebeling, W. R. Forman, A. Hornstrup, C. Jones, S. S. Murray, D. Nagai, H. Quintana, and A. Voevodkin. Chandra Cluster Cosmology Project III: Cosmological Parameter Constraints. *Astrophysical Journal*, 692:1060–1074, February 2009. doi: 10.1088/0004-637X/692/2/1060.
- [120] S. Wang, Z. Haiman, W. Hu, J. Khoury, and M. May. Weighing Neutrinos with Galaxy Cluster Surveys. *Physical Review Letters*, 95(1):011302, June 2005. doi: 10.1103/PhysRevLett.95.011302.
- [121] S. D. M. White, C. S. Frenk, and M. Davis. Clustering in a neutrino-dominated universe. *Astrophysical Journal Letters*, 274:L1–L5, November 1983. doi: 10.1086/184139.
- [122] H.-Y. Wu, E. Rozo, and R. H. Wechsler. Annealing a Follow-up Program: Improvement of the Dark Energy Figure of Merit for Optical Galaxy Cluster Surveys. *Astrophysical Journal*, 713:1207–1218, April 2010. doi: 10.1088/0004-637X/713/2/1207.

- [123] Y.-J. Xue and X.-P. Wu. The  $L_X$ - $T$ ,  $L_X$ - $\sigma$ , and  $\sigma$ - $T$  Relations for Groups and Clusters of Galaxies. *Astrophysical Journal*, 538: 65–71, July 2000. doi: 10.1086/309116.
- [124] F. Zwicky, E. Herzog, and P. Wild. *Catalogue of galaxies and of clusters of galaxies, Vol. 3*. 1966.

*The greatest inconvenience of people and nations is the laziness with which they attempt to find the solutions to their problems.*

*There's no challenge without a crisis. Without challenges, life becomes a routine, a slow agony.*

*There's no merit without crisis. It's in the crisis where we can show the very best in us. Without a crisis, any wind becomes a tender touch. To speak about a crisis is to promote it. Not to speak about it is to exalt conformism. Let us work hard instead.*

— Albert Einstein (1879-1955)

## RINGRAZIAMENTI

---

Per aver reso possibile questo lavoro di tesi vorrei ringraziare diverse persone. Prima di tutto il mio relatore Stefano Borgani, che nonostante i suoi numerosi impegni ed il poco tempo a disposizione è stato sempre disponibile per qualsiasi problema, e mi ha spinto a non mollare fino alla fine. Poi vorrei ringraziare il mio correlatore Matteo Viel, per l'aiuto dato sia nelle prime fasi di tirocinio, che dopo nella stesura della tesi con i suoi preziosi consigli. Inoltre un enorme grazie a Barbara Sartoris, per avermi permesso di utilizzare i suoi codici, ma soprattutto per aver avuto la pazienza di spiegarmene il funzionamento e di aiutarmi a risolvere gli n-errori che insorgevano ogni giorno.

Un grazie anche a tutti i ragazzi di Villa Bazzoni, per avermi reso vivibile il periodo di tesi, e per la mano data nel risolvere i problemi di ogni giorno (o per lo meno "di ogni giorno per un pseudo-fisico").

Dato che, grazie a Dio, la vita non è fatta solo di studio (anche se in queste ultime settimane corrispondeva a circa il 99.9% della mia giornata) voglio ringraziare tutte le persone che in modo o nell'altro in questi due anni a Triste mi hanno aiutato a tirar avanti, voglia con una (facciamo anche due o tre) bevuta e quattro chiacchiere, o voglia con un po' di "sano" sport (seguito ovviamente da bevuta e quattro chiacchiere). Potrei fare una lunga lista di nomi, ma tu lettore sai già che intendevo menzionare esattamente te.

Per arrivare fin qui, devo pur essere passato da qualche parte prima...per questo DEVO ringraziare TUTTI i freghi del Feudo, che nella speranza che i miei studi permettano un giorno di tornare indietro nel tempo, continuano a fomentarmi in questa impresa malsana e poco remunerativa. Anche se siete lontani e le rispettive strade ci portano



sempre più lontano, sappiate che siete la mia seconda famiglia ed il mio punto fisso.

In ordine cronologico, ma non di importanza, vorrei ringraziare la mia terza famiglia qui a Trieste, che nonostante l'ambiguità, e la versatilità dei ruoli (mamme al contempo nonne e sorelle, figli che diventano padri a seconda della serata, etc etc), sono stati fondamentali sia per la mia sopravvivenza (nel vero senso della parola), sia perché in questi anni quando rientravo a casa, mi sentivo veramente a casa.

Un grazie enorme ovviamente va alla mia famiglia, che mi ha sempre appoggiato e mi ha permesso di "sprecare" tutto questo tempo (e soldi!!) nello studio (se vi può consolare sappiate che gli anni di università sono stati stupendi) per seguire i miei sogni, ma soprattutto grazie mamma e papà per avermi fatto così bello ed intelligente.

Grazie, nonostante tutto quello che è successo e a prescindere da come andrà, a te che mi sei stata vicino in questi anni. Se è arrivato questo giorno lo devo anche a te.

Infine grazie a tutte le persone che meritavano di essere ringraziate ma che mi sono dimenticato. Sappiate a mia discolpa che la prosopagnosia è una brutta malattia.

21/11/11