

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

DIPARTIMENTO DI FISICA

Corso di Laurea in Fisica



**Lenti gravitazionali:  
vincoli al modello cosmologico dai  
dati di shear cosmico**

Laureanda:  
Nastja SLAVEC

Relatore:  
Silvio BONOMETTO

Correlatore:  
Stefano BORGANI

---

ANNO ACCADEMICO 2014/2015

*Forse il nostro universo si trova dentro al dente  
di qualche gigante.*

(Anton Pavlovič Čechov)

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 La cosmologia</b>	<b>7</b>
1.1 Lo spazio e il tempo del cosmo . . . . .	7
1.2 Le equazioni di Friedman . . . . .	10
1.3 Le componenti dell'universo . . . . .	11
1.4 L'universo non omogeneo: le fluttuazioni . . . . .	12
<b>2 Le lenti gravitazionali</b>	<b>16</b>
2.1 Introduzione . . . . .	16
2.2 La teoria del <i>lensing</i> gravitazionale . . . . .	18
2.2.1 L'approssimazione delle lenti sottili . . . . .	18
2.2.2 L'equazione delle lenti . . . . .	21
2.2.3 Ingrandimento e distorsione . . . . .	23
2.2.4 L'ellitticità . . . . .	26
<b>3 Lo <i>shear</i> cosmico</b>	<b>28</b>
3.1 La convergenza effettiva . . . . .	28
3.1.1 Lo spettro di potenza della convergenza . . . . .	30
3.2 La misura dello <i>shear</i> . . . . .	32
3.2.1 E/B-modes e la funzione di correlazione dello <i>shear</i> . . . . .	32
3.2.2 Errori della misura . . . . .	35
3.3 Determinazione dei parametri cosmologici . . . . .	39
3.4 Lo <i>shear</i> tomografico e 3D . . . . .	41
3.4.1 <i>Shear</i> tomografico: calcolo dell'efficienza delle lenti e dello spettro di potenza . . . . .	42
3.4.2 3D <i>shear</i> . . . . .	44
<b>4 Risultati recenti e sviluppi futuri</b>	<b>46</b>
4.1 Perché fare cosmologia con lo <i>shear</i> ? . . . . .	46
4.2 CFHTLenS . . . . .	47

4.2.1	Confronto con i dati di Planck . . . . .	51
4.3	Euclid . . . . .	54
	<b>Conclusioni</b>	<b>58</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>

# Introduzione

Negli ultimi decenni la cosmologia è passata dall'essere essenzialmente un'elaborazione teorica basata su scarsi elementi osservativi, a capitolo della fisica, intesa come scienza sperimentale. A ciò si è giunti sviluppando la capacità di dedurre le caratteristiche dell'insieme-universo dall'osservazione delle relazioni che intercorrono nell'ambito di particolari classi di sistemi. Le procedure della cosmologia sono quindi altamente impegnative, giacché si richiede una corretta modellizzazione delle variabili di origine astrofisica collegata a un'accurata analisi teorica. Parallelamente, è essenziale la capacità di tradurre in esperimenti avanzati il continuo progredire della tecnologia.

Negli ultimi anni, l'aumentata precisione con cui riusciamo a condurre le osservazioni e a descriverne i risultati ha portato alla costruzione di un "modello standard" cosmologico e, nel suo ambito, alla cosiddetta "cosmologia di precisione": i parametri di base, che caratterizzano il modello, non sono più noti solo per ordine di grandezza, ma cominciano a essere deducibili dai dati a livello di alcuni decimali.

Secondo il modello standard cosmologico, l'universo è emerso da un regime di gravità quantistica un po' meno di 14 miliardi d'anni fa. Da allora, il cosmo si espande in una maniera determinata dalla densità e dalla natura delle sue componenti, sulla base della relatività generale. Una prima fase, ancora molto problematica, detta inflazione, ha generato nel cosmo una vasta zona nella quale vigevano isotropia e (quasi)omogeneità. Il successo della cosmologia è stato quello di mostrare come, da queste condizioni "iniziali", abbia potuto svilupparsi la varietà delle strutture cosmiche che osserviamo. Tuttavia, per spiegare precisi sistemi di dati, è stato necessario introdurre nel modello cosmologico degli ingredienti specifici, la cui natura è (ancora) *oscura*.

In particolare, l'accelerazione dell'espansione nell'epoca attuale richiede l'esistenza di una componente a pressione negativa, denominata energia oscura, che rappresenta il 70% della sostanza oggi presente nel cosmo. Abbiamo poi raggiunto la certezza osservativa e sperimentale, che solo il  $\sim 4.4\%$  della densità complessi-

va del cosmo è attribuibile alla materia barionica che conosciamo, mentre il resto ( $\sim 25\%$ ) delle componenti dell'universo è costituito dalla cosiddetta materia oscura, che non emette radiazione elettromagnetica e sembra interagire solo gravitazionalmente. Ai due quesiti – cosa sono l'energia oscura e la materia oscura – si aggiunge inoltre il problema dell'origine delle fluttuazioni di densità iniziali che, da valori estremamente piccoli, sono cresciute per formare il quadro altamente articolato del cosmo osservato.

Il modello cosmologico attuale, denominato  $\Lambda$ CDM, è caratterizzato dall'assunzione che l'energia oscura abbia un parametro di stato  $w = -1$ ; il simbolo  $\Lambda$  con cui viene denotata ricorda la costante cosmologica, introdotta e poi sconfessata da Einstein. Si prevede poi che la materia oscura sia fredda (CDM: cold dark matter), cioè che le velocità delle sue particelle siano  $\ll c$ . Inoltre, viene assunta un'ipotesi sulla forma dello spettro di potenza delle fluttuazioni di densità primordiali.

La definizione dei parametri del modello standard cosmologico e/o il suo eventuale superamento possono essere approfonditi solo scrutando l'universo in maniera ancora più raffinata, cercando di rivalutare gli indizi di cui già disponiamo e di aggiungere nuovi tasselli al quadro d'insieme. Tra i metodi innovativi che permettano l'analisi di osservabili alternativi vi è lo studio del *lensing* gravitazionale. Mentre, in passato, il fenomeno delle lenti gravitazionali era stato considerato come strumento di prova della relatività generale, oggi è diventato uno strumento di indagine diretta. Una delle sue peculiarità è che, a differenza della maggioranza degli altri metodi, non discrimina tra la materia barionica e quella oscura, permettendo così, tra l'altro, di tracciare direttamente la distribuzione di quest'ultima. Un fenomeno di *lensing* particolarmente promettente è lo *shear* cosmico, la cui misura presenta diverse difficoltà, data la debolezza intrinseca del segnale. Si tratta infatti di correlare le piccole distorsioni nelle forme delle galassie lontane, prodotte dal transito della luce attraverso le diverse distribuzioni di massa che si collocano tra le sorgenti e noi osservatori.

Lo scopo di questa tesi è mostrare come lo *shear* cosmico possa essere usato ai fini di ottenere dei vincoli sui parametri del modello cosmologico; a questo fine ci proponiamo di illustrare le caratteristiche del fenomeno e discutere i principali aspetti relazionati con la sua misura.

Inizieremo con la presentazione del modello cosmologico e dei concetti di cosmologia fondamentali per lo studio dello *shear* nel capitolo 1.

Il fenomeno delle lenti gravitazionali verrà descritto nel capitolo 2, dove deriveremo le equazioni che lo governano.

Il capitolo 3 è il capitolo centrale di questo lavoro. In esso mostreremo come la

teoria del *lensing* viene formulata nel caso dello *shear* cosmico e illustreremo il processo di misura dello *shear* e la derivazione dei parametri cosmologici. Passeremo in rassegna le principali fonti di errore e presenteremo le tecniche di *shear* tomografico e 3D.

Nel capitolo 4 ci concentreremo sulle stime dei parametri cosmologici recentemente ottenute dalla misura dello *shear* cosmico dal gruppo di ricerca CFHTLenS e le confronteremo con quelle del progetto Planck. Infine, vedremo quali sono le aspettative per la futura missione Euclid.

# 1 La cosmologia

Il compendio di cosmologia presentato in questo capitolo è funzionale all'esposizione della questione focale della tesi: studiare come il fenomeno di *shear* cosmico permetta di ottenere vincoli sul modello cosmologico.

## 1.1 Lo spazio e il tempo del cosmo

Nel 1929 Edwin Hubble suggerì che i suoi dati recenti sulla velocità delle galassie potessero essere descritti dalla legge

$$v = H_0 d. \quad (1.1)$$

La *costante di Hubble*  $H_0$  è stata misurata, nel corso dei decenni, con tecniche diverse e il suo valore viene spesso espresso usando il parametro adimensionale

$$h = H_0/100 \text{ (km/s)/Mpc} \quad (1.2)$$

per il quale l'esperimento Planck (Planck Collaboration, 2015) dà il valore  $0.678 \pm 0.009$ , circa sette volte minore del valore determinato da Hubble. In realtà il campione di galassie osservato da Hubble era a distanze  $< 6 \text{ Mpc}^1$  e le velocità misurate erano essenzialmente velocità peculiari delle singole galassie. Il moto espansivo oggi osservato, al di sopra delle velocità peculiari, viene comunque denominato *flusso di Hubble*.

Il fatto che le galassie si allontanino in tutte le direzioni non significa che l'osservatore terrestre si trovi in una posizione privilegiata. Al contrario, ciò è in accordo con il *principio cosmologico*, una delle ipotesi chiave del modello cosmologico, secondo il quale l'universo tende a essere omogeneo e isotropo su scale opportunamente grandi.

---

<sup>1</sup>1 pc  $\approx$  3.262 a.l.  $\approx$   $3.086 \cdot 10^{16}$  m

L'isotropia locale dell'espansione può essere facilmente compresa se riduciamo il problema a due dimensioni. Pensiamo a un sistema di punti sulla superficie di un palloncino: se quest'ultimo viene gonfiato, i punti si allontanano e, ponendoci in un qualsiasi punto del palloncino, li vediamo allontanarsi isotropicamente. In analogia con la superficie sferica del palloncino, potremmo quindi pensare di trovarci su una ipersfera 3-dimensionale, con parametro di curvatura  $k > 0$ . In un ambiente 3-dimensionale, esistono peraltro le alternative  $k < 0$  (punti sellari) e  $k = 0$  (spazio piatto). Quest'ultimo valore è consistente coi dati più recenti (Planck Col., 2015), quindi non esiste alcuna discrepanza tra lo spazio osservabile e un modello piatto. Comunque, per definire la metrica dobbiamo tener conto anche di un altro ingrediente: la Relatività Generale di Einstein.

In Relatività spazio e tempo non sono separati, ma inglobati nell'espressione dell'intervallo spazio-temporale invariante. Mentre le leggi dinamiche restano comunque indipendenti dalla scelta del sistema di riferimento, l'isotropia dell'espansione sussiste solo in un assieme di sistemi di riferimento cinematicamente "privilegiati", nei quali l'espressione più generale per la metrica di *background* ha la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\lambda^2 \quad (1.3)$$

dove l'elemento di distanza comovente è

$$d\lambda^2 = d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.4)$$

Questa metrica, formulata tra gli anni 1922 e 1936, è conosciuta come *metrica di Friedmann - Robertson - Walker* (FRW). La variabile adimensionale  $a(t)$  è il *fattore di scala* che tiene conto della variazione delle distanze nel tempo a causa dell'espansione cosmica. Di solito viene normalizzato in modo che al tempo d'oggi,  $t_0$ , si abbia  $a(t_0) = 1$ . Nell'espressione (1.3),  $t$  è il tempo cosmico, misurato "a partire dal Big Bang", ed è propriamente il tempo misurato da un osservatore che si muova con il flusso di Hubble e al quale l'universo appaia isotropo. Tale osservatore è detto *comovente*. La variabile  $\chi$  indica la distanza comovente. Il valore della *distanza di diametro angolare comovente*  $f_k$

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}\chi) & k > 0 \\ \chi & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\chi) & k < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

dipende invece dal parametro di curvatura e il fattore  $1/\sqrt{|k|}$  può essere interpretato come il raggio di curvatura della parte spaziale della metrica. Se l'universo è piatto, nell'espressione (1.4) riconosciamo le coordinate polari ordinarie.

In un universo in cui vige la metrica FRW il significato di distanza non è univocamente definito. Le distanze non possono essere determinate in un singolo istante temporale, ma vanno misurate lungo il cono di luce. Ai fini dello studio delle lenti gravitazionali, risulta utile definire la *distanza di diametro angolare*. Questa è uguale al rapporto tra il diametro fisico di una sorgente (che si colloca a una distanza fissata da  $a(t)$ ) e il diametro angolare sulla volta celeste misurato dall'osservatore terrestre. Può essere espressa anche come il prodotto del fattore di scala per la distanza di diametro angolare comovente:

$$D_{ang} = a(t)f_k(\chi) \quad (1.6)$$

A causa dell'espansione del cosmo, un raggio di luce attraversando lo spazio sperimenta uno spostamento verso il rosso ovvero verso lunghezze d'onda  $\lambda$  maggiori rispetto a quelle di emissione perchè la distanza tra una cresta d'onda e l'altra cresce. Il *redshift* (spostamento spettrale verso il rosso)  $z$  di una sorgente, definito come

$$z = (\lambda_{osservata} - \lambda_{emessa})/\lambda_{emessa} , \quad (1.7)$$

può essere usato per determinare la sua distanza e il tempo a cui la luce è stata emessa. Nella pratica astronomica, va tenuto conto dei contributi a  $z$  dovuti alle velocità peculiari degli oggetti osservati. Essi sono però sempre dello stesso ordine, indipendentemente dalla distanza dell'oggetto, e quindi la misura dell'età cosmica  $t$  a cui avviene l'emissione è tanto migliore, quanto maggiore è  $z$ . Comunque, maggiore è  $z$ , minore è il  $t$  corrispondente.

Anche il fattore di scala può essere usato come indicatore del tempo cosmico e il suo valore diminuisce con  $t$ . Inoltre, tra il fattore di scala e il redshift si ha la seguente relazione:

$$a = \frac{a_0}{1+z} \quad (1.8)$$

in cui spesso si assume  $a_0 = a(t_0) = 1$ . Le dimostrazioni di questa e di altre relazioni in questo capitolo si possono trovare in vari testi; si veda, per esempio, Bonometto, 2008 e Schneider 2006a.

Infine, notiamo che il pendice 0 del parametro di Hubble  $H_0$  (eq. 1.2) indica che ci riferiamo al suo valore nell'epoca presente. Infatti, in funzione del fattore di scala questo parametro si esprime come:

$$H(t) = \frac{da(t)}{dt} \frac{1}{a(t)} . \quad (1.9)$$

In un ambiente omogeneo e isotropo, la distanza comovente della galassia è  $\chi$ , così che la sua distanza fisica e la sua velocità di allontanamento sono  $a\chi$  e  $\dot{a}\chi$ . Quindi, secondo l'eq.(1.9), il parametro di Hubble è uguale al rapporto tra la velocità di recessione e la distanza del oggetto osservato.

## 1.2 Le equazioni di Friedman

Nel 1998 due diversi gruppi di ricerca, studiando le curve di luce delle Supernovae di tipo Ia giunsero alla conclusione che, al contrario di ciò che si credeva, l'universo si sta espandendo in maniera accelerata.

La velocità e l'accelerazione dell'espansione si ricavano dalle equazioni della gravitazione di Einstein che, per una metrica FRW divengono le *equazioni di Friedmann* (Friedmann, 1922). Nel termine di sorgente compaiono la pressione  $p(t)$  e la densità di energia  $\rho(t)$ , ottenute sommando i contributi delle diverse componenti del cosmo. Le due equazioni sono

$$H^2(a) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(a) - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.10)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho(a) + \frac{3p(a)}{c^2}\right) \quad (1.11)$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale. L'eq. (1.10) è formalmente analoga a un'equazione di conservazione dell'energia per una particella di prova di massa  $\mu$  sita sul bordo di una sfera omogenea di raggio  $a$ . In effetti, moltiplicando il secondo e il terzo termine dell'eq. (1.10) per  $\mu a^2/2$  si ricava

$$\mu \dot{a}^2/2 - GV\rho \mu/a = -kc^2\mu/2 \quad \text{dove} \quad V = (4\pi/3)a^3 \quad (1.12)$$

è il volume della sfera. Secondo questa analogia, il termine  $-kc^2\mu/2$  sarebbe l'energia meccanica totale.

Analogamente, l'eq. (1.11), diverrebbe

$$\mu \ddot{a} = -G \mu V(\rho + 3p/c^2), \quad (1.13)$$

assumendo l'aspetto  $F = \mu \ddot{a}$  (si ricordi che  $a$  rappresenta una distanza) con  $F$  forza gravitazionale, non fosse per il termine di pressione aggiunto alla sorgente di massa. Il punto è che, al contrario del nostro calcolo, la seconda equazione di Friedmann deriva dalla Relatività Generale: nelle leggi del moto relativistiche si ha anche un contributo dovuto alla pressione alla sorgente di gravità.

Si può comunque verificare che l'assieme delle eq. (1.10) e (1.11) implica la relazione differenziale

$$d[\rho(a)c^2a^3] = -p(a)d[a^3], \quad (1.14)$$

che (moltiplicata per  $4\pi/3$ ) ha un'apparenza analoga al primo principio della termodinamica  $dU = -pdV$  in assenza di scambio di calore. Se si conosce l'espressione di  $p$  in funzione di  $\rho$ , questa equazione può fornire l'andamento della densità

al variare del fattore di scala, indipendentemente dall'andamento della variabile temporale.

Dalle equazioni di Friedmann si ricava anche il legame tra il parametro di curvatura dell'universo e la sua densità totale. Ponendo  $k = 0$  nella prima equazione si definisce il valore della *densità critica* e il *parametro di densità*:

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} ; \quad \Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} . \quad (1.15)$$

Se l'universo è spazialmente piatto, così che nell'eq. (1.10) il secondo addendo dell'ultimo membro si annulla, si deve avere  $\Omega = 1$ .

### 1.3 Le componenti dell'universo

Tra le sorgenti delle equazioni di Friedmann, considereremo qui la materia (barionica e oscura), la radiazione e l'energia oscura.

Si considera **materia** o "polvere cosmica" (*cosmological dust*) qualsiasi componente di cui sia trascurabile la pressione. Oltre alla materia barionica ordinaria, occorre considerare anche la *materia oscura* (DM -*dark matter*) nel caso in cui essa sia *fredda* (*cold - CDM*) ovvero non relativistica. Varie ragioni osservative ne richiedono l'esistenza; la più clamorosa è il cosiddetto *bullet cluster*. Si stima che i parametri di densità della materia barionica e di quella oscura siano, rispettivamente,  $\Omega_b \sim 0.044$  e  $\Omega_{CDM} \sim 0.26$ , perciò in totale si ha  $\Omega_m \sim 0.3$ .

Ponendo  $p = 0$  nell'eq. (1.14) si ricava  $\rho_m(a) \propto a^{-3}$ . La densità di energia è proporzionale all'inverso del volume e dipende solo dalla massa contenuta in esso. Ciò significa che, man mano che l'universo si espande, le componenti materiali in esso contenute sono sempre più diluite.

**La radiazione** è costituita dalle particelle relativistiche, quali fotoni o neutrini (se di massa nulla o trascurabile). La sua pressione  $p_r(a) = (1/3)\rho_r(a)c^2$ , sostituita nell'eq. (1.14) ci dà  $\rho_r(a) \propto a^{-4}$ : oltre all'effetto di volume, si vede l'effetto della perdita di energia dovuta al redshift. Nel cosmo primordiale le componenti radiative predominavano sulle altre; ma, attorno a un redshift  $z \sim 10^4$ , grazie alla più blanda dipendenza dall'inverso di  $a$ , le componenti materiali hanno finito per prevalere. Nell'epoca presente le componenti radiative danno  $\Omega_r \sim 2.5 \times 10^{-5}h^{-2}$  e sono quindi trascurabili rispetto alle altri componenti, per quanto concerne gli effetti dinamici.

L'introduzione dell'**energia oscura** (DE: *dark energy*) fu resa necessaria dalla scoperta dell'espansione accelerata dell'universo, che richiede complessivamente

$p \ll -\rho c^2/3$  (vedi eq. 1.11). In alternativa, si dovrebbe assumere che le equazioni della Relatività Generale cessino di valere al di sopra di una determinata scala. Le osservazioni sul CMB confermano che il parametro di densità complessivo  $\Omega_0 \simeq 1$  e, quindi, il parametro di scala dell'energia oscura  $\Omega_{DE} \sim 0.7$ . La pressione dell'energia oscura è negativa e pari a  $p_\Lambda = w\rho_\Lambda c^2$ .

Se il parametro di stato della DE è  $w \equiv -1$ , l'energia oscura viene indicata con il simbolo  $\Lambda$ . In questo caso, l'eq. (1.14) ci dice che la sua densità è costante e la prima equazione di Friedmann assume l'aspetto

$$H^2(a) = H_0^2 \left[ \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - \frac{kc^2}{a^2 H_0^2} + \Omega_{DE} \right]. \quad (1.16)$$

che ci mostra come il suo contributo dinamico divenga rapidamente trascurabile quando  $a \ll 1$ . L'espressione (1.16) si ottiene dall'eq. (1.10) esprimendo la densità di energia totale  $\rho = \rho_{r,0}a^{-4} + \rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{DE,0}$  in termini della densità critica e del fattore di densità (eq. 1.15). Il fatto che la DE divenga significativa solo nella presente epoca cosmica, dopo essere stata silente in tutta l'espansione seguita al *Big Bang*, è uno dei paradossi o *fine tunings* del modello standard della cosmologia.

Nel tentativo di attenuare questo paradosso, anche se nessuna evidenza sperimentale la renda necessaria, si è pensato a una variazione di  $w$  con  $a$ . Ciò richiede una parametrizzazione, la cui forma più semplice consiste nello sviluppo di Taylor

$$w(a) = w_0 + (1 - a)w_a \quad (1.17)$$

attorno a  $a_0 = a(t_0) = 1$ .

L'eq. (1.16) è rilevante nello studio dell'evoluzione futura dell'espansione cosmica, che tenderà a essere regolata dalla legge

$$\dot{a}/a = H_0 \sqrt{\Omega_{DE}} \quad (1.18)$$

in cui il secondo membro è costante. Indipendentemente dal valore della curvatura  $k$ , perciò, l'espansione tende a divenire esponenziale, proseguendo per sempre.

## 1.4 L'universo non omogeneo: le fluttuazioni

Su scale via via decrescenti, il cosmo non è certamente omogeneo e isotropo. La distribuzione delle galassie nel cielo, per esempio, è fortemente anisotropa. Detta

$\rho(\mathbf{x}, t)$  la densità in un punto di coordinate spaziali (comoventi)  $\mathbf{x}$  e al tempo  $t$ , si definisce la *fluttuazione di densità*

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}, \quad (1.19)$$

con  $\bar{\rho}(t)$  densità media al tempo  $t$  data dal modello FRW. Essa si collega al potenziale gravitazionale tramite l'equazione di Poisson:

$$\nabla_x^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{3H_0^2 \Omega_m}{2a} \delta(\mathbf{x}, t), \quad (1.20)$$

dove  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  è il potenziale gravitazionale (comovente) e il simbolo  $\nabla_x$  indica il gradiente rispetto alla coordinate comoventi.

È importante notare che, in un contesto cosmologico, tutte le quantità dipendenti dal sito vanno intese come “smussate” in un intorno del sito stesso: non ha senso che  $\rho(\mathbf{x})$  riporti gli andamenti della densità su scala stellare o, addirittura, subatomica. Formalmente, possiamo immaginare di considerare sempre la *densità smussata su scala  $R$*

$$\rho_R(\mathbf{x}) = V_{\mathbf{x},R}^{-1} \int_{V_{\mathbf{x},R}} d^3y \rho(\mathbf{y}) \quad (1.21)$$

mediata su un volume sferico  $V_{\mathbf{x},R}$  di raggio  $R$  opportuno e centrato in  $\mathbf{x}$ . L'espressione (1.21) assume la legge più comune di smussamento, detta a *top-hat* (cappello piatto), ma in letteratura vengono introdotte anche funzioni di smussamento più complesse.

Uno dei principali successi della cosmologia sta nell'aver dimostrato che tutto il quadro osservativo del cosmo è ricavabile assumendo che, quando l'orizzonte<sup>2</sup> raggiunge una determinata scala  $x = 2\pi/k$ , la fluttuazione quadratica media rispetto a una totale omogeneità è  $\ll 1$  e approssimativamente indipendente dalla scala stessa.

Ciò si esprime considerando lo spettro di potenza delle fluttuazioni, definito tramite la relazione

$$\left\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}', t) \right\rangle = (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_\delta(k, t). \quad (1.22)$$

In questo caso  $\delta_D^{(3)}$  indica la distribuzione di Dirac tridimensionale, mentre  $\tilde{\delta}(k)$  è la trasformata di Fourier di  $\delta(x)$ :

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) = \int d^3x \delta(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}. \quad (1.23)$$

---

<sup>2</sup>L'orizzonte delle particelle si riferisce alla massima distanza che la luce ha percorso dal Big Bang fino ad un tempo  $t$ ; il suo valore dipende dal modello cosmologico, in particolare dall'andamento del fattore di scala con il tempo. Gli oggetti che si trovano entro l'orizzonte sono in contatto causale (possono “comunicare” e influire uno sull'altro per mezzo di segnali luminosi o meccanici).

Nell'espressione (1.22) per lo spettro di potenza si ha la dipendenza dal solo modulo di  $\tilde{\delta}(k, t)$  che è, in generale, una quantità complessa:  $P_\delta(k, t)$  non dipende dalla distribuzione delle fasi di  $\delta(k, t)$ .

Se assumiamo che, a un dato istante  $t_i$  (in un remoto passato) lo spettro abbia la forma  $P_\delta(k, t_i) = A k^{n_s}$ , l'indipendenza della scala della fluttuazione all'orizzonte corrisponde ad avere un *indice spettrale*  $n_s = 1$  (in questo caso si parla di spettro di Harrison–Zeldovich). L'ampiezza  $A$  fissa la normalizzazione dello spettro. Il valore osservativo dell'indice spettrale è  $n_s \simeq 0.96$ ; ciò è coerente con una vasta gamma di modelli inflazionari, che forniscono una cornice per la nascita delle stesse fluttuazioni. Una proprietà generica della distribuzione primordiale delle fluttuazioni, generate nel periodo inflazionario, è quella di avere una funzione di densità di probabilità gaussiana. Mentre la gaussianità è preservata nel corso dell'evoluzione lineare, l'entrata nell'evoluzione non-lineare porta a un suo rapido degrado. Una particolarità delle distribuzioni di fluttuazione gaussiane è di essere completamente caratterizzate dal loro spettro di potenza.

L'evoluzione lineare delle fluttuazioni, dopo l'entrata nell'orizzonte, è un problema complesso, che qui non tratteremo. I risultati di questa trattazione si possono riassumere in una *transfer function* (funzione di trasferimento)  $\mathcal{T}$  che ci dà l'andamento dello spettro a un tempo  $t$ , a cui le fluttuazioni sono ancora lineari sulle scale rilevanti, in funzione dello spettro  $P_\delta(k, t_i)$  a un tempo iniziale, quando tutte le stesse scale erano ancora fuori dell'orizzonte. Più precisamente si scrive

$$P_\delta(k, t) = [\mathcal{T}_{t_i, t}(k)]^2 P_\delta(k, t_i) \quad (1.24)$$

e lo spettro trasmesso  $P_\delta(k, t)$  assume una forma assai diversa da quello primordiale  $P_\delta(k, t_i)$ .

Nello spazio delle configurazioni, l'analogo dello spettro delle fluttuazioni è la *funzione di correlazione a due punti*  $\xi(r)$

$$\xi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') \rangle . \quad (1.25)$$

che dipende dal solo modulo di distanza  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  tra i due punti considerati (a causa dell'isotropia richiesta dal principio cosmologico). Nella relazione (1.25) si potrebbe mettere in evidenza il *raggio di smussamento*  $R$  introdotto in eq. (1.21), ottenendo

$$\xi_R(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \langle \delta_R(\mathbf{x}) \delta_R(\mathbf{x}') \rangle . \quad (1.26)$$

Questa espressione è particolarmente significativa al limite  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow 0$  e porta alla definizione della quantità

$$\sigma_R^2 = \langle |\delta_R(\mathbf{x})|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 P_\delta(k) W^2(kR) \quad (1.27)$$

detta *fluttuazione quadratica media* o *varianza di massa* sulla scala  $R$ . In questa relazione,  $W(kR)$  indica la trasformata di Fourier della funzione di smussamento.

Le definizioni e le proprietà viste finora valgono sia in regime lineare, che nella successiva evoluzione non-lineare che si ha quando  $\sigma_R$  si avvicina all'unità. L'avvento della non-linearità dipende così dalla scala  $R$ . In questo senso è di particolare rilievo la scala  $R = 8 h^{-1} \text{Mpc}$ . Su questa scala la fluttuazione quadratica media del numero delle galassie, nell'epoca attuale, è prossima all'unità. Quindi, la scala  $R = 8 h^{-1} \text{Mpc}$  segnerebbe la definitiva transizione da regime lineare a regime non-lineare nell'epoca attuale. In realtà, però, la distribuzione delle galassie non traccia esattamente la distribuzione della massa essendo *biased* (fuorviata) di un fattore  $b$  detto, appunto, *bias*. Questo fattore è definito in modo che risulti

$$\sigma_8 \equiv \sigma_{R=8h^{-1}\text{Mpc}} = b^{-1} \quad (1.28)$$

essendo  $\sigma_R$  qui ricavato dalla distribuzione effettiva di materia, non da quella osservata nelle galassie. Sulla base di dati recenti risulta  $\sigma_8 \simeq 0.8$ . Una stima accurata di  $\sigma_8$  è necessaria per fissare l'ampiezza dello spettro di potenza delle fluttuazioni. Infatti, il fattore  $b$  può essere collegato al coefficiente  $A$  dello spettro primordiale tramite l'espressione

$$b^{-2} \simeq \frac{A}{2\pi^2} \int dk k^{2+n_s} \mathcal{T}^2(k) W^2(kR_8), \quad (1.29)$$

dove  $R_8 = 8 h^{-1} \text{Mpc}$ . In questa relazione, la presenza del simbolo “ $\simeq$ ” invece di “ $=$ ”, indica che essa deve essere ancora raffinata, per tener conto dell'incombente passaggio al regime non-lineare.

# 2 Le lenti gravitazionali

## 2.1 Introduzione

Il fenomeno del *lensing* gravitazionale è descritto dalla teoria della Relatività Generale, secondo la quale gli oggetti massivi causano una perturbazione locale della curvatura dello spaziotempo. Anche se questa scoperta risale al secolo scorso, la possibilità che la gravità potesse far deflettere anche i raggi di luce fu studiata già nei secoli passati, tra l'altro anche da Newton e Laplace. Nel 1804 il tedesco Johann von Soldner calcolò la deviazione che subirebbe un raggio di luce emesso da una stella, passando vicino al Sole. Nella sua derivazione usò la gravitazione newtoniana assumendo che la luce fosse formata da corpuscoli.

Nel 1911 Albert Einstein calcolò l'angolo di deflessione di un raggio di luce applicando il principio d'equivalenza e riderivò la formula di Soldner. Quattro anni più tardi lo ricavò usando le equazioni di campo della relatività, ottenendo un risultato diverso. L'angolo di deflessione predetto dalla teoria della relatività generale è il doppio da quello calcolato usando la gravità newtoniana. Il fattore due è dovuto alla curvatura della metrica a causa della distribuzione di massa.

Nel 1919, durante un'eclissi solare, Arthur Eddington osservò che la posizione delle stelle vicine al Sole sembrava cambiata rispetto a quanto misurato in altri periodi dell'anno: la luce che passava vicino al disco solare era stata deviata. L'angolo di deflessione concordava con quello predetto da Einstein,  $1.7''$ . L'esperimento di Eddington è considerato la prima conferma sperimentale della teoria della relatività generale.<sup>1</sup>

Il primo a discutere la possibilità di osservare fenomeni di *lensing* prodotti da “nebulose extragalattiche” (le galassie) fu Fritz Zwicky nel 1937. Le sue previsioni si avverarono nel 1979 con la scoperta di due quasar vicini, con lo stesso colore, redshift e spettro. Poco dopo si osservò che tra loro era situata una galassia attuante

---

<sup>1</sup>La bontà della misura di Eddington è stata messa in discussione negli ultimi anni. L'analisi dei dati potrebbe non essere stata abbastanza accurata e obiettiva. (Kennefick, 2009)

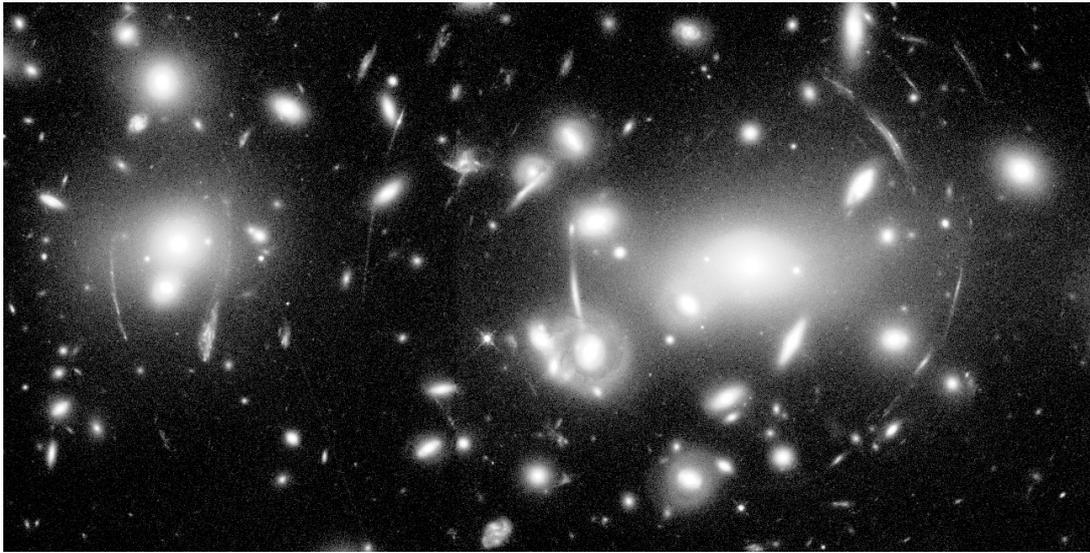


Figura 2.1: L'ammasso di Abell 2218 agisce come lente per le galassie di *background* producendo diversi archi; è un esempio caratteristico di *strong lensing*. (Fonte: <http://www.spacetelescope.org/images/opo9514a/>)

da lente: i due quasar erano immagini di un unico oggetto! Da allora, lo sviluppo della strumentazione ha permesso di osservare altri fenomeni suggestivi, ma anche di poter apprezzare piccole variazioni nelle immagini nelle aree più remote del cielo. In base all'entità degli effetti prodotti e al tipo di oggetto che funge da lente si distinguono tre tipi di *lensing*.

Il **microlensing** si riferisce al fenomeno per cui una stella della nostra galassia può fungere come lente per altre stelle o sorgenti extragalattiche. La probabilità di osservare questo fenomeno è estremamente piccola. Tuttavia, a causa del moto della sorgente e della lente, la sua intensità varia nel tempo, quindi è possibile rivelarlo studiando le variazioni temporali delle curve di luce. Negli anni 90', diversi progetti di monitoraggio (p.e. il progetto EROS, vedi Moniez, 2009) furono avviati con lo scopo di usare il *microlensing* per verificare se nell'alone della galassia fossero presenti dei corpi massivi compatti non emittenti luce (p. e. nane marroni, stelle di neutroni), i cosiddetti Macho (*Massive Compact Halo Object*). Anche se oggi sappiamo che la "massa mancante" della nostra galassia è in maggioranza data dall'energia oscura, il *microlensing* rimane un importante strumento astrofisico.

Il **strong lensing** si verifica solo in particolari configurazioni del sistema sorgente-lente. Questo fenomeno è raro, ma produce anche gli effetti più grandi: le immagini multiple, gli archi e gli anelli di Einstein (l'immagine della sorgente viene distorta in

maniera tale da formare degli archi o un anello intorno alla lente). Normalmente la lente è rappresentata da un ammasso di galassie, mentre la sorgente è una galassia di fondo allineata con esso.

Nel caso di **weak lensing** gli effetti prodotti sono molto più deboli, tanto da non poter essere direttamente misurati. Per questo, l'approccio a questo fenomeno è diverso: piuttosto che concentrarsi su un singolo sistema di lente gravitazionale, si osserva una determinata area di cielo. Le galassie vicine sono distorte dalla stessa lente e l'intensità dell'effetto è simile, per cui è possibile rivelarlo mediando sul campione. Il fenomeno fu osservato per la prima volta in due ammassi di galassie nel 1990. Dieci anni più tardi quattro gruppi di ricerca osservarono un *lensing* ancora più debole, prodotto dalla struttura a grande scala dell'universo (LSS - *Large scale structure*). L'effetto generato da questo tipo di "lenti estese" viene denominato *shear* cosmico. La parola *shear* che in inglese significa "tosatura" o, come verbo, "tosare" suggerisce l'idea di una forma (delle immagini) regolata dalla stessa distribuzione di massa del cosmo.

## 2.2 La teoria del *lensing* gravitazionale

La propagazione della luce in uno spaziotempo curvo rappresenta normalmente un problema teorico complicato. Secondo la teoria della Relatività Generale, i corpi massivi curvano lo spaziotempo, modificando la metrica FRW. La luce si muove lungo il cammino più breve possibile di questo spaziotempo, detto *geodetica*. Pertanto, nelle vicinanze di un corpo celeste, un raggio di luce segue un cammino che, a un osservatore remoto, appare curvato verso il corpo stesso. Gli oggetti astrofisici possono perciò focalizzare la luce di una sorgente più distante, attuando come delle "lenti - da ciò il nome del fenomeno.

### 2.2.1 L'approssimazione delle lenti sottili

Consideriamo un sistema di lenti gravitazionali composto da una sorgente luminosa, una struttura massiva che fa da "lente e un osservatore posto sulla terra. Con riferimento alla figura 2.2, indichiamo con  $D_s$  la distanza tra la sorgente e l'osservatore,  $D_d$  quella tra la lente e l'osservatore e  $D_{ds}$  quella tra la sorgente e la lente. Le distanze  $D_{ds}$  e  $D_d$  sono, nella maggioranza dei casi fisici rilevanti (p.e. *lensing* da galassie o amassi di galassie), molto maggiori dell'estensione lungo la linea di vista della lente stessa. Quindi, in analogia con l'approssimazione delle lenti sottili in ottica, possiamo assumere che il cammino  $D_s$  sia "diritto", con un'unica deflessione nel piano perpendicolare alla linea di vista contenente la lente (*piano della*

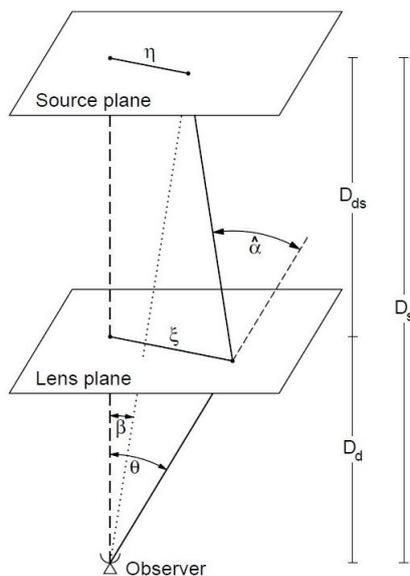


Figura 2.2: Sistema di lente gravitazionale. (Fonte: Schneider, 2006a)

*lente*). Qui consideriamo uno spaziotempo localmente piatto che è perturbato dal potenziale gravitazionale (di forma analoga a quello newtoniano) della distribuzione di massa della lente. L'approssimazione è valida a due condizioni: il potenziale gravitazionale  $\Phi$  deve essere piccolo ( $\Phi \ll c^2$ ) e la velocità peculiare della lente deve essere  $v \ll c$ . Con queste assunzioni il calcolo dell'angolo di deflessione si riduce da un problema di relatività generale a un problema geometrico.<sup>2</sup>

L'effetto della curvatura dello spaziotempo sulla traiettoria della luce può essere espresso usando un indice di rifrazione effettivo  $n$  (Schneider et al., 1992):

$$n = 1 - \frac{2}{c^2}\Phi = 1 + \frac{2}{c^2}|\Phi| \quad (2.1)$$

Per ottenere l'espressione a destra si tiene conto del segno negativo del potenziale gravitazionale. Come nella geometria ottica, anche in questo caso un indice di rifrazione  $n > 1$  implica che la luce si propaga più lentamente che nel vuoto. La velocità effettiva di un raggio di luce in un campo gravitazionale è infatti:

$$v = \frac{c}{n} \simeq c - \frac{2}{c}|\Phi|. \quad (2.2)$$

In presenza di una lente gravitazionale il raggio di luce subisce un ritardo rispetto a un raggio che si propaga nel vuoto. Possiamo distinguere due contributi responsabili del ritardo. Il primo, conosciuto come "effetto Shapiro" (Shapiro, 1964), è

<sup>2</sup>L'approssimazione delle lenti sottili non è valida nel caso di *shear cosmico*, quando il è *lensing* dovuto alla struttura a grande scala dell'universo. Di questo tratteremo in seguito.

causato dallo stesso campo gravitazionale della lente (perturbazione dello spazio-tempo). Il secondo è di origine geometrica: a causa della deflessione, il raggio deve percorrere un cammino più lungo.

L'*angolo di deflessione* è definito come la differenza tra le direzioni del raggio di luce non perturbato “incidente” sulla lente e quello deflesso. Si ottiene integrando lungo la distanza comovente  $\chi$  il gradiente di  $n$  calcolato nelle due direzioni perpendicolari al cammino ottico:

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = - \int_0^{\chi_{hor}} \vec{\nabla}_{\perp} n d\chi = \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_{hor}} \vec{\nabla}_{\perp} \Phi(\boldsymbol{\xi}, \chi) d\chi. \quad (2.3)$$

L'angolo  $\hat{\alpha}$  - così come gli altri angoli che definiremo in seguito - è un vettore bidimensionale, dato che gli viene assegnato anche una direzione perpendicolare alla linea di vista. Pure  $\boldsymbol{\xi}$  è bidimensionale: è il vettore comovente contenuto nel piano della lente, come indicato nella figura 2.2. L'equazione (2.3) ci dice che l'angolo di deflessione in un certo punto  $\boldsymbol{\xi}$  è dato dalla variazione del potenziale gravitazionale lungo la direzione perpendicolare, integrata lungo la linea di vista.

Consideriamo ora il caso semplice in cui abbiamo una massa puntuale  $M$  posta nel punto  $\boldsymbol{\xi}_M = 0$ . L'angolo di deflessione sarà allora (vedi Narayan e Bartelmann, 1997)

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4GM}{c^2} \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}, \quad (2.4)$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale e  $\boldsymbol{\xi}$  è il “punto d'impatto” del raggio luminoso sul piano della lente. Questo risultato ci permette di calcolare l'angolo per una distribuzione di massa arbitraria: assumiamo che la lente sia composta da un insieme di masse puntuali  $m_i$  site nei punti  $\boldsymbol{\xi}_i$ , in modo da poter effettuare una somma:

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \sum_i m_i \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_i}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_i|^2} \approx \frac{4G}{c^2} \int d^2\xi' \int_0^{\chi_{hor}} \rho(\boldsymbol{\xi}', \chi) \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} d\chi. \quad (2.5)$$

Con  $\rho(\boldsymbol{\xi}', \chi)$  indichiamo la densità di massa della lente nel punto di coordinate  $(\boldsymbol{\xi}', \chi)$ . Il passaggio dalla somma all'integrale può essere fatto a patto che la differenza tra il raggio deflesso e quello non deflesso (incidente) in prossimità della lente sia piccola; ciò è assicurato dall'approssimazione delle lenti sottili. In linea con quest'approssimazione, possiamo proiettare la massa della lente sul piano delle lenti e definire una *densità di massa superficiale*,

$$\Sigma(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{\chi_{hor}} \rho(\boldsymbol{\xi}', \chi) d\chi, \quad (2.6)$$

che ci permette di riscrivere l'angolo di deflessione come

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \Sigma(\boldsymbol{\xi}') \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} d^2\xi'. \quad (2.7)$$

### 2.2.2 L'equazione delle lenti

Un osservatore terrestre non può misurare l'angolo di deflessione  $\hat{\alpha}$  e non conosce a priori la posizione della sorgente luminosa  $\boldsymbol{\beta}$ . Ciò che osserva è unicamente l'immagine della sorgente posta ad un angolo  $\boldsymbol{\theta}$ . Per ottenere una relazione che legghi questi angoli dobbiamo studiare la geometria del sistema. La relazione  $D_s = D_d + D_{ds}$  è approssimativamente valida nell'universo locale, ma generalmente non è valida in un universo in espansione. Tuttavia,  $D_s$ ,  $D_d$  e  $D_{ds}$  sono di solito distanze di diametro angolare, per le quali vale l'approssimazione dei piccoli angoli ( $\sin x \approx \tan x \approx x$ ). Quindi è lecito scrivere la seguente relazione, che si deduce dalla figura 2.2, per la posizione  $\boldsymbol{\eta}$  della fonte luminosa nel piano perpendicolare alla linea di vista:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta}D_s = \boldsymbol{\theta}D_s - \hat{\alpha}D_{ds}. \quad (2.8)$$

Da ciò si ottiene l'equazione delle lenti

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha} \quad (2.9)$$

che permette di ricavare l'angolo in cui si trova la fonte luminosa a partire dall'angolo in cui si osserva la sua immagine e dall'*angolo di deflessione ridotto*,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha}. \quad (2.10)$$

Notiamo che si ha la dipendenza  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta})$ . Infatti, possiamo usare la relazione  $\boldsymbol{\xi} = D_d\boldsymbol{\theta}$  per esprimere la variazione di  $\hat{\alpha}$  con  $\boldsymbol{\xi}$  (per un dato sistema di lente gravitazionale, le distanze sono fisse).

Consideriamo come esempio il caso di una lente circolare con densità superficiale di massa costante. Dalle equazioni (2.4) e (2.10) si ha che l'angolo di deflessione ridotto è pari a:

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_{ds}}{D_s} \frac{4G}{c^2 |\boldsymbol{\xi}|^2} (\Sigma\pi|\boldsymbol{\xi}|^2) \boldsymbol{\xi} = \frac{4\pi G\Sigma}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \boldsymbol{\theta} \quad (2.11)$$

La quantità  $\Sigma\pi|\boldsymbol{\xi}|^2$  è la massa della lente. Notiamo che in questo caso l'equazione delle lenti sarà lineare, cioè  $\boldsymbol{\beta} \propto \boldsymbol{\theta}$ :

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} \left( 1 - \frac{4\pi G\Sigma}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \right) \quad (2.12)$$

Appare opportuno definire una densità superficiale di massa critica,  $\Sigma_{cr}$ , per la quale l'equazione delle lenti si riduce a  $\beta = 0$  ovvero si ha che  $\alpha = \theta$ :

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} = 0.35 \text{ g cm}^{-1} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} 1 \text{ Gpc} \quad (2.13)$$

Una lente gravitazionale con densità superficiale di massa costante pari a  $\Sigma_{cr}$  ha  $\beta = 0$  e  $\alpha(\theta) = \theta$ , qualunque sia il valore di  $\theta$ . La fonte luminosa è posta esattamente dietro la lente e abbiamo un'unica retta congiungente l'osservatore, il centro del piano della lente e quello della fonte. In questa configurazione si ha un foceggiamento perfetto e la lunghezza focale è ben definita. Tipicamente però una lente gravitazionale non possiede tali caratteristiche: i raggi luminosi che attraversano il piano della lente a differenti distanze dal centro della lente intersecano l'asse ottico in punti differenti posti dietro la lente. Una lente gravitazionale tipica è quindi aberrata.

Una lente supercritica, cioè con  $\Sigma > \Sigma_{cr}$ , può produrre anelli di Einstein. Supponendo che abbia simmetria circolare e che la sorgente sia posta esattamente sull'asse ottico ( $\beta = 0$ ), dall'equazione delle lenti si ricava il raggio dell'anello:

$$\theta_E = \left( \frac{4GM(\theta_E)}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Il *raggio di Einstein* non è una proprietà intrinseca della lente, poiché dipende dalle distanze del problema. In diversi modelli rappresenta una scala angolare naturale (a proposito si veda Narayan e Bartelmann, 1997). Tra l'altro, segna anche il confine tra le posizioni della fonte luminosa che determinano un'immagine singola e quelle che determinano immagini multiple (equazione delle lenti con più soluzioni per  $\alpha$  a  $\beta$  fissato), ovvero tra fenomeni di *weak* e *strong lensing*.

L'angolo di deflessione ridotto  $\alpha$  può essere espresso usando la densità superficiale di massa. Infatti, ricordando le equazioni (2.7) e (2.10) si ha:

$$\alpha(\theta) = \frac{4G}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \int \Sigma(\theta D_d) \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} d^2\theta' = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} d^2\theta'. \quad (2.15)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto la densità superficiale di massa adimensionale  $\kappa$  che prende il nome di *convergenza*:

$$\kappa(\theta) = \frac{\Sigma(D_d \theta)}{\Sigma_{cr}}. \quad (2.16)$$

Oltre all'angolo di deflessione ridotto e alla convergenza definiamo anche una terza quantità, il *potenziale di deflessione*  $\psi$ , che è lo scalare:

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\theta') \ln |\theta - \theta'| d^2\theta'. \quad (2.17)$$

Sia  $\alpha$  che  $\kappa$  sono relazionati con  $\psi$ . Usando l'identità  $\nabla \ln |\boldsymbol{\theta}| = \boldsymbol{\theta}/|\boldsymbol{\theta}|^2$ , valida per ogni vettore bidimensionale  $\boldsymbol{\theta}$ , si trova che l'angolo di deflessione ridotto è uguale al gradiente del potenziale di deflessione. Per la convergenza si usa invece la relazione  $\nabla^2 \ln |\boldsymbol{\theta}| = 2\pi\delta_D(\boldsymbol{\theta})$ , con  $\delta_D$  la distribuzione di Dirac bidimensionale, ricavando un'equazione di Poisson. Le due espressioni che si ottengono,

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \nabla\psi(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{e} \quad \nabla^2\psi(\boldsymbol{\theta}) = 2\kappa(\boldsymbol{\theta}) , \quad (2.18)$$

permettono di calcolare  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\kappa$  in funzione di  $\psi$ .

### 2.2.3 Ingrandimento e distorsione

Risolvendo l'equazione delle lenti possiamo conoscere la posizione (o le posizioni) angolare  $\boldsymbol{\theta}$  in cui si osserva l'immagine di una sorgente situata a  $\boldsymbol{\beta}$  o, invertendo, ricavare la posizione originale della sorgente a partire dalle immagini osservate. L'equazione però non basta per descrivere le differenze tra l'immagine della sorgente così come la vediamo per effetto della lente gravitazionale e la sorgente come ci apparirebbe se tra di essa e l'osservatore non fosse posta la lente. Gli effetti che una lente gravitazionale produce sono due: ingrandimento (in inglese *magnification*) e distorsione.

La deflessione dei raggi di luce fa sì che la sorgente sottenda nel cielo un angolo solido apparente diverso da quello che si avrebbe in assenza della lente. Il processo di *lensing* non è però legato all'assorbimento o all'emissione di fotoni, per cui la luminosità superficiale della sorgente rimane inalterata. Di conseguenza si ha una variazione del flusso totale osservato, proporzionale al rapporto tra l'angolo solido dell'immagine e della sorgente. Detto nei termini dell'ottica, abbiamo un focheggiamento isotropo. La sorgente ci appare ingrandita o rimpicciolita, senza che la sua forma sia alterata.

La lente però può operare anche un *focusing* anisotropo ovvero un astigmatismo: l'immagine della sorgente ci appare distorta. Ciò è legato al modo in cui è distribuita la massa della lente (p.e. zone di addensamento o meno dense). Inoltre, dato che le sorgenti sono estese, in un pacchetto di raggi emesso ogni raggio passerà per un punto differente del piano della lente, subendo così una deflessione differente. Si dovrebbe quindi, idealmente, poter risolvere l'equazione delle lenti per ogni punto della sorgente estesa e ricostruire così la forma dell'immagine osservata. Come vedremo, una misura della distorsione è data dallo *shear*.

Per descrivere i due effetti quantitativamente, si definisce la matrice (bidimensionale) Jacobiana delle lenti che contiene le derivate delle componenti di  $\boldsymbol{\beta}$  rispetto

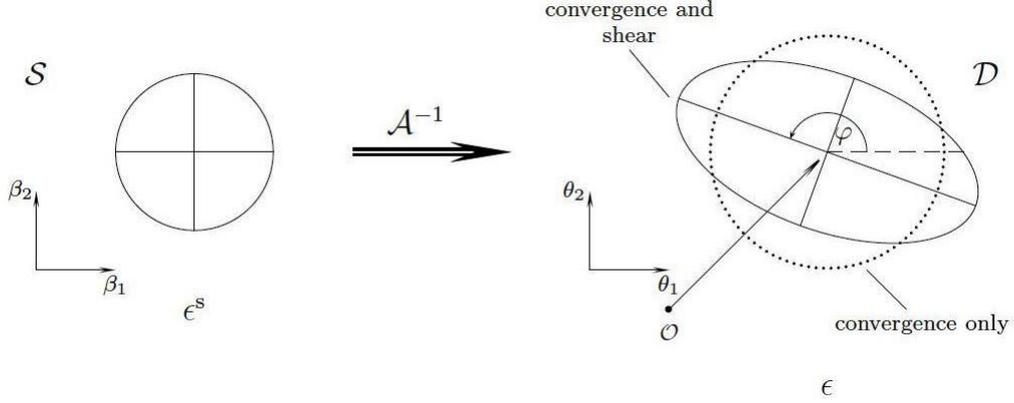


Figura 2.3:  $A^{-1}$  mappa una sorgente circolare in un'ellisse, il cui orientamento è determinato dall'angolo di fase di  $\gamma$ . In sua assenza, l'immagine sarebbe circolare, con il raggio determinato da  $\kappa$ . (Fonte: Schneider, 2006b, a sua volta da: M. Bradač.)

a quelle di  $\theta$ :

$$A = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right). \quad (2.19)$$

L'uguaglianza a destra deriva dall'equazione (2.9) e dalla prima delle relazioni (2.18). Gli elementi diagonali della matrice Jacobiana possono essere riespressi usando la convergenza. Infatti, dalla seconda delle relazioni (2.18) si deduce la relazione lineare:

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2^2} \right) \quad (2.20)$$

Altre due importanti combinazioni lineari delle derivate seconde del potenziale di deflessione definiscono lo *shear*. Questo è il numero complesso  $\gamma$  dato da:

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 \quad \text{con} \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2^2} \right), \quad \gamma_2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}. \quad (2.21)$$

Lo *shear* può essere espresso anche in termini di modulo e fase:  $\gamma = |\gamma|e^{i2\varphi}$ . Possiamo quindi riscrivere la matrice Jacobiana nella seguente forma:

$$A(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} = (1 - \kappa) \mathbf{I}_2 - |\gamma| \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Nell'uguaglianza a destra,  $\mathbf{I}_2$  sta ad indicare la matrice identità a due dimensioni. Questa scrittura di  $A$  rende evidenti i due effetti di ingrandimento e distorsione. Lo *shear* agisce su tutti gli elementi delle matrice, mentre la convergenza solo su quelli diagonali.

La matrice Jacobiana, unita all'equazione delle lenti, permette di calcolare la distribuzione di luminosità superficiale  $I(\boldsymbol{\theta})$  dell'immagine prodotta da una lente gravitazionale, nell'ipotesi che la luminosità superficiale della sorgente sia  $I^{(s)}(\boldsymbol{\beta})$ :

$$I(\boldsymbol{\theta}) = I^{(s)}[\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta})] . \quad (2.23)$$

Se la sorgente è molto minore della scala angolare sulla quale le proprietà delle lenti cambiano, allora la mappatura  $\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\beta}$ , che in genere non è lineare, può essere linearizzata localmente. Quindi, se  $\boldsymbol{\theta}_0$  è un punto dell'immagine che corrisponde al punto  $\boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\beta}_0(\boldsymbol{\theta}_0)$  della sorgente, approssimando al primo ordine l'equazione delle lenti (sviluppo in serie di Taylor) si avrà che:

$$I(\boldsymbol{\theta}) = I^{(s)}[\boldsymbol{\beta}_0 + A(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)] . \quad (2.24)$$

Una sorgente circolare (cioè con isofote circolari) viene trasformata dalla lente in un'ellisse. Se la fonte luminosa ha raggio unitario, gli assi dell'ellisse sono gli inversi di  $1 - \kappa \pm |\gamma|$ , gli autovalori di  $A(\boldsymbol{\theta}_0)$ . L'orientazione dell'ellissi è determinata dall'angolo di fase dello *shear*. Per quel che riguarda invece l'ingrandimento, esso dipende dal *tensore di ingrandimento*  $M$  che non è altro che l'inverso della matrice Jacobiana:  $M(\boldsymbol{\theta}) = A^{-1}$ .

Il fattore d'ingrandimento  $\mu$  viene formalmente definito come il rapporto tra il flusso dell'immagine e quello originario della sorgente. I flussi possono essere a loro volta calcolati integrando le rispettive distribuzioni di luminosità superficiale  $I(\boldsymbol{\theta})$  e  $I^{(s)}(\boldsymbol{\beta})$  nei corrispondenti piani. Nel caso di un sorgente sufficientemente piccola si ha:

$$\mu = \det M = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2} \quad (2.25)$$

Poiché non possiamo conoscere la luminosità intrinseca della fonte, il fattore d'ingrandimento non è un'osservabile fisica. Nel caso di *lensing* multiplo, è tuttavia possibile fare una comparazione tra i flussi - misurabili - delle diverse immagini (vedi Schneider, 2006a).

La relazione tra la convergenza e lo *shear* appare più chiara se calcoliamo esplicitamente quest'ultimo usando l'eq. (2.21) e la definizione di  $\psi$  data dall'eq. (2.17). Infatti, poichè  $\psi$  è espresso tramite un integrale in  $d^2\theta'$  in cui compare anche  $\kappa(\boldsymbol{\theta}')$ , derivando rispetto alle due componenti  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dell'angolo bidimensionale  $\boldsymbol{\theta}$  si otterrà un integrale di convoluzione con  $\kappa$ :

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\boldsymbol{\theta}') D(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') d^2\theta' \quad \text{con} \quad D(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2 - 2i\theta_1\theta_2}{|\boldsymbol{\theta}|^4} . \quad (2.26)$$

Questo risultato risulta particolarmente utile se vogliamo calcolare le trasformate di Fourier di  $\kappa$  e  $\gamma$ . Infatti, nello spazio trasformato la convoluzione si riduce a

una semplice moltiplicazione:

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{l}) = e^{2i\beta} \tilde{\kappa}(\mathbf{l}) . \quad (2.27)$$

$\beta$  è l'angolo della frequenza angolare  $\mathbf{l}$ , la variabile trasformata corrispondente all'angolo  $\theta$ . Le tilde stanno ad indicare le trasformate di Fourier. L'equazione (2.27) permette di usare la misura di  $\gamma$  per risalire al valore di  $\kappa$  e da esso, tramite l'eq (2.16), alla densità superficiale, per costruire una “mappa” della distribuzione di massa, sia barionica che oscura.

## 2.2.4 L'ellitticità

In generale le sorgenti non sono circolari, ma piuttosto ellittiche. Ciò è dovuta sia alla geometria stessa delle sorgenti (normalmente delle galassie) sia all'inclinazione del loro disco rispetto alla linea di vista.

In prima approssimazione possiamo considerare che le galassie sorgenti abbiamo delle isofote ellittiche, che rimarranno tali anche sotto l'effetto delle lenti gravitazionali. Risulta perciò utile definire l'*ellitticità*  $\epsilon$  che è il numero complesso:

$$\epsilon = \frac{1-r}{1+r} e^{2i\phi} \quad \text{con} \quad r = \frac{b}{a} . \quad (2.28)$$

In questo caso  $a$  e  $b$  indicano, rispettivamente, l'asse maggiore e minore dell'ellissi, mentre l'angolo  $\phi$  descrive la sua orientazione rispetto l'asse di riferimento (determinato da  $\theta_1$ ).

Da quanto detto sinora, segue che l'ellitticità caratteristica di un'immagine è in parte intrinseca ( $\epsilon^s$ ) e in parte dovuta alla lente. Studiando una sola immagine è impossibile dividere i due contributi, tanto più che il contributo del *lensing* è in generale di due ordini di grandezza minore di quello intrinseco (Schneider, 2006b). Possiamo però considerare un campione di galassie contenute in una parte del cielo e valutare la media della loro ellitticità. Assumendo che le galassie siano orientate in maniera isotropa, il contributo intrinseco all'ellitticità deve essere nullo ( $\langle \epsilon^s \rangle = 0$ ). Per quel che riguarda il collegamento tra  $\epsilon$  e  $\gamma$ , è stato mostrato (Seitz e Schneider, 1997) che vale la seguente relazione:

$$\epsilon = \frac{\epsilon^s + g}{1 + \epsilon^s g^*} \approx \epsilon^s + g \quad \text{con} \quad g = \frac{\gamma}{1 - \kappa} . \quad (2.29)$$

La quantità complessa  $g$  viene chiamata *shear ridotto*. Mediando sulle ellitticità di un campione di galassie si ottiene un media di  $g$ . Se inoltre il campo gravitazionale

della lente è sufficientemente debole (condizione valida nel caso di *weak lensing*), si ha che  $\kappa, |\gamma| \ll 1$ , così che

$$\langle \epsilon \rangle = \langle g \rangle \approx \langle \gamma \rangle . \quad (2.30)$$

La media dell'ellitticità ci dà quindi, in prima approssimazione, il valore medio dello *shear* di un campione.

## 3 Lo *shear* cosmico

Nel caso dello *shear cosmico*, la distorsione dell'immagine di una galassia distante non è generata da una concentrazione di massa localizzata in un'area limitata, ma dalla continua deflessione dei raggi di luce da parte delle disomogeneità di massa che si estendono lungo tutta la linea di vista. Di conseguenza, non è più possibile applicare l'approssimazione delle lenti sottili. Questa è la maggiore differenza tra lo *shear* cosmico e gli altri tipi di lenti gravitazionali.

### 3.1 La convergenza effettiva

I dettagli della derivazione del formalismo dello *shear* cosmico esulano dall'ambito di questo lavoro; al riguardo si veda Bartelmann & Schneider, 2001. Basti sapere che si può definire l'angolo di deflessione in maniera simile al caso delle lenti sottili. A questo proposito si considera la distanza trasversale tra due raggi di luce a partire dal punto in cui si trova l'osservatore dove sono separati dall'angolo  $\theta$ . Risalendo attraverso l'universo, le variazioni della distanza tra i raggi sono determinate dal gradiente nella direzione perpendicolare del potenziale gravitazionale ( $\nabla_{\perp}\Phi$ ), valutato nel punto in cui passano i raggi. Per calcolare l'angolo di deflessione si usa l'approssimazione di Born: si considera il valore del potenziale gravitazionale nella posizione del raggio non perturbato invece che in quella vera. L'approssimazione è valida per angoli piccoli. L'angolo di deflessione totale  $\alpha$  si ottiene integrando i singoli contributi lungo la linea di vista:

$$\alpha(\theta, \chi) = \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi} \frac{f_k(\chi - \chi')}{f_k(\chi)} \nabla_{\perp}\Phi (f_k(\chi')\theta, \chi') d\chi' \quad (3.1)$$

Questa è l'espressione dell'angolo per l'immagine di una sorgente che si trova nella direzione  $\theta$  e a una distanza comovente pari a  $\chi$ . Notiamo che è misurato rispetto a un raggio di luce di riferimento che viene scelto arbitrariamente e perciò non è univocamente definito. Il simbolo  $f_k(\chi)$  denota la distanza di diametro angolare comovente, il cui valore dipende dalla curvatura dell'universo.

Come nel capitolo precedente, anche in questo caso si procede calcolando la convergenza. Dalle due equazioni (2.18) si ottiene la relazione tra  $\kappa$  e  $\boldsymbol{\alpha}$  per le lenti sottili:  $\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} = 2\kappa$ . Usiamo questa espressione per definire la *convergenza effettiva*:

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}, \chi) = \frac{1}{c^2} \int_0^\chi \frac{f_k(\chi - \chi') f_k(\chi')}{f_k(\chi)} \nabla^2 \Phi(f_k(\chi') \boldsymbol{\theta}, \chi') d\chi' \quad (3.2)$$

Possiamo ottenere un'ulteriore espressione per  $\kappa$  ricordando l'equazione di Poisson (1.20) che ci permette di sostituire il potenziale gravitazionale  $\Phi$  con il contrasto di densità  $\delta$ :

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}, \chi) = \frac{3H_0^2 \Omega_m}{2c^2} \int_0^\chi \frac{f_k(\chi') f_k(\chi - \chi')}{f_k(\chi)} \frac{\delta(f_k(\chi') \boldsymbol{\theta}, \chi')}{a(\chi')} d\chi' \quad (3.3)$$

La convergenza effettiva è quindi data dall'integrale lungo il percorso della luce (dall'osservatore fino alla distanza comovente  $\chi$ ) del contrasto di densità, pesato con una combinazione di distanze di diametro angolare comoventi  $f_k$  e dal fattore di scala  $a$ . Inoltre, l'ampiezza di  $\kappa$  risulta proporzionale al parametro  $\Omega_m$ . La distanza comovente  $\chi$  è quella in cui si trova la sorgente, la cui posizione è quindi fissa. Normalmente però si studiano campioni di galassie sorgenti che si trovano a redshift diversi. Le loro distanze comoventi perciò variano, estendendosi lungo la linea di vista. Per questo si definisce anche una convergenza mediata sulle sorgenti:

$$\kappa_i(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^{\chi_{Hor}} p_i(\chi) \kappa(\boldsymbol{\theta}, \chi) d\chi \quad (3.4)$$

La quantità  $p_i$  denota la distribuzione di probabilità (normalizzata) delle distanze per il campione di galassie  $i$ . Il limite superiore dell'integrale,  $\chi_{Hor}$ , è l'orizzonte comovente e rappresenta la distanza comovente massima alla quale è ancora possibile osservare un oggetto.

Inserendo l'equazione (3.3) nell'eq. (3.4) si ottiene:

$$\begin{aligned} \kappa_i(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{3H_0^2 \Omega_m}{2c^2} \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi \int_\chi^{\chi_{Hor}} d\chi' p_i(\chi') \frac{f_k(\chi) f_k(\chi' - \chi)}{f_k(\chi')} \frac{\delta(f_k(\chi) \boldsymbol{\theta}, \chi)}{a(\chi)} = \\ &= \frac{3H_0^2 \Omega_m}{2c^2} \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi \frac{g_i(\chi) f_k(\chi)}{a(\chi)} \delta(f_k(\chi) \boldsymbol{\theta}, \chi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nell'ultimo passaggio è stato introdotta l'*efficienza delle lenti*:

$$g_i(\chi) = \int_\chi^{\chi_{Hor}} p_i(\chi') \frac{f_k(\chi' - \chi)}{f_k(\chi')} d\chi' \quad (3.6)$$

Questa quantità corrisponde al rapporto medio  $D_{ds}/D_d$  tra la distanza dalla lente alla sorgente e dalla sorgente all'osservatore, pesato con la distribuzione di probabilità delle distanze  $p_i$  del campione  $i$ -esimo.

### 3.1.1 Lo spettro di potenza della convergenza

Il seguente passo consiste nel calcolo dello spettro di potenza della convergenza. Per fare ciò ci servono la trasformata di Fourier della convergenza (eq. 3.5) e l'antitrasformata del contrasto di densità:

$$\tilde{\kappa}_i(\mathbf{l}) = \int e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\theta}} \kappa_i(\boldsymbol{\theta}) d^2\theta \quad (3.7)$$

$$\delta(f_k(\chi)\boldsymbol{\theta}, \chi) = \int e^{-i\mathbf{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\theta}f_k(\chi)} e^{-k_\parallel\chi} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \chi) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (3.8)$$

Il simbolo  $\mathbf{k}_\perp$  denota le componenti del vettore d'onda tridimensionale  $\mathbf{k}$  che sono ortogonali alla linea di vista, mentre  $k_\parallel$  è parallelo ad essa. Per comodità, adottiamo l'abbreviazione

$$q_i(\chi) \equiv \frac{3H_0^2\Omega_m}{2c^2} \frac{g_i(\chi)f_k(\chi)}{a(\chi)} \quad (3.9)$$

e usando le tre equazioni precedenti riscriviamo la trasformata della convergenza:

$$\tilde{\kappa}_i(\mathbf{l}) = \int d^2\theta \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} q_i(\chi) \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \chi) e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot(\mathbf{k}_\perp f_k(\chi)-\mathbf{l})} e^{-ik_\parallel\chi} \quad (3.10)$$

Per ricavare lo spettro bidimensionale della convergenza  $C_{ij}(l)$  è necessario calcolare il prodotto delle trasformate delle convergenze dei campioni di galassie i-esimo e j-esimo. Infatti, lo spettro è definito, in analogia con l'eq. (1.22), dall'equazione:

$$\langle \tilde{\kappa}_i(\mathbf{l}) \tilde{\kappa}_j^*(\mathbf{l}') \rangle = (2\pi)^2 \delta_D^{(2)}(\mathbf{l} - \mathbf{l}') C_{ij}(l) \quad (3.11)$$

Sviluppando la parte sinistra dell'equazione usando l'eq. (3.10) si ottiene la correlazione a due punti delle convergenze:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\kappa}_i(\mathbf{l}) \tilde{\kappa}_j^*(\mathbf{l}') \rangle &= \int d^2\theta \int d^2\theta' \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \\ &\times \langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \chi) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}', \chi') \rangle q_i(\chi) q_j(\chi') e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot(\mathbf{k}_\perp f_k(\chi)-\mathbf{l})} e^{-ik_\parallel\chi} e^{i\boldsymbol{\theta}'\cdot(\mathbf{k}'_\perp f_{k'}(\chi')-\mathbf{l}')} e^{ik'_\parallel\chi'} \\ &= \int d^2\theta \int d^2\theta' \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_\delta\left(|\mathbf{k}|, \frac{\chi + \chi'}{2}\right) \\ &\quad \times q_i(\chi) q_j(\chi') e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot(\mathbf{k}_\perp f_k(\chi)-\mathbf{l})} e^{i\boldsymbol{\theta}'\cdot(\mathbf{k}'_\perp f_{k'}(\chi')-\mathbf{l}')} e^{-ik_\parallel(\chi-\chi')} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Per ottenere la seconda eguaglianza si inserisce l'espressione (1.22) che definisce lo spettro di potenza delle fluttuazioni, dopodichè si esplicita l'integrale in  $d^3k'$

della distribuzione di Dirac che appare nell'eq. (3.11). Va notato che i contrasti di densità  $\tilde{\delta}$  erano valutati a epoche differenti ( $\chi$  e  $\chi'$ ), così che per il calcolo dello spettro di potenza  $P_\delta$  si è scelto di usare la media aritmetica delle due distanze comoventi (vedi Joachimi, 2010). Continuiamo con il calcolo integrando rispetto agli angoli  $\theta$  e  $\theta'$ ; questo ci dà due delta di Dirac.<sup>1</sup> Dopodichè si usa la trasformazione  $\delta_D^{(2)}(\mathbf{l} - f_k(\chi)\mathbf{k}_\perp) = \delta_D^{(2)}(\mathbf{l}/f_k(\chi) - \mathbf{k}_\perp)/f_k^2(\chi)$  che ci permette di eseguire l'integrale in  $\mathbf{k}_\perp$ :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\kappa}_i(\mathbf{l}) \tilde{\kappa}_j^*(\mathbf{l}') \rangle &= 2\pi \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi' \int dk_\parallel \frac{q_i(\chi) q_j(\chi')}{f_k^2(\chi)} \\ &\times P_\delta \left( \sqrt{\left(\frac{\mathbf{l}}{f_k(\chi)}\right)^2 + k_\parallel^2}, \frac{\chi + \chi'}{2} \right) \delta_D^{(2)} \left( \mathbf{l}' - \frac{f_k(\chi')}{f_k(\chi)} \mathbf{l} \right) e^{-ik_\parallel(\chi - \chi')} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

A questo punto, per poter semplificare l'espressione ottenuta sono necessarie delle approssimazioni. Sapendo che  $P_\delta(k) \rightarrow 0$  quando  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$  (Joachimi, 2010) si può assumere che lo spettro di potenza tenda a zero per scale spaziali sufficientemente grandi, cioè quando i valori di  $\chi$  e  $\chi'$  differiscono molto. Questa considerazione ci permette di adottare l'approssimazione di Limber: sostituiamo l'argomento  $\chi'$  con  $\chi$  nelle funzioni lentamente variabili  $q_i(\chi)$  e  $f_k(\chi)$  e assumiamo che  $(\chi + \chi')/2 \approx \chi$ . L'eq.3.13 diventa così:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\kappa}_i(\mathbf{l}) \tilde{\kappa}_j^*(\mathbf{l}') \rangle &= 2\pi \delta_D^{(2)}(\mathbf{l} - \mathbf{l}') \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi \int dk_\parallel \frac{q_i(\chi) q_j(\chi)}{f_k^2(\chi)} \\ &\times P_\delta \left( \sqrt{\left(\frac{\mathbf{l}}{f_k(\chi)}\right)^2 + k_\parallel^2}, \chi \right) \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi' e^{-ik_\parallel(\chi - \chi')} . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Possiamo integrare rispetto a  $\chi'$ : otteniamo una  $\delta_D$  che ci semplifica anche l'integrale in  $k_\parallel$ . Il risultato finale è:

$$\langle \tilde{\kappa}_i(\mathbf{l}) \tilde{\kappa}_i^*(\mathbf{l}') \rangle = 2\pi \delta_D^{(2)}(\mathbf{l} - \mathbf{l}') \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi \frac{q_i(\chi) q_j(\chi)}{f_k^2(\chi)} P_\delta \left( \frac{|\mathbf{l}|}{f_k(\chi)}, \chi \right) \quad (3.15)$$

Infine, non ci resta che fare un confronto tra le equazioni (3.11) e (3.15) per identificare la parte dell'eq. (3.15) che corrisponde a  $C_{ij}(l)$ . Si ricava così lo spettro di potenza della convergenza:

$$C_{ij}(l) = \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi \frac{q_i(\chi) q_j(\chi)}{f_k^2(\chi)} P_\delta \left( \frac{|\mathbf{l}|}{f_k(\chi)}, \chi \right) =$$

---

<sup>1</sup>Si ricorda che la rappresentazione di Fourier della delta è  $\delta_D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{i\omega t}$ .

$$= \frac{9H_0^4 \Omega_m^2}{4c^2} \int_0^{\chi_{Hor}} d\chi \frac{g_i(\chi) g_j(\chi)}{a^2(\chi)} P_\delta \left( \frac{|\mathbf{l}|}{f_k(\chi)}, \chi \right). \quad (3.16)$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo esplicitato  $q_i(\chi)$  (eq. 3.9). L'espressione ottenuta è l'equazione di Limber per lo spettro di potenza della convergenza: asserisce che lo spettro  $C_{ij}$  è dato dallo spettro di potenza tridimensionale delle fluttuazioni  $P_\delta$ , proiettato lungo la linea di vista (integrale in  $d\chi$ ) e pesato con le efficienze delle lenti  $g$  dei due campioni ( $i$  e  $j$ ) di sorgenti.

Giunti a questo risultato, si ricordi che la convergenza e lo *shear* sono collegati tramite l'equazione (2.27): la trasformata di Fourier di  $\kappa$  è uguale a quella di  $\gamma$  a parte una fase. Di conseguenza, gli spettri di potenza delle due quantità coincidono. Quindi, dalla misura dello *shear* di un campione si può, supponendo di conoscere  $P_\delta$ , determinare i valori dei parametri cosmologici che compaiono nell'eq. (3.16), come vedremo nelle prossime sezioni. In alternativa, in letteratura sono stati sviluppati anche dei metodi numerici per invertire l'equazione in modo da ricavare  $P_\delta$  direttamente dai dati (vedi Mezzetti et al., 2012), ma ancora non sono disponibili dei risultati riguardanti la loro applicazione a misure reali.

## 3.2 La misura dello *shear*

Per usare lo *shear* cosmico ai fini di derivare dei limiti al modello cosmologico sono necessarie osservazioni di ampie e profonde aree del cielo con un'elevata qualità delle immagini e metodi di analisi sofisticati. La descrizione del processo di misura e analisi dati che presenteremo nel seguito si basano su Kilbinger, 2014, Schneider, 2006 e Hoekstra e Jan, 2008, nonché su diversi articoli di ricerca di CFHTLenS (a proposito si veda il capitolo 4).

### 3.2.1 E/B-modes e la funzione di correlazione dello *shear*

Prima di discutere degli aspetti pratici della misura dello *shear* è opportuno descrivere il tipo di distorsione prodotta dalla lenti gravitazionali che può essere indicata come E-mode. Iniziamo il nostro ragionamento notando che le due componenti di  $\gamma$ , definite nell'eq.(2.20), non sono indipendenti una dall'altra e non possono avere una forma arbitraria, giacche derivano da  $\psi$  o, equivalentemente, da  $\kappa$ . Possiamo definire un campo vettoriale  $\mathbf{u}$ , gradiente di  $\kappa$ , le cui componenti possono essere espresse in termini delle derivate di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  usando la relazioni (2.19) e (2.20):

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}) = \nabla \kappa(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \gamma_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \gamma_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \gamma_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

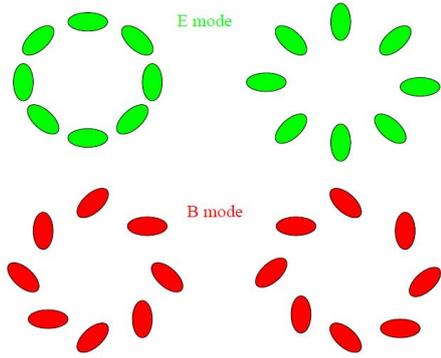


Figura 3.1: Orientamento delle immagini delle galassie dovuto al E-mode (sopra) o al B-mode (sotto) intorno a regioni con maggiore (sinistra) o minore (destra) densità centrale. (Fonte: van Waerbeke e Mellier, 2003.)

A questo punto dobbiamo ricordare che il rotore di un gradiente deve essere nullo, perciò

$$\nabla \times \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 \gamma_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} - \frac{\partial^2 \gamma_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2^2} = 0. \quad (3.18)$$

Lo *shear* le cui derivate seconde soddisfano la condizione (3.18) è, in analogia con il campo elettrico, un *campo E-mode*. Di conseguenza, può produrre solo determinati tipi di allineamento delle immagini delle galassie-sorgenti. Nel caso di una lente con distribuzione di massa a simmetria circolare le galassie risultano allineate tangenzialmente rispetto alla congiungente con il centro di simmetria, come illustrato nella parte in alto a sinistra della figura 3.1; questa disposizione si incontra anche nei grandi archi generati dal *lensing* forte. Intorno a regioni con densità centrale bassa l'allineamento è invece radiale.

In pratica, oltre al E-mode viene osservato anche il B-mode. Questo introduce un'inclinazione delle forme di  $\pi/4$  rispetto al E-mode (parte bassa della figura 3.1). Il B-mode può avere diverse origini, come per esempio errori nell'acquisizione e nell'analisi delle immagini, termini di ordine superiore nelle equazioni che governano la propagazione della luce o l'allineamento intrinseco delle galassie (vedi sezione 3.2.2). Per tener conto della presenza dei B-mode ovvero di una componente con rotore non nullo, si può ridefinire la convergenza in modo che sia un numero complesso la cui parte reale è quella propriamente dovuta al *lensing*, mentre la nuova parte immaginaria raccoglie gli altri contributi:  $\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \kappa_E(\boldsymbol{\theta}) + i\kappa_B(\boldsymbol{\theta})$ . Di conseguenza, anche lo spettro di potenza può essere diviso nelle componenti E-mode e B-mode: la prima racchiude le informazioni cosmologiche essendo uguale all'eq. (3.16), la seconda dovrebbe essere nulla in condizioni ideali. Perciò, la misura della componente B-mode viene usata per valutare l'accuratezza dei dati e la presenza di eventuali errori sistematici.

Considerando che lo *shear* è responsabile solo di determinate disposizioni delle immagini delle galassie, è opportuno misurare  $\gamma$  non con  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (definiti rispetto

al sistema cartesiano), ma usando le componenti tangenziali e trasversa,

$$\gamma_t = -Re(\gamma e^{-2i\varphi}) \quad \gamma_x = -Im(\gamma e^{-2i\varphi}) , \quad (3.19)$$

dove  $\varphi$  è l'angolo polare del vettore di separazione  $\boldsymbol{\theta}$  tra due galassie. Spesso il centro del sistema di coordinate polari è scelto in modo da coincidere con il centro di un ammasso di galassie. La convenzione di usare il segno - fa sì che il valore della componente tangenziale  $\gamma_t$  sia positivo nel caso di allineamento tangenziale intorno a regioni sovradense. Una componente trasversa  $\gamma_x$  positiva è ruotata di  $+\pi/4$  rispetto a  $\gamma_t$ . Comunque, in condizioni ideali si dovrebbe avere  $\gamma_x = 0$ . In maniera analoga alle relazioni (3.19) si definiscono anche le due componenti tangenziale e trasversa dell'ellitticità:  $\epsilon_t$  e  $\epsilon_x$ .

Oltre allo spettro di potenza (eq. 3.16), nelle *surveys* cosmologiche spesso si utilizzano anche altre quantità il cui calcolo risulta più immediato. Tra queste, la più semplice è la funzione di correlazione a due punti dello *shear*, data dalle seguenti combinazioni della componente tangenziale e trasversa di  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \xi_+(\boldsymbol{\theta}) &= \langle \gamma \gamma^* \rangle (\boldsymbol{\theta}) = \langle \gamma_t \gamma_t \rangle (\boldsymbol{\theta}) + \langle \gamma_x \gamma_x \rangle (\boldsymbol{\theta}) ; \\ \xi_-(\boldsymbol{\theta}) &= \langle \gamma \gamma \rangle (\boldsymbol{\theta}) = \langle \gamma_t \gamma_t \rangle (\boldsymbol{\theta}) - \langle \gamma_x \gamma_x \rangle (\boldsymbol{\theta}) . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Rispetto a  $C_{ij}$ ,  $\xi_{\pm}$  ha il vantaggio di poter essere stimata facilmente dai dati. Come illustrato da Schneider et al., 2002, il suo stimatore è

$$\hat{\xi}_{\pm}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sum_{ij} w_i w_j (\epsilon_{t,i} \epsilon_{t,j} \pm \epsilon_{x,i} \epsilon_{x,j})}{\sum_{ij} w_i w_j} . \quad (3.21)$$

Si somma su tutte le coppie di galassie  $(i, j)$  che si trovano nelle posizioni  $\boldsymbol{\vartheta}_i$  e  $\boldsymbol{\vartheta}_j$  la cui separazione  $|\boldsymbol{\vartheta}_i - \boldsymbol{\vartheta}_j|$  è compresa in un intervallo di ampiezza  $\Delta_{\theta}$  intorno a  $\boldsymbol{\theta}$ . A ogni galassia viene attribuito un peso  $w_i$  che tiene conto dell'incertezza della misura. Ricordando l'eq. (2.28) per il *weak lensing*, si ha che  $\epsilon \approx \epsilon^s + \gamma$  e quindi il valore di aspettazione dello stimatore  $\xi_+$  è composto da termini della forma

$$\langle \epsilon_i^s \epsilon_j^{s*} \rangle , \quad \langle \epsilon_i^s \gamma_j^* \rangle , \quad \langle \gamma_i \epsilon_j^{s*} \rangle \quad \text{e} \quad \langle \gamma_i \gamma_j^* \rangle . \quad (3.22)$$

In assenza di correlazione tra le ellitticità intrinseche  $\epsilon^s$  ovvero se quest'ultime sono orientate in maniera isotropa i primi tre termini sono nulli, quindi il valore di aspettazione di  $\hat{\xi}_+$  dipende solo dallo *shear*. Considerazioni analoghe valgono anche per  $\hat{\xi}_-$ .

La funzione di correlazione a due punti di  $\gamma$ , come tutti gli altri stimatori che dipendono quadraticamente dallo *shear*, possono essere espressi semplicemente in funzione dello spettro di potenza. Riportiamo la relazione tra  $\xi_{\pm}$  e  $C_{ij}$ :

$$\xi_+(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^{\infty} \frac{dl}{2\pi} l J_0(l\boldsymbol{\theta}) C_{ij}(l) ; \quad \xi_-(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^{\infty} \frac{dl}{2\pi} l J_4(l\boldsymbol{\theta}) C_{ij}(l) . \quad (3.23)$$

Negli integrali compaiono le funzioni di Bessel di prima specie di ordine 0 ( $J_0$ ) e 4 ( $J_4$ ), le cui proprietà permettono anche di invertire le espressioni (3.23) e ottenere lo spettro di potenza dalla funzione di correlazione di  $\gamma$ .<sup>2</sup> Le due equazioni (3.23) possono essere anche modificate in modo da tener conto della suddivisione in E-mode e B-mode, da cui dipendono in maniera differente. Una dimostrazione dettagliata della derivazione di queste relazioni, oltre che delle eq.(3.23) si trova in Schneider et al., 2002 e Schneider, 2006b.

### 3.2.2 Errori della misura

Data la debolezza della distorsione causata dalle lenti, è necessario studiare un vasto campione (anche di alcuni miliardi nelle *surveys* future) di galassie ad alto redshift e con un rapporto segnale-rumore basso. Trattandosi di galassie di *background* la loro estensione è dell'ordine del arcosecondo, il che corrisponde a un piccolo numero di pixel di campionamento. Quindi, per poter misurare la forma delle galassie in maniera accurata, si deve disporre di immagini ad alta risoluzione. Va notato comunque che piuttosto che conoscere la forma delle singole galassie con grande precisione, ciò che interessa è che le misure dell'intero campione siano prive di errori sistematici.

Nel seguito presentiamo tre fattori che incidono sulla misura dello *shear* e che se non correttamente trattati, possono dar luogo a errori sistematici.

**1. Determinazione e correzione della PSF.** Le immagini dei telescopi non ci mostrano direttamente la forma dei corpi celesti come sono in realtà. Come si può vedere nella figura 3.2, le forme di una galassia o una stella ci appaiono modificate a causa di diversi effetti. La misura è sensibile alle condizioni atmosferiche (un effetto chiamato *seeing*) e alle caratteristiche ottiche del telescopio (p.e. possibili aberrazioni ottiche). Il sistema di acquisizione digitale, formato da CCD, ne determina una pixelizzazione. Nelle immagini è presente anche un rumore, principalmente di origine strumentale (p.e. saturazione dei pixel, risposta dei CCD non lineare), ma che può essere dovuto anche, per esempio, ai raggi cosmici.

La risposta del sistema di acquisizione d'immagini a una sorgente puntiforme, dovuta all'atmosfera e al telescopio, viene descritta tramite un kernel di convoluzione ed è detta *point spread function* (PSF). Il nome deriva dal fatto che, a causa di questi effetti, una sorgente puntiforme ci appare estesa (*spread*). Per poter valutare la PSF di un'immagine è necessario selezionare un campione di stelle (oggetti puntuali) abbastanza luminose e misurarne la forma. Quindi, il valore della PSF

---

<sup>2</sup>Un'espressione della funzione di Bessel di prima specie di ordine  $\mu$  è  $J_\mu(x) = \frac{1}{\pi i^\mu} \int_0^\pi d\varphi e^{ix \cos(\varphi)} \cos(\mu\varphi)$ .

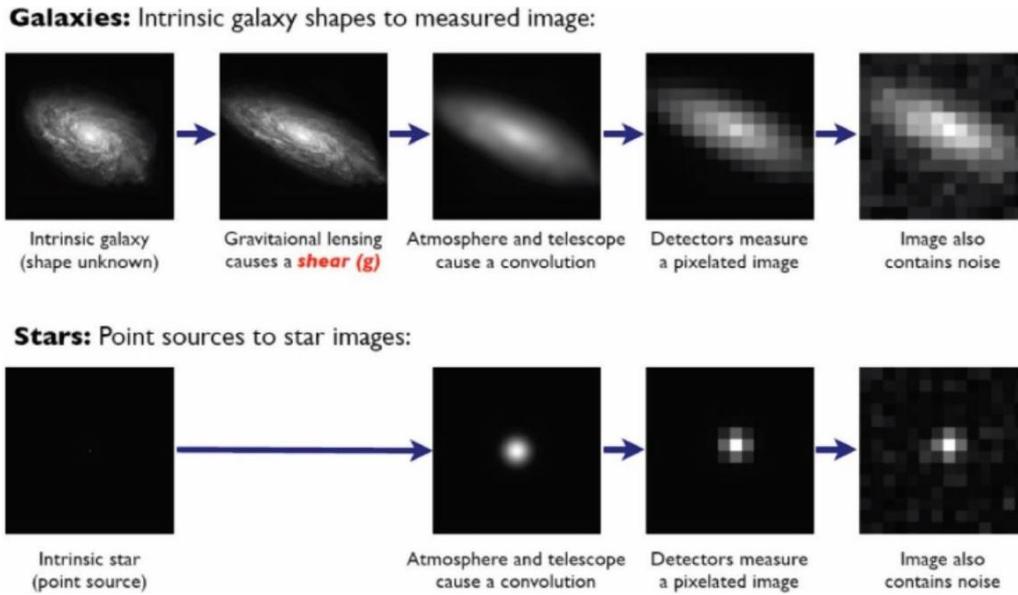


Figura 3.2: La figura illustra come le immagini di una galassia o di una stella ci appaiono alterate rispetto a come sono in realtà. (Fonte: <http://gravitationalensing.pbworks.com/>)

nella posizione della galassia si calcola tramite una funzione d'interpolazione che può essere più o meno complessa. Successivamente, si procede alla deconvoluzione dell'immagine.

La PSF è fonte di diversi errori sistematici. Come descritto da Hoekstra e Jan, 2008, la combinazione di *seeing* e PSF tende a far diventare le forme delle galassie osservate più circolari, diminuendo l'entità dello *shear* cosmico. La presenza di anisotropie nella PSF può portare invece all'osservazione di un effetto simile allo *shear*, giacché vengono introdotti degli allineamenti coerenti tra le forme delle galassie. Non sorprende quindi che lo sviluppo di metodi per la stima della PSF e la successiva correzione (deconvoluzione) delle immagini sia uno degli aspetti chiave nello studio delle lenti gravitazionali.

L'ellitticità delle galassie può essere valutata con due metodi diversi. Il primo consiste nella sua valutazione direttamente dall'immagine, misurando la distribuzione di luminosità  $I(\theta)$  della galassia. Il secondo prevede l'assunzione di un modello per  $I$  che viene poi adattato all'immagine. Il primo metodo esige minori assunzioni su  $I$ , ma è anche più sensibile al rumore presente nell'immagine. Comunemente, l'errore sistematico che la PSF e la deconvoluzione inducono nella stima dello *shear* viene parametrizzato introducendo due fattori, uno additivo e uno moltiplicativo:

$$\hat{\gamma} = (1 + m)\gamma + c . \quad (3.24)$$

$\gamma$  è il valore vero, mentre  $\hat{\gamma}$  è il valore misurato; la relazione può essere scritta separatamente per le due componenti dello *shear*. Come descritto da Mandelbaum, 2015,  $m$  e  $c$  dipendono dal rapporto segnale-rumore, dalla grandezza e dalla morfologia delle galassie, ma è il fattore moltiplicativo  $m$  ad essere più difficile da stimare, perchè è legato alla calibrazione della PSF. Infatti, se per esempio la PSF non è calibrata correttamente in modo da risultare sistematicamente troppo grande per le immagini di un'area del cielo, il valore di  $\hat{\gamma}$  (ottenuto dopo la convoluzione) per il corrispondente campione di galassie sarà troppo piccolo. Il fattore  $c$  tiene in conto invece delle possibili anisotropie presenti nella PSF.

Finora, le ellitticità sono state misurate con un'accuratezza del 1%, che andrà migliorata nelle *surveys* future, per fare in modo che, all'aumentare della statistica (e quindi al diminuire degli errori statistici) non si sia dominati dalle incertezze sistematiche.

**2. Determinazione del redshift.** La valutazione della funzione di correlazione ovvero dello spettro di potenza dello *shear* richiede la conoscenza della distribuzione delle galassie lungo la linea di vista, cioè in funzione del redshift. La sensibilità di  $C_{ij}$  (3.16) nei confronti del valore medio  $z$  del campione è comparabile a quella nei confronti dei parametri cosmologici (Jain e Seljak, 1997, citati da Kilbinger, 2014). Quindi, per ottenere una stima dei parametri cosmologici con una certa precisione è necessario misurare  $z$  con almeno lo stesso grado di precisione.

Piuttosto che con la tecnica spettroscopica, nelle *surveys* cosmologiche il redshift viene stimato usando la fotometria, meno costosa (richiede un tempo di telescopio minore), ma anche meno accurata. Mentre con la tecnica spettroscopica il redshift viene misurato usando lo spettro delle galassie e osservando lo spostamento verso lunghezze d'onda maggiori delle righe di emissione e assorbimento presenti, il redshift fotometrico si basa sulla luminosità delle galassie in vari intervalli di lunghezza d'onda (bande fotometriche). Ogni filtro lascia passare solo una o un intervallo di lunghezze d'onda; in questo modo, combinando le immagini si riesce a valutare la forma dello spettro, anche se con risoluzione più bassa. La stima del redshift fotometrico dipende anche dal tipo di galassia e dalla profondità a cui si trova.

La presenza di galassie il cui redshift stimato (fotometrico) differisce da quello reale (spettroscopico) per più di qualche deviazione standard - i cosiddetti *catastrophic outliers* - può causare importanti bias nel calcolo di  $C_{ij}$ ; la loro incidenza dovrebbe essere minore del 1%. Per questo, i redshift fotometrici vanno calibrati usando un sotto-campione di cui si misura anche il redshift spettroscopico. Nelle *surveys* correnti questo sotto-campione comprende circa diecimila galassie.

**3. Allineamento intrinseco.** Le forme delle galassie possono essere correlate

anche in assenza di *shear*, a causa del campo mareale gravitazionale (*tidal gravitational field*) che genera interazioni tra le galassie e le strutture circostanti (altre galassie o ammassi). La forza gravitazionale non agisce su tutti i punti di un corpo nello stesso modo, ma varia in funzione della distanza dal centro di gravità, provocando uno “stiramento” e un allineamento del corpo nella direzione radiale verso il centro di gravità.

Le prime predizioni sull’allineamento intrinseco (IA, *intrinsic alignment*) delle galassie risalgono all’inizio degli anni 2000 e solo recentemente si è riuscito a misurarlo direttamente (vedi Kilbinger, 2014 e referenze ivi citate). Si prevede l’esistenza di due meccanismi principali che causano l’IA tra galassie che si trovano nello stesso campo di marea gravitazionale. Il primo è la presenza di un momento torcente durante l’epoca di formazione delle galassie che avrebbe fatto allineare gli assi di rotazione delle galassie. Il secondo è lo stiramento coerente degli aloni delle galassie da parte del campo di marea. L’effetto di IA dipende anche dal tipo di galassie e varia con l’età cosmica, essendo maggiore a bassi redshift. Infine, una delle principali difficoltà dello studio dell’IA è capire in che modo le galassie sono allineate con la materia oscura circostante.

L’IA genera una correlazione tra le ellitticità delle galassie che, se non trattata propriamente, può causare un bias nella derivazione dei parametri cosmologici maggiore del 10%. In particolare, l’IA genera un B-mode non nullo (vedi figura 3.1) e influisce sulla funzione di correlazione  $\xi_{\pm}(\theta)$ .

Per coppie di galassie vicine, che subiscono l’influenza dello stesso campo di marea, si ha  $\langle \epsilon_i^s \epsilon_j^{s*} \rangle \neq 0$ . Un modo di annullare l’effetto di questo contributo, generalmente chiamato *II* (*intrinsic-intrinsic correlation*), può essere quello di scartare, tramite opportune scelte dei pesi  $w_i$  nell’eq.(3.21), le coppie di galassie che si trovano alla stesso redshift. In questo senso, l’uso della tomografia (vedi sezione 4.4) che permette di calcolare lo spettro di potenza ( $C_{ij}$ ) di galassie che si trovano in intervalli differenti (e quindi a grandi distanze), può ridurre l’entità di questo errore sistematico. Naturalmente, nel calcolo dell’auto-spettro ( $C_{ii}$ ), il suo contributo è tutt’altro che trascurabile perchè si va a selezionare proprio gruppi di galassie che con grande probabilità risentono dello stesso campo mareale.

Anche i termini misti del tipo  $\langle \epsilon_i^s \gamma_j^* \rangle$  possono essere non nulli a causa dell’IA. Infatti, una distribuzione di massa che fa da lente gravitazionale può causare anche IA. Mentre le galassie di *background* vengono allineate tangenzialmente a causa dello *shear*, le galassie che si trovano allo stesso redshift della lente sono stirate radialmente verso di essa. In questo modo le ellitticità delle galassie di fondo sono ortogonali rispetto a quelle delle galassie di *foreground*; ciò corrisponde a una correlazione tra *shear* ed ellitticità intrinseca negativa. Questo secondo effetto

dell'IA, detto  $GI$  (*shear-intrinsic correlation*), è normalmente maggiore del  $II$  ed è anche più difficile da controllare, visto che causa correlazione tra coppie di galassie che si trovano a distanze differenti lungo la linea di vista. Come discusso da Heymans et al., 2013, il procedimento tomografico risente particolarmente della correlazione tra galassie a redshift differenti, perchè viene influenzato il calcolo degli spettri inter-intervallo ( $C_{ij}$ ) che sono il punto di forza di questo metodo.

Quindi, nella misura dello *shear* cosmico, specialmente con il metodo tomografico, non si può prescindere da una buona modellazione dell'IA e degli errori sistematici che esso produce.

### 3.3 Determinazione dei parametri cosmologici

La determinazione dei parametri cosmologici a partire dai dati di *shear* cosmico viene eseguita facendo un confronto di quest'ultimi con le previsioni teoriche tramite la massimizzazione della funzione di likelihood. Lo stimatore può essere rappresentato dallo spettro di potenza  $C_{ij}$  o da altre quantità che dipendono da  $\gamma$  almeno in maniera quadratica. Seguendo il ragionamento di Schneider, 2006b, supponiamo che si tratti di  $\xi$ , una delle due componenti di  $\xi_{\pm}$ . Normalmente si assume che lo stimatore abbia una funzione di distribuzione gaussiana multidimensionale, quindi la probabilità che  $\xi$  assuma il valore osservato  $\xi^{obs}$ , dato il vettore dei parametri  $p$  è:

$$P(\xi^{obs}|p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \text{Cov}}} \exp\left(\frac{-Q^2(p, \xi^{obs})}{2}\right) \quad (3.25)$$

con

$$Q^2(p, \xi^{obs}) = \sum_{i,j} (\xi_i(p) - \xi_i^{obs}) \text{Cov}_{ij}^{-1} (\xi_j(p) - \xi_j^{obs}) . \quad (3.26)$$

In tale equazione  $\xi_i = \xi(\theta_i)$  sono i valori della funzione di correlazione negli intervalli angolari,  $n$  è il numero di intervalli e  $\text{Cov}_{ij}^{-1}$  è l'inverso della matrice delle covarianze. Quest'ultima può essere stimata in modi differenti: direttamente dai dati, numericamente tramite simulazioni o derivando espressioni analitiche. La sua determinazione è ampiamente discussa in varie pubblicazioni (p.e. quelle di CFHTLenS): indipendentemente dallo stimatore scelto, si tratta di un calcolo difficile e i diversi metodi approssimati che vengono impiegati necessitano di una buona argomentazione. Si pensi inoltre che se lo stimatore ha una dipendenza al secondo ordine, la covarianza ha una dipendenza del quarto ordine da  $\gamma$ . Nel caso di  $\xi_{\pm}$ , la precisione della misura e quindi la matrice delle covarianze dipendono, tra l'altro, dalla densità numerica proiettata delle galassie (e di conseguenza dalla qualità e profondità delle immagini) e dall'angolo solido totale osservato.

La funzione di likelihood che si ottiene è

$$L(p|\xi^{obs}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \text{Cov}}} \exp\left(\frac{-Q^2(p, \xi^{obs})}{2}\right) P_{prior}(p), \quad (3.27)$$

dove  $P_{prior}(p)$  contiene delle costrizioni a priori ovvero stabilisce gli intervalli di valori che possono assumere i parametri  $p$ . Se un parametro è noto con precisione infinita, l'intervallo di variazione viene sostituito da una delta di Dirac. Spesso si è interessati solo a un sottoinsieme di parametri; in questo caso si calcola la funzione di likelihood marginalizzata integrando sui restanti parametri. Notiamo che  $L(p|\xi^{obs})$  è un'approssimazione di quella che è la funzione di likelihood vera, derivante dall'assunzione che  $\xi$  sia gaussiana. Anche se quest'assunzione viene largamente usata per l'analisi delle *surveys* attuali, potrebbe non essere sufficiente in quelle future. La funzione di likelihood vera potrebbe essere stimata attraverso simulazioni o sviluppando nuovi approcci analitici (si veda Kilbinger, 2014 e lavori ivi citati). Lo *shear* non è gaussiano, specialmente a scale piccole.

Il vettore  $p$  contiene parametri diversi: oltre a quelli cosmologici, possono esserci parametri addizionali che tengono conto, per esempio, della calibrazione delle immagini, delle incertezze nella misura di  $z$  o di effetti astrofisici come l'allineamento intrinseco. Nel modello  $\Lambda$ CDM (universo piatto con costante cosmologica e materia oscura fredda) i parametri cosmologici sono cinque:  $h$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b$ ,  $n_s$  e  $\sigma_8$ . Per i modelli che prevedono un'equazione di stato variabile nel tempo per l'energia oscura si aggiunge il parametro  $w_0$ , mentre per un universo curvo si deve considerare anche  $\Omega_\Lambda$ .

I due parametri ai quali lo *shear* cosmico è maggiormente sensibile sono  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$ . Mentre  $\sigma_8$  è presente nell'equazione di  $C_{ij}$  attraverso lo spettro di potenza delle fluttuazioni  $P_\delta$ ,  $\Omega_m$  vi appare elevato alla seconda (si veda l'eq. 3.16). Inoltre,  $\Omega_m$  entra pure nel profilo dello spettro di potenza delle fluttuazioni e governa la sua dipendenza dal redshift, attraverso il fattore di crescita lineare delle perturbazioni.  $\sigma_8$  e  $\Omega_m$  sono degeneri: diverse combinazioni di questi due parametri producono valori simili di  $C_{ij}$ . Spesso nelle *surveys* viene determinato  $S = \sigma_8 \Omega_m^\alpha$ , con  $\alpha \approx 0.5 - 0.7$ . Lo spettro  $C_{ij}(l)$  risponde alla variazione dei parametri cosmologici in modi diversi:  $\sigma_8$ ,  $\Omega_m$  e  $w_0$  influiscono sulla sua ampiezza, mentre  $n_s$  e  $h$  determinano una variazione della pendenza. Per quel che riguarda l'energia oscura e la sua possibile evoluzione nel tempo, essa influisce sia su  $P_\delta$  che sugli altri fattori presenti nell'equazione dello spettro (3.16). Inoltre, anche la relazione tra l'osservabile  $z$  e la distanza comovente  $\xi$  ne dipende. La dipendenza dello *shear* cosmico dall'energia oscura attraverso due "canali" - quello relativo all'evoluzione della struttura a grande scala e quello geometrico-spaziale - fa sì che questo sia uno degli strumenti cosmologici più promettenti per il suo studio.

La massimizzazione della funzione di likelihood ovvero la stima dei parametri viene effettuata tramite metodi numerici (del tipo “Monte Carlo Markov chain”). Dato che le misure di *shear* cosmico sono via via più accurate, richiedono una conoscenza molto precisa dello spettro di potenza delle fluttuazioni  $P_\delta(k, z)$  “teorico”. Il calcolo della parte di evoluzione non lineare di  $P_\delta(k, z)$  si basa su simulazioni che a loro volta studiano l’evoluzione della struttura a grande scala a partire da un set di assunzioni sulle condizioni iniziali e sul modello cosmologico. La maggioranza delle simulazioni considera solo l’interazione gravitazionale ovvero solo la materia oscura, senza tenere conto del contributo della materia barionica e delle diverse interazioni che può subire. L’approssimazione potrebbe essere giustificata dal fatto che la materia oscura predomina sulla barionica; tuttavia, è stato osservato che l’effetto dei barioni sullo spettro di potenza a piccole scale ovvero a grandi  $k$  non è trascurabile. A queste scale entrano in gioco effetti dovuti ai nuclei galattici attivi, alle supernovae e al raffreddamento dei gas, e lo spettro non è lineare. Per predire l’influenza dei barioni su  $P_\delta(k, z)$  sono necessarie ulteriori simulazioni, che però presentano due inconvenienti. Il primo è legato al costo e al tempo di calcolo; il secondo, più importante, riguarda l’andamento dello spettro a piccole scale che dipende da processi fisici ancora non ben conosciuti. Per ovviare al problema, nelle *surveys* spesso si decide di usare un range di scale limitato, tagliando le scale angolari  $\theta$  basse ovvero i modi  $l$  e  $k$  alti, dove l’effetto dell’evoluzione non lineare e dei barioni diventa importante. Scartando una parte dei dati si perde ovviamente anche una parte d’informazione: l’incertezza legata alla predizione di  $P_\delta(k, z)$  nel regime non lineare rappresenta attualmente, insieme all’allineamento intrinseco, uno dei maggiori limiti teorici dello *shear* cosmico.

### 3.4 Lo *shear* tomografico e 3D

La distribuzione delle galassie in funzione della distanza ovvero del redshift determina il range entro il quale viene proiettato lo spettro di potenza delle fluttuazioni  $P_\delta$  nell’equazione dello spettro di potenza (3.16). Quest’equazione trasforma lo spettro  $P_\delta(k = l/f_k(\chi), \chi)$  che è tridimensionale in uno spettro  $C_{ij}(l)$  bidimensionale, il che può determinare una perdita delle informazioni in esso contenute. Un modo per estrarre maggiori informazioni è di dividere le galassie in base al loro redshift e calcolare l’efficienza delle lenti (3.6) per ogni intervallo. Questo procedimento permette di studiare effetti che variano con il redshift come la crescita delle strutture a grande scala e la possibile dipendenza dal redshift dell’equazione di stato dell’energia oscura.

### 3.4.1 *Shear* tomografico: calcolo dell’efficienza delle lenti e dello spettro di potenza

Per ogni intervallo in cui vengono divise le galassie, lo spettro viene calcolato integrando in  $z$ , definendo così una serie di piani perpendicolari alla linea di vista. Per questa sua caratteristica, che permette di avere una visione tridimensionale della struttura a grande scala del cosmo, il procedimento viene detto “tomografico”. Le correlazioni che si ottengono possono essere sia tra intervalli diversi ( $C_{ij}$ ) che nello stesso intervallo ( $C_{ii}$ ). Per un numero di intervalli pari a  $m$ , si ha così  $m(m - 1)/2$  spettri di potenza.

Attualmente il numero di intervalli di redshift fotometrico in cui si suddivide la distribuzione delle galassie è limitato a  $m \sim 5$ , ma nelle *surveys* future (Euclid), grazie all’aumento del numero di galassie osservate, si potrebbe arrivare fino a  $m = 10$  (Mezzetti et al., 2012). Anche se la suddivisione del campione in un numero maggiore di intervalli determina una maggiore quantità d’informazione, si deve tener conto di due fattori limitanti, descritti da Hu, 1999. Il primo è il rumore poissoniano (dovuto all’ellitticità intrinseca delle galassie): il numero di galassie per intervallo non deve essere talmente piccolo da permettere che il rumore prevalga sul segnale. Il secondo fattore è la dipendenza del segnale di *lensing* del campione dal redshift: se il segnale non varia significativamente in funzione del redshift, la divisione delle galassie in più intervalli non apporta nuove informazioni.

Basandoci su Mezzetti et al., 2012, che assume un universo piatto ( $f_k(\chi) = \chi$ ), definiamo una “funzione finestra”  $W$  in modo da riscrivere l’equazione dello spettro (3.16) come

$$C_{ij}(l) = H_0^4 \int_0^\tau du W_i(u) W_j(u) P_\delta(l/u, u) . \quad (3.28)$$

In questo caso la variabile d’integrazione non è la distanza comovente come nell’eq. (3.16), ma  $u = \tau_0 - \tau$ . Il tempo conforme  $\tau$  è legato al tempo cosmico tramite la relazione:  $d\tau = c dt/a(t)$  e lungo il cono di luce ( $ds^2 = 0$ ) coincide con la distanza comovente.  $\tau_0$  è l’età conforme dell’universo. Notiamo che nella relazione (3.16) la possibilità di suddividere il campione di galassie in intervalli era stata già supposta implicitamente; infatti, avevamo parlato di “due campioni di galassie”,  $i$  e  $j$ , e di due efficienze delle lenti,  $g_i$  e  $g_j$ . Nel semplice caso di *shear* 2-dimensionale, ovvero senza la suddivisione del campione, si pone  $i = j$  e si calcola un solo spettro di potenza.

Possiamo immaginare gli intervalli di redshift come delle corone sferiche concentriche definite in funzione del redshift. La loro ampiezza viene scelta in modo tale da avere lo stesso numero (pesato) di galassie in ogni intervallo. Per questo, occorre

conoscere la distribuzione del campione totale di galassie  $N$  in funzione dell'angolo solido e del redshift che è legata alla distribuzione in funzione della distanza comovente:  $n(z)dz = p(\chi)d\chi$ . Normalmente la si parametrizza nella seguente forma:

$$n(z) = \frac{d^2N}{d\Omega dz} = C \left( \frac{z}{z_0} \right)^A e^{-\left(\frac{z}{z_0}\right)^B} \quad \text{dove} \quad C = \frac{B}{z_0 \Gamma\left(\frac{A+1}{B}\right)} \quad (3.29)$$

e  $\Gamma$  denota la funzione gamma di Eulero. In letteratura vengono usati i valori  $A = 2$  e  $B = 1.5$ , che danno  $C = 1.5/z_0$ . Il redshift caratteristico  $z_0$  è una frazione del redshift mediano  $z_m$  del campione di galassie. Dato che i redshift misurati sono fotometrici, vanno applicate delle correzioni. Per stimare il valore vero del redshift delle sorgenti nell'intervallo  $i$ -esimo si definisce così il filtro

$$\Pi_i(z) = \int_{z_{f,i}}^{z_{f,i+1}} dz' \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(z)} \exp\left(-\frac{(z-z')^2}{2\sigma^2(z)}\right). \quad (3.30)$$

I redshift fotometrici  $z_{f,i}$  e  $z_{f,i+1}$  delimitano l'intervallo  $i$ -esimo. L'integrando è la funzione di densità di probabilità del redshift fotometrico che si assume gaussiana con  $\sigma(z) = c(1+z)$  ( $c = 0.01 - 0.05$  nelle *surveys*). La distribuzione delle galassie in un singolo intervallo in funzione del redshift sarebbe quindi

$$D_i(z) = n(z) \Pi_i(z). \quad (3.31)$$

Per normalizzarla a 1 si definisce:

$$n_i(z) = \frac{D_i(z)}{\int_0^\infty D_i(z') dz'}. \quad (3.32)$$

Nel caso di *shear* tomografico, l'efficienza delle lenti (3.6) assume così la forma:

$$g_i(z) = \int_{\Delta z_i} dz' n_i(z') \left(1 - \frac{u(z)}{u(z')}\right). \quad (3.33)$$

L'integrale è esteso lungo l'intervallo di redshift del singolo intervallo. Le immagini delle galassie contenute in un intervallo possono essere distorte da quelle contenute negli intervalli con  $z$  minore. Il termine tra parentesi nell'eq.(3.33) deve quindi essere posto uguale a zero se è negativo, giacchè il *lensing* non può essere causato da lenti che si trovano a distanza maggiore delle sorgenti. Come si può osservare nel grafico a sinistra della figura 4.2, aumentando il numero di intervalli aumenta anche la sovrapposizione tra le  $g_i(z)$ . Alcune parti della struttura a grande scala dell'universo contribuiscono a tutti gli spettri di potenza tomografici, pur essendo pesati in maniera diversa dalle galassie nei diversi intervalli. Perciò gli spettri di potenza che si ottengono non sono indipendenti. Gli errori associati alla

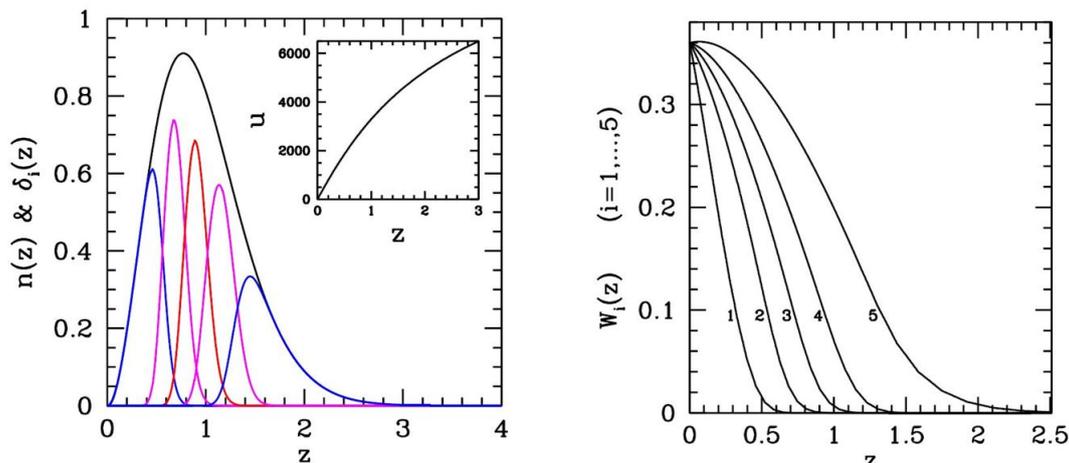


Figura 3.3: A sinistra:  $n(z)$  e  $g_i(z)$  nel caso di 5 bins e  $z_m = 0.9$ . Nel riquadro: la relazione  $z-u$  ( $u$  in Mpc) per un universo piatto con  $\Omega_m = 0.24$  e  $H_0 = 73$  (km/s)/Mpc. A destra: le funzioni finestra che si ottengono in questo caso. (Fonte: Mezzetti e al., 2012)

determinazione del redshift fotometrico possono aumentare la correlazione. Infine, la funzione finestra assume la forma

$$W_i(z) = \frac{3}{2} \Omega_m g_i(z) (1+z) \quad (3.34)$$

che può essere ottenuta dal confronto tra le equazioni (3.16) e (3.28), applicando la relazione (1.8). Notiamo che la  $W_i$  ricavata non è funzione di  $u$ , ma dell'osservabile  $z$ ; la relazione tra queste due quantità dipende poi dal modello cosmologico.

### 3.4.2 3D shear

In questa sezione presentiamo brevemente il metodo del 3D *shear*. L'idea su cui si basa è che  $\gamma$  è un campo tridimensionale e che possiamo ricostruirlo se, oltre alla posizione angolare, conosciamo anche il redshift delle galassie osservate. Le galassie ovvero le ellitticità misurate rappresentano infatti un campionamento discreto del campo che è senz'altro affetto da un grande rumore. Il 3D *shear* non divide la galassie in intervalli di redshift fotometrico, ma usa ogni galassia individualmente. In questo modo si sfrutta appieno la misura del redshift che permette di determinare la posizione della galassia lungo la linea di vista, seppur vi è associata un'incertezza. Il campo di *shear* viene rappresentato nello spazio delle armoniche sferiche, che è l'analogo dello spazio di Fourier in coordinate sferiche. Rispetto allo spettro di potenza tomografico che dipendeva solo dalla variabile bidimensionale

angolare  $\mathbf{l}$  (ovvero dal suo modulo), in questo caso si aggiunge un numero d'onda radiale (lungo la linea di vista)  $k$ .

Lo stimatore del campo di  $\gamma$  tridimensionale assume la forma (Heymans et al., 2013):

$$\gamma_i(k, l) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_g \epsilon_{g,i} j_l(kr_g) e^{-i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\theta}_g} V(r_g) \quad (3.35)$$

dove la somma si estende sulle galassie  $g$  le cui coordinate sono  $(\boldsymbol{\theta}_g, r_g)$ , mentre  $\epsilon_{g,i}$  è la componente  $i$  (una delle due componenti) dell'ellitticità. La somma è pesata dalla funzione sferica di Bessel di prima specie<sup>3</sup> di ordine  $l$ ,  $j_l(kr_g)$ , e dalla funzione peso arbitraria  $V(r_g)$ . Va notato che  $r_g$  è una distanza, non un redshift, perciò la sua assunzione richiede un'ipotesi sul modello cosmologico. L'eq. (3.35) può essere calcolata direttamente dai dati; considerando la parte reale ed immaginaria dello *shear* e dell'esponenziale presente nella somma si ottengono quattro componenti. Naturalmente, per tener conto della PSF e dell'allineamento intrinseco vanno applicate delle correzioni ai dati; è anche possibile operare una suddivisione in E-mode e B-mode (vedi Heymans et al., 2013). Tuttavia, a differenza delle tecniche di *shear* 2D e tomografico, nel procedimento di 3D *shear* il valore di aspettazione dello stimatore ( $\gamma_i$ ) è nullo.

Le informazioni cosmologiche sono contenute nella covarianza che è legata allo spettro di potenza dello *shear* e dipende quadraticamente da  $\gamma$ . Per i dettagli sul suo calcolo che esula dal contesto di questo lavoro di tesi si veda Heavens, 2003 e Heymans et al., 2013. Una delle caratteristiche del 3D *shear* è che la covarianza si può calcolare analiticamente, evitando di ricorrere alle simulazioni. Un altro pregio è la possibilità di controllare le scale in maniera rigorosa. Infatti, dato che non si proietta lungo piani perpendicolari la linea di vista, i numeri d'onda  $k$  non vengono mescolati e possono essere trattati indipendentemente dai  $l$ . Di conseguenza, è possibile effettuare dei tagli in  $k$  per eliminare le regioni problematiche, ovvero le piccole scale dove le fluttuazioni sono non lineari e si manifesta l'effetto dei barioni.

La tecnica di analisi basata sul 3D *shear* è stata presentata per la prima volta da Heavens, 2003. L'articolo presta particolare attenzione a un aspetto promettente di questa tecnica: l'aumento della precisione con cui si può misurare l'equazione di stato dell'energia oscura. Considerando la distanza lungo la linea di vista di ogni galassia separatamente, andiamo a studiare più in dettaglio proprio la direzione in cui è più facile "osservare" l'energia oscura, dato che influisce sull'andamento dell'espansione del cosmo.

---

<sup>3</sup>La funzione sferica di Bessel di prima specie è rappresentata da  $j_\mu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\mu+1/2}(z)$ .

# 4 Risultati recenti e sviluppi futuri

## 4.1 Perchè fare cosmologia con lo *shear*?

Nel capitolo precedente abbiamo discusso i problemi legati alla misura dello *shear* cosmico, come anche la possibilità di ricavarne delle stime dei parametri cosmologici. Tuttavia, negli ultimi due decenni la cosmologia osservativa ha visto il moltiplicarsi di metodi che hanno portato a nuove scoperte e a misure di grandi precisione, come le Supernovae di tipo Ia o il fondo cosmico a microonde (CMB - *cosmic microwave background*), oltre a campagne di osservazione che coprono aree di cielo sempre maggiori e più profonde. Quindi crediamo sia lecito domandarsi perchè dovremmo cercare di risolvere le questioni cosmologiche usando lo *shear* cosmico. Basandoci su Schneider, 2006b, elenchiamo alcune possibili risposte.

- La misura dello *shear* cosmico è l'unica maniera di studiare la distribuzione di materia oscura senza dover fare delle assunzioni sulla sua relazione con la materia barionica.
- Associata ai dati del CMB, permette di rompere la degenerazione tra i parametri e aumenta la precisione delle stime.
- Lo *shear* cosmico comprende redshift molto minori ( $z \leq 2$  circa) e scale fisiche assai più piccole di quelle del CMB e studia la distribuzione di massa e il suo spettro di potenza nel regime non lineare. In combinazione con il CMB, permette di tracciare l'evoluzione dello spettro e verificare la validità dei modelli che descrivono la formazione delle strutture nel cosmo.
- I redshift medio-bassi sono anche quelli a cui è più facile studiare l'equazione di stato dell'energia oscura (nell'epoca da cui origina lo CMB l'energia oscura non era dominante). Lo *shear* cosmico è uno dei pochi modi empirici di indagare sulla sua natura.

- Infine, lo *shear* cosmico permette di fare un test del modello cosmologico e delle eventuali modifiche in maniera completamente indipendente e di verificare la validità dei risultati ottenuti con le altre osservazioni.

Dalle prime osservazioni di quindici anni fa, lo *shear* cosmico è stato osservato in numerose *surveys* con diversi telescopi, tra l'altro anche con lo Hubble Space Telescope. Sorpassate le iniziali difficoltà relative specialmente alla misura della distribuzione in redshift delle galassie, le *surveys* recenti sono caratterizzate da una solida descrizione degli errori sistematici che permettono di ottenere stime sui parametri cosmologici confrontabili con quelle delle altre tecniche. Con l'aumentare della precisione delle misure, si è resa evidente anche la necessità di capire le incertezze sistematiche di origine astrofisica; il campo di ricerca legato all'allineamento intrinseco è in espansione. Per una rassegna dei risultati ottenuti nelle *surveys* passate si raccomanda l'articolo di rassegna di Kilbinger, 2014 e la bibliografia ivi citata. In questo capitolo ci concentreremo sui risultati più recenti, ottenuti dal gruppo di ricerca CFHTLenS, e sulle previsioni sui progetti futuri, in particolare sulla missione Euclid.

## 4.2 CFHTLenS

Attualmente, il più grande set di dati sullo *shear* cosmico è quello di CFHTLenS, dove l'acronimo sta per *Canada-France-Hawaii Telescope Lensing Survey*<sup>1</sup>. Questa *survey* si basa sulle immagini ottenute con il telescopio CFHT durante una precedente campagna di osservazione, la CFHTLS-Wide (*CFHT Legacy Survey - Wide*), analizzandole - come precisato da Erben et al., 2012 - con il fine specifico di ottenere un campione di misure dello *shear* ottimale. Le osservazioni, condotte tra il 2003 e il 2008 alle Hawaii, hanno coperto 154 gradi<sup>2</sup>, divisi in quattro diverse aree, usando cinque filtri con lunghezza d'onda nell'ottico (lo *shear* era già stato misurato in precedenza con il CFHT, ma con un singolo filtro passabanda). L'uso di più filtri permette di stimare il redshift fotometrico con maggiore precisione; i redshift fotometrici ottenuti sono stati anche calibrati usando un campione di redshift spettroscopici. Le galassie si estendono tra  $0.2 < z < 1.3$ , con un redshift mediano  $z_m = 0.70$ .

Il processo di costruzione del catalogo di dati - la combinazione delle immagini ottenute con diversi filtri, la classificazione degli oggetti osservati in stelle o galassie, la calibrazione della PSF - sono descritti in cinque articoli pubblicati dal gruppo di ricerca di CFHTLenS nel 2012. Particolare importanza è stata data alla misura

---

<sup>1</sup><http://www.cfhtlens.org>

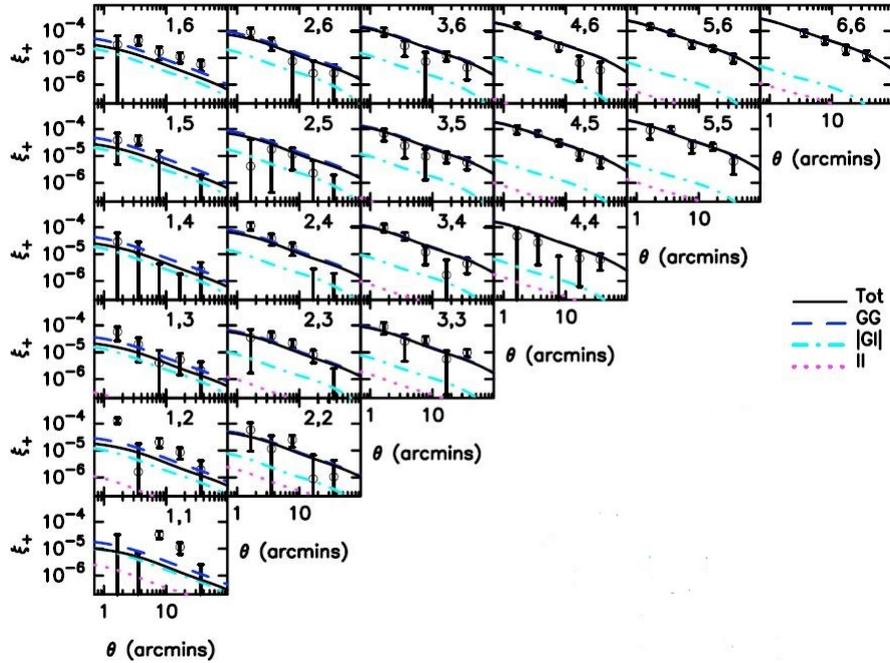


Figura 4.1: La funzione di correlazione a due punti  $\hat{\xi}_+^{ij}(\theta)$  stimata da Heymans et al., 2013. Le coppie di numeri  $i, j$  indicano gli intervalli tomografici usati nel calcolo, mentre le linee illustrano le previsioni teoriche per i vari contributi.

dell'ellitticit  delle galassie, effettuata con nuovi algoritmi. Dall'insieme delle immagini ottenute, il 25%   stato scartato perch  non soddisfacente i criteri imposti per un'accurata misura dello *shear* (a causa di un'elevata correlazione tra le galassie e le stelle indicante qualche anomalia della PSF) e la bont  delle restanti   stata valutata con test e simulazioni. Il catalogo di dati cos  ottenuto   accessibile dalla pagina web di CFHTLenS e comprende ben 4.2 milioni di galassie; si tratta del primo catalogo di dati di *shear* cosmico disponibile pubblicamente. Diversi articoli di ricerca si basano su questi dati, analizzandoli con tecniche differenti.

Nel seguito presentiamo i tre articoli che abbiamo giudicato pi  rilevanti, in particolare per la variet  dei metodi usati. Anticipiamo che tutte le stime dei parametri cosmologici riportate dalle diverse pubblicazioni sono compatibili tra loro.

**Heymans et al., 2013** (in seguito abbreviato in He13) usano il procedimento tomografico dividendo il campione di galassie in sei intervalli fotometrici. Dato che calcolano la funzione di correlazione a due punti dello *shear*, il campione viene diviso anche in cinque intervalli in funzione della posizione angolare  $\theta$ . Tenendo conto delle due componenti  $\xi_+$  e  $\xi_-$  della funzione di correlazione e visto che il numero di possibili combinazioni tra i sei intervalli fotometrici   pari a 21, vengono

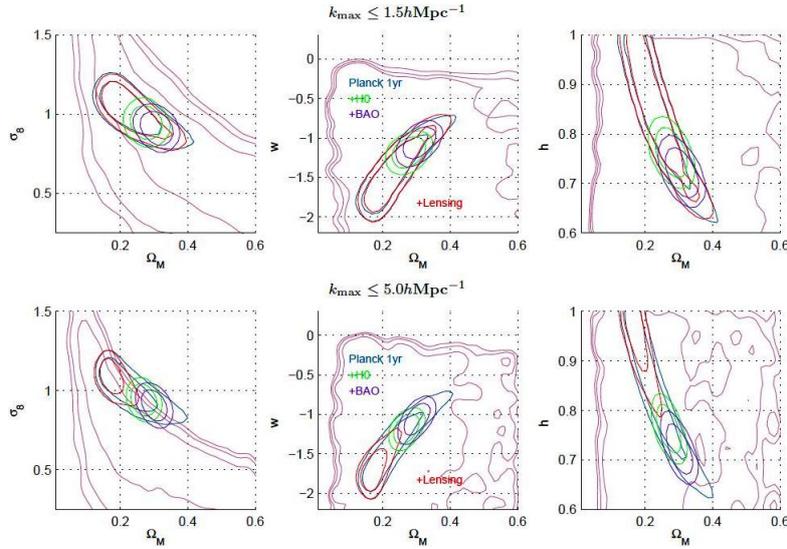


Figura 4.2: Combinazione dei dati di Planck con quelli del *lensing* 3D (linee rosse) in confronto con la combinazione con la statistica del *galaxy clustering* (linee viola) e il valore di  $H_0$  (linee verdi). Le linee indicano le regioni di confidenza a 1 e 2  $\sigma$ ; quelle rosa sono le regioni di confidenza per il solo *lensing*. Sono riportati i risultati per i due diversi tagli in  $k$ . (Fonte: Kitching et al., 2015)

calcolate in totale  $5 \times 2 \times 21 = 210$  stime di  $\xi_{\pm, i, j}$ .

Il problema dell'allineamento intrinseco è studiato applicando un modello che descrive sia il contributo  $II$  che quello  $GI$  con un solo parametro,  $A$ , che viene stimato insieme agli altri parametri cosmologici.  $A$  è l'ampiezza della funzione  $F(z)$  che collega lo spettro di potenza di  $II$  e  $GI$  con lo spettro di potenza delle fluttuazioni ( $P_{II}(k, z) = F(z)^2 P_{\delta}(k, z)$  e similmente per  $GI$ ). Il grafico in figura 4.1 riporta le stime di  $\xi_{+}^{ij}(\theta)$ , ordinate in modo che gli intervalli di redshift crescano da sinistra verso destra ( $i$ ) e dal basso verso l'alto ( $j$ ). Le linee solide rappresentano le previsioni teoriche che si basano sui dati relativi al CMB (ottenuti dall'esperimento WMAP7). Sono in buon accordo con i dati, i cui errori sono stati calcolati usando delle simulazioni  $N$ -body, eccetto che nel primo intervallo, quello a basso redshift. Sono mostrate anche le curve dei singoli contributi:  $II$ ,  $GI$  (in modulo, dato che è negativo) e  $GG$  (*shear* - *shear* ovvero del tipo  $\langle \gamma_i \gamma_j \rangle$ ).

He13 trovano che l'allineamento intrinseco dipende dal tipo di galassie: mentre  $A$  è compatibile con 0 nelle galassie spirali e irregolari, indicando l'assenza di IA per questi tipi di galassie, non lo è nelle galassie ellittiche ovvero *early type*. Ciò potrebbe indicare che la formazione dei diversi tipi di galassie è governata da meccanismi differenti.

**Fu et al., 2014** applicano diversi stimatori di secondo e terz'ordine ai dati. In particolare, derivano la funzione di correlazione di terzo ordine. Il calcolo si basa su triplette di galassie le cui posizioni formano i vertici di un triangolo. In analogia con  $C_{ij}$  viene definito il bispettro di potenza della convergenza  $B_\kappa$ :

$$\langle \tilde{\kappa}(\mathbf{l}_1) \tilde{\kappa}(\mathbf{l}_2) \tilde{\kappa}(\mathbf{l}_3) \rangle = (2\pi)^2 \delta_D(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3) [B_\kappa(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) + B_\kappa(\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3) + B_\kappa(\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1)] . \quad (4.1)$$

Il bispettro  $B_\kappa$  è collegato al bispettro di potenza delle fluttuazioni tramite un'equazione simile a quella per  $C_{ij}$ . Tuttavia, come viene osservato nell'articolo, ancora non esistono modelli sufficientemente accurati per predire il bispettro delle fluttuazioni e analizzare gli errori sistematici di origine astrofisica per la statistica di terz'ordine. Comunque, combinando le statistiche di secondo e terzo ordine, Fu et al., 2014, riescono ad aumentare la precisione della stima di  $\Sigma_8 = \sigma_8(\Omega_m/0.27)^\alpha$  del 10% (riducono l'area dell'ellissi di probabilità nel piano  $\Omega_m - \sigma_8$ ). Ciò è dovuto principalmente al fatto che il bispettro dipende da una combinazione dei parametri  $\sigma_8$  e  $\Omega_m$  differente rispetto allo spettro di potenza. Di conseguenza, la combinazione del bispettro con lo spettro aiuta a rompere la degenerazione tra  $\sigma_8$  e  $\Omega_m$ .

In **Kitching et al., 2015** (Ki15), la tecnica di 3D *shear* viene applicata per la prima volta a una *survey* a larga scala (*wide field*). Integrando lo spettro di potenza tridimensionale vengono ricavati, tramite l'applicazione di una serie di approssimazioni, anche lo spettro tomografico e bidimensionale. Basandosi sui risultati di He13, Ki15 decidono di escludere dall'analisi tutte le galassie *early-type*.

Per quel che riguarda lo spettro di potenza tridimensionale, Ki15 effettuano due diversi tagli nel numero d'onda radiale  $k$ . Ponendo  $k_{max} \leq 1.5h \text{ Mpc}^{-1}$ , escludono le scale alle quali lo spettro diventa altamente non lineare. Aumentando la scala fino a  $k_{max} \leq 5.0h \text{ Mpc}^{-1}$ , le regioni di confidenza a 1 e 2  $\sigma$  nel piano  $\Omega_m - \sigma_8$  vengono spostate verso valori di  $\sigma_8$  minori. Ciò si può osservare confrontando i due grafici a sinistra nella figura 4.2, dove le linee rosa indicano le regioni di confidenza per i dati di 3D *shear*, assumendo un modello  $\Lambda$ CDM (universo piatto con parametro di stato dell'energia oscura variabile). La diminuzione del valore di  $\sigma_8$  stimato al crescere di  $k_{max}$  va attribuita con grande probabilità all'effetto dei barioni sullo spettro di potenza. Infatti, modellando quest'ultimo in modo da tener conto dell'effetto dei barioni, aumenta la concordanza tra i valori trovati usando i due range differenti per  $k$ . Tuttavia, come precisato da Ki15, i dati di cui dispongono non permettono di escludere le altre possibili spiegazioni (per esempio, l'assunzione  $w = -1$  potrebbe non valere, oppure si potrebbe supporre l'esistenza di un tipo di materia oscura non fredda).

Confrontando le stime dei parametri cosmologici ottenute con la tecnica del 3D *shear* con quelle in precedenza ricavate da CFHTLenS, si osserva che i parametri  $\sigma_8$  e  $\Omega_m$  vengono stimati con maggiore precisione con il procedimento tomografico e 2D, mentre per altri, come  $w$ , il livello di confidenza osservato è simile. Questo indica che, seppur la proiezione dello spettro di potenza in due dimensioni causa una perdita di informazioni, l'inclusione delle piccole scale (corrispondente a  $k$  elevati) nell'analisi tomografica e 2D fa diminuire l'errore sulla stima dei parametri che dipendono dall'ampiezza dello spettro.

Riportiamo le stime dei parametri calcolate da Heymans et al., che sono quelle con maggiore precisione:

$$\begin{aligned}\sigma_8 &= 0.799 \pm 0.015 & (\Lambda\text{CDM}) \\ \Omega_m &= 0.271 \pm 0.010 & (\Lambda\text{CDM}) \\ w &= -1.02 \pm 0.09 & (\text{wCDM}).\end{aligned}$$

I valori riportati sono stati ottenuti combinando i dati di *shear* con quelli del CMB (esperimento WMAP7), della statistica del *galaxy clustering*<sup>2</sup> (esperimento BOSS) e con il valore di  $h$  derivante dalla misura delle scale di distanza effettuata con l'Hubble Space Telescope. Combinando i dati di CFHTLenS con gli esperimenti che studiano il CMB (WMAP e Planck), si riesce ad aumentare significativamente i limiti sui parametri  $\sigma_8$ ,  $\Omega_m$  e  $w$ , come si può osservare anche nella figura 4.2.

### 4.2.1 Confronto con i dati di Planck

Alcune delle stime ottenute dalla missione Planck sono in tensione con i risultati di CFHTLenS. Planck<sup>3</sup> è un satellite della ESA, l'agenzia spaziale europea, che studia le anisotropie di temperatura e di polarizzazione del fondo cosmico a microonde con la maggiore precisione finora.<sup>4</sup> In generale, come notato da Kilbinger, 2014, i valori di  $\sigma_8$  e  $\Omega_m$  ottenuti dallo studio del CMB risultano più grandi di quelli derivati dalle altre osservazioni cosmologiche. La figura 4.3 offre un confronto tra le regioni di confidenza a 1 e 2  $\sigma$  nel piano  $\sigma_8 - \Omega_m$  di Planck Col., 2015, (linee nere) e quelli di *shear* cosmico di Heymans et al., 2013, combinati con i dati sul *galaxy clustering*. La sovrapposizione tra le due regioni è molto piccola; le stime risultano compatibili appena entro i due  $\sigma$ . La posizione della regione di confidenza ottenuta

<sup>2</sup>Il termine *galaxy clustering* si riferisce allo studio della distribuzione tridimensionale delle galassie tramite la misura della loro posizione angolare e del redshift. Nello spettro di potenza delle galassie si può osservare la presenza di oscillazioni (le cosiddette BAO - oscillazioni acustiche barioniche).

<sup>3</sup><http://www.esa.int/Planck>

<sup>4</sup>Planck studia anche il *lensing* nel CMB; le stime dei parametri cosmologici che ne derivano hanno precisione minore di quelle relative alle anisotropie.

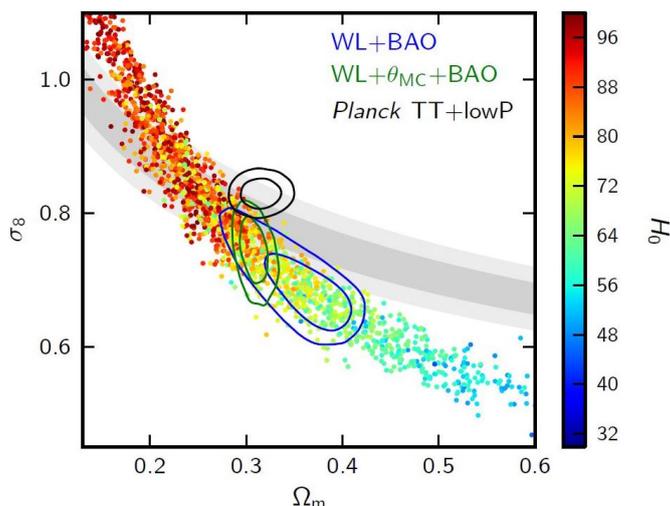


Figura 4.3: Punti nel piano  $\Omega_m - \sigma_8$  al variare di  $H_0$  per i dati di He13. Le linee blu e verdi indicano le regioni di confidenza per i dati di *shear* combinati con la statistica del *galaxy clustering* e con il vincolo di Planck sulla scala acustica angolare del CMB, quelle nere per i soli dati sulle anisotropie del CMB di Planck. L'area grigia è la regione di confidenza ricavata dallo studio del *lensing* nel CMB di Planck. (Fonte: Planck Collaboration, 2015)

dalla misura dello *shear* cosmico cambia in funzione del valore del parametro  $h$  che si adotta per calcolare la funzione di distribuzione di probabilità marginale per  $\sigma_8 - \Omega_m$ . Perciò, nella figura 4.3 sono riportati i punti nel piano di questi due parametri per valori di  $h$  che variano tra 0.3 e 1 circa. Minore è  $H_0$ , minore è  $\sigma_8$  e maggiore è  $\Omega_m$ .

Anche se non chiaramente visibile nella figura, i contorni di confidenza dello *shear* sono generalmente ortogonali a quelli del CMB, a causa della differente dipendenza di questo fenomeno da  $\sigma_8$  e  $\Omega_m$ . La compatibilità delle due misure, così diverse tra loro, ci darebbe quindi un'importante conferma della fondatezza del modello cosmologico.

Dai dati di He13 sono state scartate le galassie *early-type* e si è imposto un limite inferiore nella scala angolare ( $\theta < 0.3'$ ) al momento di calcolare la funzione di correlazione a due punti nei due intervalli tomografici di redshift minore. Tuttavia, nell'articolo viene osservato che pur con questo taglio non è possibile escludere completamente l'effetto dei barioni sullo spettro di potenza non lineare da cui dipende lo *shear*. I risultati di Kitching et al., 2015, per  $\sigma_8$  e  $\Omega_m$  sono consistenti con quelli di Planck quando si considera il taglio  $k_{max} = 1.5h \text{ Mpc}^{-1}$ , ma cominciano a mostrarsi discrepanze quando  $k_{max}$  aumenta (l'effetto si nota anche nel grafico

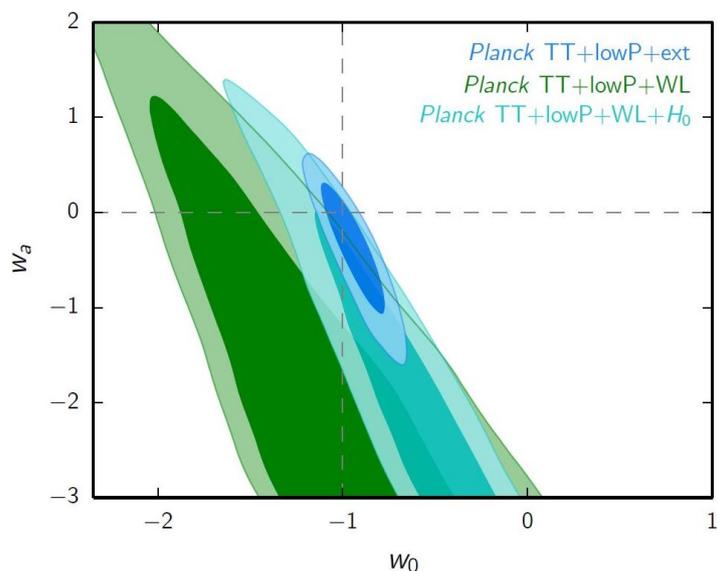


Figura 4.4: Regioni di confidenza nel piano  $w_0 - w_a$  per i dati di Planck (in blu), combinati con quelli dello *shear* cosmico (in verde) e con l'aggiunta della condizione a priori su  $H_0$  (in azzurro). (Fonte: Planck Col., 2015)

in basso a sinistra in figura 4.2). Come già accennato, potrebbe trattarsi del contributo barionico che (ancora) non riusciamo a modellare bene. Ma anche pensare di rendere compatibili i risultati di CFHTLenS con quelli di Planck semplicemente effettuando dei tagli nelle scale angolari o nel numero d'onda non è una buona idea. Infatti, in questo modo si perderebbero molte delle informazioni che può offrirci lo studio dello *shear* cosmico e, piuttosto che determinare uno spostamento delle regioni di confidenza nel piano  $\Omega_m - \sigma_8$ , se ne aumenterebbe l'area.

Anche se i risultati di Planck hanno una grande precisione, dobbiamo tener conto del fatto che sono ricavati da misure ad alto redshift. I valori di  $\sigma_8$  e  $\Omega_m$  vengono successivamente estrapolati a basso  $z$ , basandosi sull'assunzione di un specifico modello cosmologico, il  $\Lambda$ CDM. Quindi, piuttosto che a errori nelle misure di uno dei due gruppi di ricerca, le discrepanze potrebbero essere dovute a qualche assunzione non esatta nel modello cosmologico. Ad esempio, una delle soluzioni proposte è basata sul contributo di neutrini con massa non nulla. Questo particolare tipo di materia oscura non fredda non influenzerebbe significativamente le anisotropie del fondo cosmico a microonde, ma smorzerebbe la crescita delle strutture a redshift bassi, modificando lo spettro di potenza proprio nelle scale che più riguardano lo *shear* cosmico. Anche in questo caso, non siamo ancora in grado di giudicare se delle modifiche del modello  $\Lambda$ CDM siano effettivamente necessarie o no. I dati di Planck sono in buon accordo con il modello, mentre quelli di *shear* devono ancora

raggiungere una precisione tale da poter discernere tra il solo effetto dei barioni e la possibile esistenza dei neutrini massicci.

Per aumentarne la significatività, Planck Collaboration, 2015, combina la stima del parametro di stato di energia oscura ottenuta dallo studio delle anisotropie del CMB con quella di Heymans et al., 2014. Mentre il valore ricavato da Planck è compatibile con  $w = -1$ , la combinazione dei due metodi fornisce un risultato diverso. I contorni di confidenza nel piano  $w_0 - w_a$  vengono spostati verso il cosiddetto “dominio fantasma” (*phantom domain*) dove  $w < -1$ . Nella figura 4.4 si vede come i dati di Planck combinati con quelli di He13 differiscono da  $w_0 = -1$ ,  $w_a = 0$  per più di  $2\sigma$  e sono perciò in discrepanza con il modello  $\Lambda$ CDM. In Planck Col., 2015, cercano di trovare una soluzione al problema osservando che la stima dipende dal valore del parametro di Hubble. Infatti, la combinazione Planck+CFHTLenS favorisce un valore di  $H_0$  più elevato di quello usato nell’analisi di Planck. Quando alla combinazione dei due set di dati si aggiunge la condizione a priori  $H_0 = 70.6 \pm 3.3$  km/(s Mpc) (ottenuta dalla misura della scala delle distanze con le cefeidi), i contorni (in azzurro) vengono spostati verso  $w = -1$ . Tuttavia, il problema della tensione tra i risultati di Planck e CFHTLenS potrà essere risolto, probabilmente, solo quando saranno disponibili i dati delle *survey* di prossima generazione.

Attualmente sono in corso diverse *survey* che usano come strumento di ricerca il *weak lensing*. Una di queste, la *Dark Energy Survey*<sup>5</sup> (DES) ha recentemente pubblicato i primi risultati. L’articolo della DES Col., 2015, presenta delle stime dei parametri  $\sigma_8$  e  $\Omega_m$  compatibili sia con CFHTLenS che con Planck. Si basa però solo su dei dati preliminari (*Science Verification*) che ancora non raggiungono la precisione richiesta; le incertezze, infatti, sono maggiori di quelle di CFHTLenS del 30%. L’area considerata per queste prime analisi comprende solo il 3% dei ben 5000 gradi<sup>2</sup> che DES spazierà nei cinque anni di osservazione, iniziati nel 2013.

## 4.3 Euclid

Nel 2012, l’agenzia spaziale europea ha dato il via alla fase di costruzione di Euclid<sup>6</sup>, un satellite il cui lancio è previsto per il 2020. L’obiettivo scientifico principale della missione di Euclid è capire la natura dell’energia oscura e della materia oscura tramite lo studio dei fenomeni di *lensing* e di *galaxy clustering*. Come descritto nel

---

<sup>5</sup><http://www.darkenergysurvey.org/>

<sup>6</sup><http://sci.esa.int/euclid/>

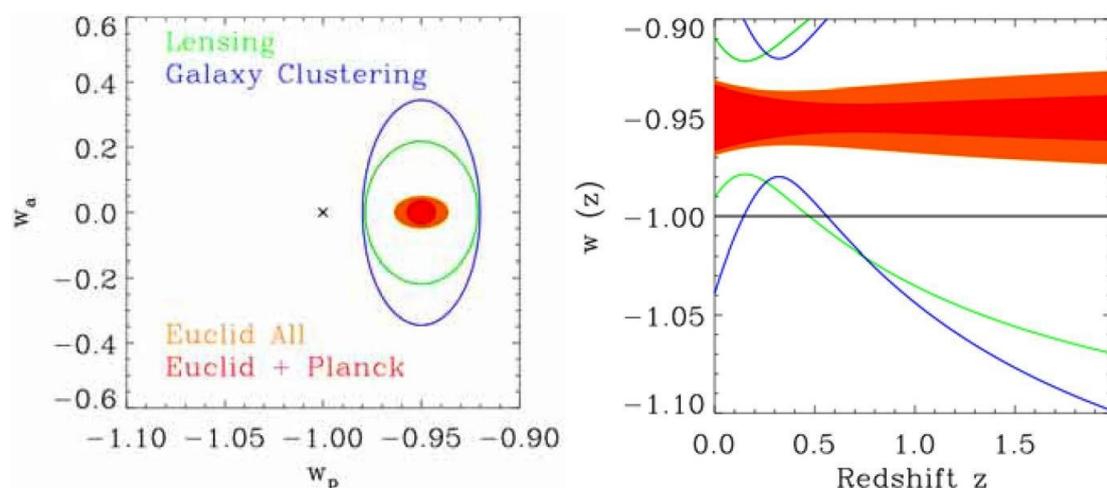


Figura 4.5: Illustrazione dei limiti che Euclid potrà imporre sul parametro di stato dell'energia oscura (in verde per i soli dati di *shear* cosmico). A sinistra: linee di confidenza del 68% nel piano  $w_p - w_a$ . A destra: limiti a  $1\sigma$  per la funzione  $w(z)$ , parametrizzata da  $(w_p, w_a)$ , in funzione del redshift. (Fonte: Laureijs et al., 2011)

*Definition Study Report* di Laureijs et al., 2011, Euclid è progettato in modo da rispondere a quattro questioni chiave che riguardano il modello cosmologico:

1. L'energia oscura è una costante cosmologica o evolve con l'espansione dell'universo?
2. In alternativa, l'espansione accelerata potrebbe indicare che la Relatività Generale cessa di valere a grandi scale o che il principio cosmologico non vale?
3. Cos'è la materia oscura? Qual è la scala di massa dei neutrini e qual è il numero di specie relativistiche presenti nel cosmo?
4. Qual è lo spettro di potenza delle fluttuazioni primordiali? Possono essere descritte da una distribuzione di probabilità gaussiana?

Ma la nostra domanda principale è naturalmente in che modo Euclid riuscirà a rispondere a questi quesiti. La risposta sta nel grandissimo numero di dati che acquisirà con elevata precisione. Nei sei anni di missione, Euclid studierà buona parte (15.000 gradi<sup>2</sup>) del cosiddetto "cielo extragalattico". Osserverà 1.5 miliardi di galassie con redshift fino a  $z \sim 2$  usando un telescopio ad alta risoluzione, paragonabile a quella del Hubble Space Telescope, con lunghezze d'onda nell'intervallo di 550 – 900 nm. La fotometria verrà effettuata con tre filtri nelle frequenze del NIR (infrarosso vicino). Inoltre, Euclid condurrà anche una *survey* spettroscopica di circa 50 milioni di galassie.

L'approvazione del progetto Euclid dimostra la fiducia che gli astrofisici e i cosmologi ripongono nello *shear* cosmico come strumento cosmologico. Combinato con il *galaxy clustering*, lo *shear* cosmico permette di tracciare la crescita della struttura a grande scala dell'universo. Lo studio del *clustering* fornisce lo spettro di potenza della distribuzione delle galassie (visibili), mentre il *lensing* permette di ricostruire lo spettro totale (galassie + materia oscura). Di conseguenza, sarà possibile dedurre la distribuzione della materia oscura. Ognuna delle due tecniche separatamente permette di studiare l'energia oscura e di testare la teoria della gravità a scale cosmologiche. Oltre agli obiettivi primari, Euclid permetterà di indirizzare anche un ampio numero di questioni astrofisiche (p.e. formazione delle stelle, strong lensing).

Euclid è stato disegnato in modo da migliorare per almeno un fattore 10 la nostra conoscenza di tutti gli aspetti del modello cosmologico che sono ancora incerti. Per avere un'idea della sua potenza, basta confrontare la figura 4.4 con il grafico a sinistra nella figura 4.5 che riporta le regioni di confidenza che si prevede di ottenere per il parametro di stato dell'energia oscura  $w(z)$ . Gli errori  $1\sigma$  su  $w_a$  e  $w_p$  sono circa 0.1 e 0.2, rispettivamente. Il parametro  $w_p$  viene usato piuttosto che  $w_0$  per indicare che l'espansione in serie di Taylor può essere effettuata intorno ad un valore di  $a$  diverso da 1. La forma funzionale di  $w(z)$  sarà determinata con la precisione del 1% intorno a  $z \sim 0.5$  (grafico a destra). Con tali risultati, sarà possibile non solo verificare se l'energia oscura è una costante cosmologica, ma anche discernere tra i diversi modelli alternativi usando i dati di Euclid da soli. I limiti miglioreranno ulteriormente combinando i risultati con quelli di Planck.

Il livello di accuratezza e precisione richiesto da Euclid è così alto che anche la minore incertezza sistematica potrà diventare importante. Così, la scelta di costruire un satellite spaziale piuttosto che fare osservazioni da terra è dettata dalla necessità di poter controllare la PSF. Vista l'assenza di perturbazioni atmosferiche, la PSF sarà minore e più stabile. Dall'altro lato, dobbiamo notare che l'*imaging* sarà a banda larga, al contrario, per esempio, di quello di CFHTLenS che usa diversi filtri ottici. L'osservazione a banda larga, cioè di più lunghezze d'onda contemporaneamente, comporta un problema legato alla *color dependence* della PSF (si veda Meyers e Burchat, 2015). Le galassie, infatti, sono caratterizzate da un gradiente di colore: la lunghezza d'onda con cui emettono varia dal centro verso l'esterno. Visto che la PSF dipende dalla lunghezza d'onda, anch'essa varierà in funzione della distanza dal centro della galassia. In sostanza, le immagini delle galassie appariranno distorte in una maniera che dipende dalla combinazione dei due effetti di color dependence della PSF e del gradiente di colore delle galassie, rendendo necessaria la calibrazione delle immagini usando il telescopio HST che dispone di più filtri. In compenso, la fotometria eseguita nel NIR permetterà di

stimare redshift fotometrici fino a  $z$  molto maggiori da quelli accessibili da terra. Lo spettro di potenza dello *shear* verrà misurato con il procedimento tomografico. Le simulazioni presentate da Laureijs et al. indicano che sarà ricostruito con una precisione dell'ordine del  $10^{-7}$ .

Indipendentemente dalle risposte che ci fornirà - sia che confermi il modello  $\Lambda$ CDM o fornisca indizi per uno nuovo - l'ambizioso progetto di Euclid segna il punto di svolta non solo nella misura dello *shear* cosmico, ma anche per la cosmologia osservativa in generale.

# Conclusioni

La possibilità di migliorare la nostra conoscenza sulla natura e l'evoluzione dell'universo, tramite lo studio dello *shear* cosmico, è oggetto di dibattito nell'ambito della ricerca cosmologica. Come abbiamo illustrato in questa tesi, alcuni risultati correnti – che possiamo considerare come preliminari – non mostrano un pieno accordo con quelli di altri metodi, specialmente con i dati derivanti dalla misura del fondo cosmico a microonde. Proprio per questo lo studio dello *shear* cosmico richiede ulteriori approfondimenti, sia nella ricerca dei possibili effetti sistematici, che nell'allargamento dei campioni, e ciò è testimoniato dalle diverse importanti *surveys*, a partire da Euclid, che gli sono attualmente dedicate e dal lavoro dei gruppi associati a questi esperimenti.

Tra alcuni anni disporremo quindi di una più ampia quantità di dati, a un livello di precisione assai superiore rispetto a quello dei progetti di ricerca oggi già conclusi. Ma, al di là della precisione dei segnali ottenibili, un punto focale resta quello del superamento delle diverse incertezze sistematiche già individuate e di altre non ancora approfondite adeguatamente.

E' anche particolarmente significativo che le *surveys* in progetto permetteranno di studiare gli effetti non lineari nell'evoluzione delle strutture cosmiche. Oltre una scala  $k \simeq 2 h \text{ Mpc}^{-1}$  l'evoluzione non lineare è segnata anche da effetti di natura barionica. La ricerca in corso ha ampiamente sviluppato le tecniche per lo studio dell'evoluzione non lineare in questo dominio. Tuttavia, la maggior parte delle analisi si sono svolte nell'ambito del modello standard  $\Lambda\text{CDM}$  e non è del tutto chiaro se l'eventuale scoperta che la natura della materia oscura non risponde pienamente ai canoni del modello possa interferire col modo attuale di studiare questa dinamica.

Lo *shear* cosmico non produce effetti vistosi, ma è senz'altro affascinante per l'intricata eleganza con cui viene generato. Abbiamo visto come per descriverlo dobbiamo estendere la nostra comprensione su piani differenti: l'astrofisica delle galassie, la geometria relativistica dello spaziotempo, la distribuzione e la natura delle componenti materiali, gli effetti derivanti dall'energia oscura. Tutti questi aspetti si

combinano fra loro per dar luogo allo *shear*: la luce s'insinua tra la materia in uno spaziotempo la cui metrica è a sua volta perturbata dalla distribuzione di massa ed energia.

Aldilà delle scoperte alle quali ci potrà condurre, lo studio dello *shear* cosmico conferma un altro elemento sempre presente nell'analisi cosmologica: la trama dell'insieme-cosmo si rivela attraverso le relazioni tra i suoi costituenti, sicché solo una conoscenza totalmente approfondita della fisica e dell'astrofisica delle sue componenti diffuse e degli oggetti cosmici può rendere evidenti i segnali globali che ci permetteranno gradualmente di decrittare passato e futuro dell'universo.

# Bibliografia

- M. Bartelmann: *Gravitational lensing*. Class. Quantum Grav. 27, 233001 (2010) & arXiv:1010.3829 [astro-ph.CO]
- M. Bartelmann e P. Schneider: *Weak gravitational lensing*. Phys. Rept. 340, 291 (2001) & arXiv:astro-ph/9912508
- S. Bonometto: *Cosmologia & cosmologie*. Zanichelli (2008)
- L. Casarini, S. Bonometto, S. Borgani, K. Dolag, G. Murante, M. Mezzetti, L. Tornatore, G. La Vacca: *Tomographic weak lensing shear spectra from large N-body and hydrodynamical simulations*. A&A 542, A126 (2012) & arXiv:1203.5251v2 [astro-ph.CO]
- T. Erben, H. Hildebrandt et al.: *CFHTLenS: The Canada-France-Hawaii Telescope Lensing Survey - Imaging Data and Catalogue Products*. MNRAS 433, 2545 (2013) & arXiv:1210.8156 [astro-ph.CO]
- L. Fu, M. Kilbinger et al.: *CFHTLenS: Cosmological constraints from a combination of cosmic shear two-point and three-point correlations*. MNRAS 441, 2725 (2015) & arXiv:1404.5469 [astro-ph.CO]
- A. Heavens: *3D weak lensing*. MNRAS 343, 1327 (2003) & arXiv:astro-ph/0304151
- C. Heymans, E. Grocutt et al.: *CFHTLenS tomographic weak lensing cosmological parameters constrains: Mitigating the impact of intrinsic galaxy alignments*. MNRAS 432, 2433 (2013) & arXiv:1303.1808 [astro-ph.CO]
- H. Hoekstra e J. Bhuvnesh: *Weak gravitational lensing and its cosmological applications*. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 58, 99 (2008) & arXiv:0805.0139 [astro-ph]
- W. Hu: *Power spectrum tomography with weak lensing*. Astrophys. J. 522, L21 (1999) & arXiv:astro-ph/9904153

- B. Joachimi: *Cosmic shear and the intrinsic alignment of galaxies*. Tesi di dottorato, Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (2010)
- D. Kennefick: *Testing relativity from the 1919 eclipse - a question of bias*. *Physics Today* 62, 37 (2009)
- M. Kilbinger: *Cosmology with cosmic shear observations: a review*. *Rep. Prog. Phys.* 78, 086901 (2015) & arXiv:1411.0115 [astro-ph.CO]
- T.D. Kitching, A.F. Heavens et al.: *3D Cosmic Shear: Cosmology from CFHTLenS*. *MNRAS* 442, 1326 (2014) & arXiv:1401.6842 [astro-ph.CO]
- R. Laureijs et al.: *Euclid - Definition study report*. ESA/SRE 12 (2011) & arXiv:1110.3193 [astro-ph.CO]
- R. Mandelbaum: *Instrumental systematics and weak gravitational lensing*. *Journal of Instrumentation* 10, C05017 (2015) & arXiv:1503.08680 [astro-ph.IM]
- J.E. Meyers, P.R. Burchat: *Impact of chromatic effects on galaxy shape measurements*. *Journal of Instrumentation* 9, C03037 (2015) & arXiv:1402.5101 [astro-ph.CO]
- M. Mezzetti, S. Bonometto, L. Casarini e G. Murante: *Direct recovery of density fluctuation spectra from tomographic shear spectra*. (2012) arXiv:1203.2777v3 [astro-ph.CO]
- M. Moniez: *Review of results from EROS Microlensing search for Massive Compact Objects*. *PoS (idm2008)*, 53 (2008) & arXiv:0901.0985 [astro-ph.GA]
- D. Munshi, P. Valageas, L. Van Waerbeke, A. Heavens: *Cosmology with Weak Lensing Surveys*. *Phys. Rept.* 462, 67 (2008) & arXiv:astro-ph/0612667
- R. Narayan e M. Bartelmann: *Lectures on Gravitational Lensing*. (1997) arXiv:astro-ph/9606001v2
- P. Schneider: *Introduction to Gravitational Lensing and Cosmology* in: C.S. Kochanek, P. Schneider, J. Wambsganss: *Gravitational Lensing: Strong, Weak & Micro. Lecture Notes of the 33rd Saas-Fee Advanced Course*. Springer-Verlag (2006a), pp. 1-89
- P. Schneider: *Weak Gravitational Lensing* in: C.S. Kochanek, P. Schneider, J. Wambsganss: *Gravitational Lensing: Strong, Weak & Micro. Lecture Notes of the 33rd Saas-Fee Advanced Course*. Springer-Verlag (2006b), pp. 269-451
- P. Schneider, L. van Waerbeke, Y. Mellier: *Analysis of two-point statistics of cosmic shear: I. Estimators and covariances*. *Astron.Astrophys.* 396, 1 (2002) & arXiv:astro-ph/0206182

The Dark Energy Survey Collaboration - T. Abbott et al.: *Cosmology from cosmic shear with DES science verification data*. MNRAS (2015) & arXiv:1507.05552 [astro-ph.CO]

The Planck Collaboration - P.A.R. Ade et al.: *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*. A&A (2015) & arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO]

L. van Waerbeke, Y. Mellier: *Gravitational lensing by large scale structures: a review* in: *Gravitational lensing : a unique tool for cosmology - Proceedings of the meeting, Aussois, Jan 2003*. ASP Conference Series, CS-326 (2003) & arXiv:astro-ph/0305089