



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA  
DIPARTIMENTO DI FISICA E GEOLOGIA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN FISICA

STUDIO DEGLI AMMASSI DI GALASSIE  
COME TEST DELLA RELATIVITÀ GENERALE

Relatore Esterno: Chiar.mo Prof. Stefano Borgani  
Relatore Interno: Chiar.mo Prof. Gianluca Grignani  
Correlatori: dott. Barbara Sartoris  
  
Candidato: Lorenzo Pizzuti

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

*Vorrei ringraziare la mia famiglia ed i miei nonni, che mi hanno moralmente ed economicamente sostenuto nel mio percorso di studi,*

*un grazie di cuore a Chiara, che mi ha aiutato in momenti difficili, rimanendomi accanto con la sua infinita dolcezza;*

*un ringraziamento speciale a Stefano e Barbara, che mi hanno permesso di lavorare insieme a loro e di avvicinarmi al meraviglioso mondo della cosmologia.*

# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Dalla Relatività Generale alle equazioni di Friedmann</b> | <b>4</b>  |
| 1.1 La metrica di Friedman-Robertson-Walker . . . . .          | 4         |
| 1.2 Le equazioni di campo Einstein . . . . .                   | 6         |
| 1.2.1 Il Tensore Energia - Impulso . . . . .                   | 7         |
| 1.2.2 Il limite di campo debole . . . . .                      | 9         |
| 1.3 Le equazioni di Friedmann . . . . .                        | 11        |
| <b>2 Perturbazioni cosmologiche</b>                            | <b>20</b> |
| 2.1 Teoria Newtoniana delle perturbazioni lineari . . . . .    | 21        |
| 2.1.1 La scala di Jeans . . . . .                              | 24        |
| 2.1.2 Panoramica sulle soluzioni . . . . .                     | 26        |
| 2.2 Teoria relativistica delle perturbazioni . . . . .         | 30        |
| 2.2.1 La metrica di FLRW perturbata . . . . .                  | 31        |
| 2.2.2 La libertà di Gauge . . . . .                            | 33        |
| 2.3 Regime non lineare: collasso sferico . . . . .             | 36        |
| <b>3 Fenomenologia degli ammassi di galassie</b>               | <b>40</b> |
| 3.1 La struttura degli ammassi di galassie . . . . .           | 41        |
| 3.1.1 Proprietà delle galassie di un ammasso . . . . .         | 43        |
| 3.1.2 Il Mezzo Inter-Amasso . . . . .                          | 45        |
| 3.2 Il progetto CLASH . . . . .                                | 51        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>4</b> | <b>Lensing e Dinamica degli ammassi: profili di massa e potenziali</b>           | <b>57</b>  |
| 4.1      | Dalla deflessione della luce alle equazioni della lente . . . . .                | 58         |
| 4.1.1    | L'indice di rifrazione efficace . . . . .  | 59         |
| 4.1.2    | Mettrica di FLRW perturbata e indice di rifrazione . . . . .                     | 63         |
| 4.1.3    | Indice di rifrazione e angolo di deflessione . . . . .                           | 66         |
| 4.1.4    | L'equazione della lente e l'anello di Einstein . . . . .                         | 70         |
| 4.1.5    | Potenziale di lensing efficace e tensore di magnificazione . . .                 | 73         |
| 4.1.6    | Lensing con gli ammassi di galassie . . . . .                                    | 76         |
| 4.2      | Dinamica delle galassie nell'ammasso . . . . .                                   | 79         |
| 4.2.1    | Collisioni e scale temporali . . . . .   | 80         |
| 4.2.2    | L'equazione di Boltzmann non collisionale . . . . .                              | 82         |
| 4.2.3    | L'equazione di Jeans . . . . .   | 84         |
| <b>5</b> | <b>Calcolo e vincoli su <math>\eta</math> dal confronto dei profili di massa</b> | <b>90</b>  |
| 5.1      | MACS 1206: profili di massa dal lensing e dalla dinamica . . . . .               | 91         |
| 5.2      | Vincoli su $\eta$ . . . . .  | 96         |
| 5.2.1    | Derivazione di $\eta$ dai profili di massa . . . . .                             | 96         |
| 5.2.2    | Implementazione numerica e risultati . . . . .                                   | 98         |
| 5.3      | Discussioni e confronto con precedenti vincoli . . . . .                         | 104        |
| <b>6</b> | <b>Conclusioni</b>   | <b>108</b> |
| <b>A</b> | <b>Richiami di Relatività - notazioni e principi</b>                             | <b>113</b> |
| A.1      | Derivata Covariante e Trasporto Parallelo . . . . .                              | 115        |
| A.2      | Il principio di equivalenza . . . . .  | 116        |
| A.2.1    | Equazione delle geodetiche e parametrizzazione affine . . . .                    | 117        |
| A.3      | la metrica . . . . .   | 119        |

# Introduzione

Lo studio della struttura e dell'evoluzione dell'Universo ha portato, negli ultimi settant'anni, a scoperte rivoluzionarie: le osservazioni sempre più accurate sia su larga ( $>10$  Mpc) che su piccola ( $<1$  Mpc) scala, combinate con altrettanto sofisticati modelli teorici, ci hanno fornito un quadro d'insieme che si può riassumere in quello che viene definito *Modello Cosmologico Standard* (o modello  $\Lambda$ CDM). Secondo tale modello, l'Universo si è formato da una singolarità iniziale, ha subito un periodo di rapida espansione accelerata, definita *inflazione*, al termine della quale ha continuato ad evolversi in base al suo contenuto in materia ed energia; per meglio dire, la sua espansione è stata determinata dalla specie (materia relativistica, materia non relativistica, energia oscura) il cui contributo alla densità totale risultasse dominante in una data epoca. Si assume che l'Universo sia descritto da una metrica di tipo Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) e che obbedisca al principio cosmologico, ovvero appaia omogeneo ed isotropo ad una scala sufficientemente grande (Bondi & Gold -1948[11]). Si assume inoltre che, da una certa epoca in poi, l'Universo sia passato da una fase di espansione decelerata determinata dalla densità di materia, ad una fase di espansione accelerata dominata da un'energia di vuoto la cui densità  $\rho_\Lambda$  rimane costante e non si diluisce con l'espansione stessa.

Le verifiche di questo modello tramite le osservazioni del fondo cosmico di microonde (Planck results 2013, [48], 2015 [49]) e delle supernove di tipo Ia (Reiss et al., [56]) hanno permesso di vincolare i parametri cosmologici definiti dalla teoria, fornendo dei risultati sconcertanti: l'Universo è dominato dalla componente di energia di vuoto (pittorescamente ribattezzata *Energia Oscura*) che ne costituisce circa il 70%, responsabile dell'accelerazione. La materia rappresenta il 30% mentre la radiazione

solo una frazione trascurabile. Sorvolando, per ora, sul problema legato alla natura di questa Energia Oscura, si apre anche un'altra questione. I vincoli sulla frazione di materia barionica, ovvero su tutta la materia descritta dal Modello Standard della fisica delle Particelle, ci portano ad un valore di circa il 4% di contributo alla densità totale, dunque abbiamo il restante 26% di mistero. In aggiunta, lo studio dell'evoluzione delle strutture nell'Universo e le osservazioni di oggetti astrofisici (galassie e ammassi di galassie) mostrano che la materia visibile è una minima parte di quella presente in realtà. Tutto ciò ha portato a teorizzare l'esistenza di un'altra forma di materia non barionica, la Materia Oscura, che potesse risolvere questi problemi e garantire alla teoria un buon accordo con i risultati sperimentali: essa non interagisce (o interagisce con sezioni d'urto molto piccole) con la materia ordinaria, viene considerata non collisionale e l'unico effetto che produce è di tipo gravitazionale. Nel modello CDM la materia oscura è fredda, ovvero si assume che il disaccoppiamento dal bagno termico primordiale avvenga ad una temperatura tale che le particelle non siano più relativistiche. La questione quindi ora si sposta nel capire cosa siano effettivamente la Materia Oscura e l'Energia Oscura.

A questo scopo nel corso degli anni sono stati ideati esperimenti, proposti nuovi modelli, alcuni dei quali cercano di osservare la questione da un altro punto di vista. Se fosse la gravità a comportarsi in maniera diversa a grandi scale? Possibili deviazioni dalla Relatività Generale, assunta nel modello  $\Lambda$ CDM, potrebbero causare gli stessi effetti di accelerazione attribuiti all'energia oscura, ad esempio. Questo porterebbe ad una modifica del modello standard della cosmologia, verso altri tipi di teorie "non standard". Ma come identificare e quantificare una qualche deviazione? I test sperimentali della relatività generale confermano che essa funziona bene a scale paragonabili a quella del sistema solare. Ciò implica che per osservare un effetto significativo è necessario andare a scale molto maggiori, quelle degli ammassi di galassie.

L'obiettivo principale di questa tesi è determinare la presenza o meno di variazioni dal modello standard attraverso lo studio dei profili di massa stimati per un ammasso di galassie, ottenuti sfruttando il lensing gravitazionale e la dinamica delle galassie nell'ammasso. Si vedrà infatti come i profili di massa possano essere collegati ai *potenziali scalari*  $\Phi$ ,  $\Psi$  della metrica che descrive la struttura virializzata (intesa come pertur-

bazione della metrica di Friedmann- Robertson-Walker). Dal profilo ottenuto tramite la dinamica, assumendo che questa sia non relativistica (approssimazione valida dal momento che la velocità media delle galassie in un ammasso vale circa  $\bar{v} \simeq 10^{-3}c$ , e il potenziale  $\Phi \sim 10^{-4}c^2$ ), si può estrapolare un profilo per il potenziale Newtoniano  $\Phi$ , legato alla componente temporale della metrica. Il profilo ottenuto invece dal lensing è sensibile ad una combinazione dei due potenziali. Nel modello  $\Lambda$ CDM dovremmo avere

$$\Phi = \Psi \quad (1)$$

Confrontando dunque i profili di massa è possibile evidenziare la presenza di una deviazione in termini di differenza tra i due potenziali. Cercheremo di stimare questa differenza e di capire se essa sia indicazione significativa di gravità modificata, in particolare verranno posti dei vincoli sul parametro  $\eta = \frac{\Psi}{\Phi}$  sfruttando i dati del progetto CLASH per l'ammasso MACS 1206 a  $z = 0.44$  (Biviano et al., 2013 [10], Umetsu et al., 2012 [67])

Nel primo capitolo verranno brevemente richiamati alcuni concetti base di cosmologia e relatività, in particolare si descriverà in maniera qualitativa la dinamica dell'Universo omogeneo ed isotropo. Nel secondo capitolo si accennerà alla formazione delle strutture cosmiche analizzando l'evoluzione delle perturbazioni in teoria lineare (newtoniana e relativistica) e il caso semplice di collasso sferico per il regime non lineare. Successivamente, nel capitolo 3 verrà discussa la fenomenologia degli ammassi di galassie con particolare riferimento al progetto CLASH per la ricostruzione dei profili di massa.

I capitoli 4 e 5 costituiscono il nodo centrale della trattazione: nel quarto mostreremo come collegare i profili alla metrica di FRLW perturbata ed accenneremo al modo per ottenere tali profili dal lensing e dalla dinamica. Nel quinto, infine, si procederà al vero e proprio calcolo di  $\eta$ ; inseriremo il risultato nel panorama attuale dei vincoli sui modelli di gravità modificata.

Riportiamo inoltre nell'appendice A molte delle nozioni fondamentali di Relatività Generale e geometria differenziale di cui faremo ampio uso in questa tesi.

# Capitolo 1

## Dalla Relatività Generale alle equazioni di Friedmann

In questo capitolo introduttivo ricaveremo le equazioni di Einstein e mostreremo come sia possibile ottenere da queste una descrizione per l'evoluzione dinamica dell'Universo tramite le equazioni di Friedmann, assumendo la validità del principio cosmologico, ovvero che l'Universo sia omogeneo ed isotropo per scale dell'ordine delle decine di Mpc. Si discuteranno brevemente alcune soluzioni di queste equazioni e il conseguente andamento nel tempo del fattore di scala.

Per questa parte si fa riferimento ai capitoli 6, 14, 15 del Weinberg [69] e al capitolo 3 del Mo-Bosch-White [44]

### 1.1 La metrica di Friedman-Robertson-Walker

Per descrivere la struttura geometrica dell'Universo si utilizza una metrica particolare che sia *massimamente simmetrica* nella sua parte spaziale (ovvero che ammetta  $\frac{D(D+1)}{2}$  vettori di Killing - legati alle simmetrie - se la varietà ha dimensione  $D$ ). Ciò è giustificato dall'assunzione del principio cosmologico: la richiesta di isotropia e omogeneità permette di individuare superfici spacelike nelle quali tutte le proprietà locali (come temperatura, densità ecc..) appaiono uniformi ed evolvono rispetto ad un tempo uni-

versale chiamato *tempo cosmologico*. Le ipersuperfici spacelike in questione sono per definizione simmetriche in maniera massimale.

L'elemento di distanza che identifica la metrica, detta metrica di Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), può essere espresso in coordinate sferiche ed assume la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (1.1)$$

Qui  $a(t)$  è il *fattore di scala* che descrive l'espansione dell'Universo,  $(r, \theta, \phi)$  sono le coordinate nel sistema comovente, indipendenti dall'espansione,  $t$  il tempo cosmologico misurato da un osservatore solidale con il sistema comovente e  $k = 1, 0, -1$  un parametro legato alla curvatura ( $k = 1$  Universo chiuso,  $k = 0$  Universo piatto,  $k = -1$  Universo aperto). Spesso è utile definire un *tempo conforme*  $d\tau = \frac{dt}{a}$  che rappresenta la distanza comovente percorsa dalla luce nel tempo cosmologico  $dt$ . In questo modo l'eq. (1.1) diventa

$$ds^2 = a(\tau)^2 \left[ -d\tau^2 + \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \right], \quad (1.2)$$

conformalmente equivalente alla precedente<sup>1</sup>. Si può effettuare un ulteriore cambio di coordinate introducendo

$$r \rightarrow f_k(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{sen}(\sqrt{k}\chi) & k > 0; \\ \chi & k=0; \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \text{senh}(\sqrt{-k}\chi) & k < 0. \end{cases}$$

che, inserito nell'eq. (1.2), conduce all'espressione

$$ds^2 = a(\tau)^2 \left[ -d\tau^2 + (d\chi^2 + f_k(\chi)^2 d\Omega^2) \right]. \quad (1.3)$$

Per concludere, consideriamo un raggio di luce che si propaga lungo una geodetica radiale (l'isotropia ci permette di ignorare le componenti angolari); poichè  $ds^2 = 0$

<sup>1</sup>Si definisce *trasformazione conforme* una trasformazione che lascia invariata la metrica a meno di un fattore moltiplicativo  $g'(x) = \Omega(x)g(x)$

possiamo dire che

$$d\tau^2 = \frac{dt^2}{a(t)^2} = \frac{dr^2}{1 - kr^2},$$

definiamo la distanza propria di un punto dall'origine come

$$l = a(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{1 - kr^2}. \quad (1.4)$$

Questa equivale, a meno di un fattore  $c$ , al tempo conforme  $\tau$  ottenuto integrando  $\frac{dt}{a(t)}$ , cioè al lasso di tempo che un segnale, emesso al tempo cosmologico  $t_0$ , impiega per raggiungere l'osservatore nell'origine  $r = 0$ . Se poniamo l'estremo inferiore  $t_0 = 0$ , l'eq. (1.4) ci dice qual'è la distanza comovente percorsa dai fotoni nel tempo di esistenza dell'Universo, in altre parole è una misura della regione massima i cui punti possono essere messi in collegamento causale. Tale regione è nota come *orizzonte cosmologico*.

## 1.2 Le equazioni di campo Einstein

In questa sezione ci occuperemo di relazionare la struttura dello spaziotempo e il contenuto di materia ed energia al suo interno, cercheremo dunque un'equazione che descriva il comportamento del campo gravitazionale in presenza di sorgenti.

Vogliamo in primo luogo definire alcune quantità tensoriali legate alla geometria della varietà, cioè costruite a partire dalla metrica e dalle sue derivate. Si può dimostrare che utilizzando  $g_{\mu\nu}$  e le sue derivate prime non si riesce ad ottenere nessun nuovo tensore, perchè questo può sempre essere ricondotto ad una funzione solo di  $g_{\mu\nu}$  in un opportuno sistema di riferimento. È necessario dunque considerare anche le derivate seconde; in questo caso si può costruire un solo tensore, lineare in  $\partial^2 g$ , detto *tensore di curvatura* o tensore di Riemann

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\rho} = \partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} + \Gamma^\eta{}_{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\rho\eta} - \Gamma^\eta{}_{\mu\rho} \Gamma^\lambda{}_{\nu\eta}. \quad (1.5)$$

A partire dal quale possiamo generare il  *tensore di Ricci*

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$$

e, calcolando la traccia di quest'ultimo, lo  *scalare di curvatura*

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}.$$

Dalle molteplici proprietà di simmetria del tensore di Riemann ( si veda [69], pag 169-170) discende che anche  $R_{\mu\nu}$  è simmetrico nello scambio di  $\mu$  e  $\nu$  e che  $R$  è l'unico scalare non nullo ottenibile da  $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}$ . Questi due oggetti, assieme alla metrica  $g_{\mu\nu}$ , ci permettono di costruire un altro tensore di rango  $\binom{0}{2}$ :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.6)$$

chiamato  *tensore di Einstein* , che comparirà nel lato sinistro delle equazioni di campo. Sempre sfruttando le simmetrie di  $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}$  si può far vedere che

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0.$$

### 1.2.1 Il Tensore Energia - Impulso

L'oggetto che descrive le densità e le correnti di energia e momento in relatività prende il nome di  *tensore Energia-Impulso*   $T_{\mu\nu}$ . Formalmente può essere definito tramite il metodo variazionale, utilizzando l'azione

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M,$$

con  $\mathcal{L}_M$  la Lagrangiana che contiene le informazioni sul campo di materia e radiazione nello spaziotempo descritto dalla metrica  $g_{\mu\nu}$  e  $g$  il determinante di tale metrica . Imponendo  $\delta S_M = 0$  per variazioni infinitesime della metrica  $\delta g_{\mu\nu}$  si ottiene

$$0 = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},$$

dove

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial g_{\mu\nu}} - 2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \quad (1.7)$$

è definito Tensore Energia-Impulso. Esso è simmetrico in  $\mu$  e  $\nu$  e soddisfa, in assenza di forze esterne, l'equazione

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

che rappresenta una generalizzazione covariante della legge di conservazione per l'energia e il momento. Da notare come la stessa relazione valga per  $G_{\mu\nu}$ ; ciò lascia supporre di poter scrivere l'equazione di Einstein in termini di queste due quantità. Prima di procedere alla derivazione, elenchiamo alcune delle forme più note di  $T_{\mu\nu}$ .

**Sistema di  $n$  particelle con momento  $p_i^\mu$ :**

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_i m_i \int \frac{dx_i^\mu}{d\tau} dx_i^\nu \delta^4(x - x_i). \quad (1.8)$$

**Campo Elettromagnetico:**

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (1.9)$$

con  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  tensore di *Field Strength* del campo elettromagnetico. Sfruttando l'antisimmetria di  $F$  è facile vedere che  $T^\mu{}_\mu = 0$ .

In questo caso il tensore energia impulso ha quadridivergenza nulla solo in assenza di sorgenti. Se considerassimo invece un gas di particelle cariche, le eq. (1.8) e (1.9) non si conservano separatamente, ma la loro somma sì.

**Fluido Perfetto.** Un fluido avente viscosità nulla e tale che la pressione in un qualsiasi punto sia indipendente dall'orientamento della superficie a cui si riferisce è chiamato *fluido perfetto* o ideale. Esso appare isotropo ad un osservatore comovente con il fluido stesso e quindi, in virtù del principio cosmologico, risulta idoneo per descrivere l'universo su larga scala.

Nel sistema localmente inerziale a riposo rispetto al fluido, il tensore energia impulso può essere scritto come

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Dove  $\rho$  e  $p$  sono rispettivamente la densità e la pressione del fluido. Se invece si passa ad un sistema di coordinate generico l'eq.(1.10) assume la forma

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) u_\mu u_\nu, \quad (1.11)$$

avendo definito  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  la quadrivelocità per un elemento di fluido tale che  $u_\mu u^\mu = -1$ .

## 1.2.2 Il limite di campo debole

Esistono differenti modi per derivare le equazioni di Einstein. Una procedura molto elegante si basa sul calcolo variazionale e consiste nel considerare l'azione totale

$$S = S_M + S_G;$$

$S_M$  è l'azione definita in 1.2.1, mentre  $S_G$  rappresenta l'azione del campo gravitazionale e prende il nome di *Azione di Hilbert-Einstein*

$$S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g(x)} R(x) d^4x.$$

Un metodo totalmente equivalente, meno formale ma concettualmente più interessante, sfrutta invece l'approssimazione Newtoniana - cui la teoria deve ridursi in caso di campo debole - per determinare la forma dell'equazione, e le leggi di conservazione dei tensori implicati per ottenere le eventuali costanti.

Partiamo da una particella in moto in un campo gravitazionale statico descritto dalla metrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

dove  $\eta$  indica la metrica di Minkowski e  $h$  è una piccola perturbazione allo spaziotempo piatto  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Se la velocità con cui si muove la particella è tale che  $v \ll c$ , nell'equazione delle geodetiche possiamo trascurare la componente spaziale di  $\frac{dx^\mu}{d\tau}$  rispetto a  $\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}$ . In questo modo l'eq. (A.7) diventa, al primo ordine in  $h$ ,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 =$$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \eta^{ij} \partial_j h_{00}; \quad (1.12)$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0, \quad (1.13)$$

avendo sfruttato la definizione di  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ , data nell'appendice A.3, e l'indipendenza della metrica dal tempo. La soluzione per l'equazione in  $t$  ci dice che  $\frac{dt}{d\tau} = cost$ , quindi possiamo dividere l'eq. (1.12) per  $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$ , ottenendo

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}. \quad (1.14)$$

Se definiamo  $\Phi = -2h_{00} + cost$ , possiamo notare come l'eq. (1.14) coincida con l'equazione del moto in teoria Newtoniana, con  $\Phi$  che rappresenta il potenziale gravitazionale:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = -\nabla \Phi.$$

A questo punto la componente puramente temporale del tensore metrico  $g$  diventa

$$g_{00} \simeq -1 - 2\Phi, \quad (1.15)$$

dove la costante si pone uguale a 0 dalla richiesta che la metrica (o il potenziale) si annulli all'infinito.

Consideriamo ora l'equazione di Poisson per  $\Phi$ :

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.16)$$

$\rho$  indica la densità di materia che, nel caso non relativistico coincide con la densità di energia; possiamo associarla alla componente  $T_{00}$  del tensore Energia-Impulso. Riscriviamo allora l'equazione di Poisson sostituendo la definizione di  $g$  nel limite di campo debole

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}. \quad (1.17)$$

Immaginiamo di voler estendere questa relazione ad un campo gravitazionale di intensità arbitraria generato da una distribuzione qualsiasi di energia e momento. Possiamo supporre che la forma cercata sia del tipo

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu},$$

dove, in linea di principio,  $G_{\mu\nu}$  è una combinazione generica della metrica e delle sue derivate prime e seconde. Un ragionamento legato alle proprietà di  $T_{\mu\nu}$ , assieme a considerazioni sui vincoli per  $G$ , permette di determinare le costanti della combinazione ed identificare il tensore che descrive il campo gravitazionale proprio con il tensore di Einstein. In realtà si potrebbe aggiungere un termine lineare nella metrica senza alterare le precedenti imposizioni, purché tale termine sia piccolo in modo da non interferire con il limite newtoniano; le equazioni di Einstein, esplicitando la  $c$ , si scrivono dunque

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}; \quad (1.18)$$

$\Lambda$  prende il nome di *costante cosmologica* e fu originariamente introdotta da Einstein per cercare una soluzione che descrivesse un universo statico; nel modello standard della cosmologia  $\Lambda$  rappresenta il contributo dell'energia di vuoto responsabile dell'espansione accelerata dell'Universo, evidenziata nel 1998 tramite le osservazioni delle supernovae di tipo Ia (Reiss et al., 1998 [56]).

### 1.3 Le equazioni di Friedmann

Discutiamo ora l'applicazione dell'eq. (1.18) nel caso di un Universo omogeneo ed isotropo, descritto quindi dalla distribuzione di energia e materia di un fluido perfetto.

Assumendo il principio cosmologico, abbiamo visto nella sezione 1.1 come la metrica che definisce la struttura dello spaziotempo sia quella di FLRW. Vogliamo collegare questa metrica al tensore energia-impulso tramite le equazioni di Einstein. Mettiamoci per un momento in un sistema di riferimento localmente inerziale a riposo rispetto all'osservatore:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} - \Lambda \eta_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (1.19)$$

dove  $\tilde{T}$  è dato dall'eq. (1.10). Scriviamo ora  $\Lambda$  in funzione di una "densità di vuoto"  $\rho_\Lambda$ :  $\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_\Lambda$ . In questo modo possiamo spostare  $\Lambda \eta_{\mu\nu}$  a destra dell'uguale e considerarlo come termine di sorgente per l'equazione di campo, caratterizzato da un tensore energia-impulso

$$\tilde{T}_\Lambda^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho_\Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_\Lambda \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

che può essere associato alla forma (1.10) per un fluido perfetto avente densità  $\rho_\Lambda$  e pressione  $p = -\rho_\Lambda$ . Da notare che se  $\Lambda > 0$ , anche  $\rho_\Lambda > 0$  e dunque la pressione legata a questa energia di vuoto risulta essere negativa.

Torniamo ora all'equazione di Einstein in un sistema generico; moltiplichiamo a destra e sinistra per la metrica controvariante  $g^{\mu\nu}$ :

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = -8\pi G g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

$$R = -8\pi G \left( T - \frac{1}{2} \Lambda \right) \quad (1.21)$$

che, inserita nell'eq. (1.18), conduce ad un'equazione per  $R_{\mu\nu}$  in funzione di  $\Lambda$  e  $T$ . Se calcoliamo le componenti del tensore di Ricci usando la metrica (1.1), possiamo scrivere delle relazioni per il fattore di scala  $a(t)$  che governa l'espansione dell'universo

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}; \quad (1.22)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.23)$$

Queste sono note come *equazioni di Friedmann* e, assieme ad un opportuna equazione di stato che leghi  $\rho$  e  $p$ , permettono di determinare l'evoluzione dell'Universo in base al suo contenuto e alla sua curvatura. In generale la densità è data dalla somma dei contributi dovuti alla materia (non relativistica) e alla radiazione  $\rho = \rho_{matter} + \rho_{rad}$ . Possiamo aggiungere anche una  $\rho_{\Lambda}$  se interpretiamo il termine di costante cosmologica come densità del vuoto. Si può vedere che

$$p = \rho w$$

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad (1.24)$$

dove

$$w = \begin{cases} 0 & \text{materia;} \\ \frac{1}{3} & \text{radiazione;} \\ -1 & \text{energia di vuoto.} \end{cases}$$

Ovvero le densità di materia e radiazione si diluiscono con l'espansione, mentre l'energia di vuoto (che d'ora in avanti chiameremo *Energia Oscura*) è caratterizzata da una densità indipendente dal fattore di scala. Questo ci suggerisce che, se fosse presente una  $\Lambda$  positiva, qualsiasi siano i valori di  $\rho_m$  e  $\rho_r$ , ad un certo punto il contributo dell'energia oscura diventerebbe dominante e porterebbe ad un'espansione accelerata nell'eq. (1.23).

Il fattore

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

è noto come *parametro di Hubble*; le recenti osservazioni (Planck mission, 2013) hanno stimato un valore di  $67.80 \pm 0.77$  per  $H(t_o)$ , dove il pedice "o" indica la nostra epoca. L'inverso del parametro di Hubble calcolato oggi è una stima superiore dell'età dell'universo ( $\sim 13.7Gy$ ), rappresenta cioè il tempo di esistenza se l'espansione fosse avvenuta a velocità costante.

Un altro modo per descrivere oggetti presenti in un dato tempo cosmologico è quello di usare il *redshift*  $z$ , legato al fattore di scala da

$$1 + z(t_o) = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}$$

esso rappresenta la variazione nella frequenza di un segnale emesso a  $t_e$  che raggiunge l'osservatore a  $t_o$ . Abbiamo anche visto nella sezione 1.1 come il tempo cosmologico sia legato alla distanza propria di un punto dall'origine, per meglio dire è indifferente parlare di *quando*, di dire *a che distanza*, o fornire il redshift.

Se ora consideriamo  $\rho_m \propto (1+z)^3$  e  $\rho_r \propto (1+z)^4$ , possiamo vedere che il rapporto tra le densità non è costante nel tempo, ma dipende dal redshift come  $\frac{\rho_m}{\rho_r} \propto (1+z)^{-1}$ . Sfruttando i valori odierni delle densità (vedere di seguito), è possibile risalire all'epoca  $z_{eq} \sim 3400$  per cui  $\rho_m = \rho_r$ . Per  $z < z_{eq}$  ( $t > t_{eq}$ ) l'Universo è dominato dalla materia, mentre per  $z > z_{eq}$  ( $t < t_{eq}$ ) l'Universo è dominato dalla radiazione. Tutto questo, ovviamente, vale se il contributo di costante cosmologica non influenza l'evoluzione del fattore di scala a quell'epoca; le osservazioni combinate dalle supernove Ia e dal fondo di microonde hanno tuttavia mostrato che l'Universo è passato da una fase di espansione decelerata, dominata dalla componente di materia, ad una fase di espansione accelerata dovuta all'energia di vuoto per  $z \simeq 0.56$  (Giostri et al., 2012 [28]); è quindi lecito trascurare il termine  $\Lambda$  per redshift molto grandi.

Supponiamo ora di avere un universo piatto ( $k=0$ ) ad una certa epoca  $t$ . Riassorbendo il termine di costante cosmologica dentro la definizione di densità, la prima equazione di Friedmann diventa

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv H^2(t) = \frac{8}{3}\pi G\rho_c. \quad (1.25)$$

Introduciamo la *densità critica* al tempo  $t$

$$\rho_c(t) = H^2(t) \frac{3}{8\pi G},$$

che discrimina un universo chiuso, dominato dalla gravità, da un universo aperto, dominato dall'espansione. Le densità per le varie componenti vengono spesso fornite in termini di rapporti rispetto alla densità critica. Si definisce  $\Omega_x(t) = \frac{\rho_x(t)}{\rho_c(t)}$  (dove

$x = m, r, vacuum$ ). La somma  $\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_v$  fornisce indicazioni sulla curvatura (cioè sul valore di  $k$ ). Le analisi del fondo cosmico di microonde (Spergel et al., 2007 [64]) hanno confermato che  $\Omega_o \simeq 1$ , ciò vuol dire che il nostro universo all'epoca attuale risulta essere piatto.

Per concludere vogliamo mostrare alcuni modelli di Universo che si ottengono dalle equazioni di Friedmann. Prima di tutto è utile riscrivere le equazioni in termini dei valori odierni dei parametri cosmologici  $\Omega_{0m}$ ,  $\Omega_{0r}$  e  $\Omega_{0\Lambda}$ . Possiamo in realtà definire anche un  $\Omega_{0k} = -k/H_0^2 a_0^2 = 1 - \Omega_0$  in modo da eliminare il termine di curvatura esplicitamente dalle equazioni. Utilizzando l'eq. (2.10) nell'eq. (1.22):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \rho_{0m} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{0r} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{0\Lambda} \right] - \frac{k^2}{a^2}; \quad (1.26)$$

dividiamo e moltiplichiamo per la densità critica, riscrivendo in termini del redshift  $z$ :

$$H^2(t) = H_0^2 \left[ \Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0r}(1+z)^4 + \Omega_{0\Lambda} + (1 - \Omega_0)(1+z)^2 \right]. \quad (1.27)$$

Le osservazioni permettono di vincolare i valori dei parametri cosmologici calcolati oggi. Ad esempio, dallo studio del CMB si può facilmente stimare  $\Omega_{0r}$  tenendo presente che il fondo cosmico di microonde ha uno spettro di corpo nero alla temperatura  $T_{CMB} = 2.73K$ : usando la legge di Stephen-Boltzmann  $\rho_\gamma = 4\sigma \frac{T^4}{c^3}$  si risale ad un valore  $\Omega_{0r} \simeq 2.5 \times 10^{-5} h^{-2}$ , dove  $h = \frac{H_0}{100} km^{-1} sMpc$ . Analogamente, lo spettro di potenza del CMB fornisce, oltre a  $\Omega_0$ , anche informazioni su  $\Omega_{0m}$  e  $\Omega_{0b}$  ([64]), con  $b$  che indica la frazione barionica della materia. Infine, le osservazioni sulle supernove di tipo Ia consentono di stimare la differenza tra  $\Omega_{0m}$  e  $\Omega_{0\Lambda}$  (Perlmutter et al. 1999 [51]). Le ultime analisi dei dati della missione Planck (Planck, 2013 [48], 2015 [49]) hanno stabilito il seguente quadro per i valori dei parametri:

$$\begin{aligned} \Omega_{0m} &= 0.308 \pm 0.012, \\ |\Omega_{0k}| &< 0.005, \\ \Omega_{0b} h^2 &= 0.02205 \pm 0.00028, \\ \Omega_{0c} h^2 &= 0.1197 \pm 0.0022, \\ \Omega_{0\Lambda} &= 0.6911 \pm 0.0062, \end{aligned}$$

dove  $\Omega_{0c}$  indica la frazione di materia non barionica.

Torniamo ora all'eq. (1.26) e analizziamo qualitativamente quello che accade per  $\Lambda > 0$ . Se  $k = 0$  o  $k = -1$  il lato destro dell'equazione è sempre maggiore di zero, cioè  $\frac{\dot{a}}{a} > 0$ , l'Universo continua ad espandersi nel tempo. Nel caso in cui  $k = 1$  la situazione è più complicata. Logicamente ad epoche sufficientemente vicine al Big Bang il contributo dominante è dato da radiazione e materia, mentre a tempi lontani la costante cosmologica e la curvatura iniziano ad avere un ruolo significativo. Fintanto che  $\frac{k}{a^2} > \frac{\Lambda}{3}$  l'Universo è in una fase di contrazione  $\dot{a} < 0$ . Se il termine di costante cosmologica è più piccolo della somma delle densità di materia e radiazione al tempo attuale  $\rho_{0m} + \rho_{0r}$ , la curvatura continuerà ad essere dominante. Se invece  $\rho_{\Lambda}$  è abbastanza grande, l'eq. (1.26) ha un minimo per  $\dot{a} = 0$ ; ad una fase di contrazione segue una nuova fase di espansione guidata dal termine di energia di vuoto.

### Soluzione statica

Un caso storicamente interessante è la soluzione statica delle equazioni di Friedmann trovata da Einstein, poiché fu il motivo dell'introduzione della costante cosmologica. Essa può aver luogo solo se  $k > 0$  e  $\Lambda > 0$  e si può dimostrare che è instabile. Dalle eq. (1.22) e (1.23), poniamo  $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ :

$$0 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3};$$

$$0 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.28)$$

Se l'Universo è dominato dalla materia  $p = 0$  e

$$\rho_{Einst} = \frac{\Lambda}{4\pi G}; \quad a_{Einst} = \sqrt{\frac{k}{\Lambda}},$$

mentre, se è dominato dalla radiazione,  $p = \frac{1}{3}\rho$ :

$$\rho_{Einst}^r = \frac{\Lambda}{8\pi G}; \quad a_{Einst}^r = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{k}{\Lambda}}.$$

### Epoca della radiazione

Per  $z \gg z_{eq}$  nell'equazione (1.26) possiamo trascurare tutti i termini a destra tranne  $\rho_{0r} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4$ , e dunque

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{0r} \frac{a_0^4}{a^4}. \quad (1.29)$$

La soluzione in questo caso è molto semplice poiché  $\frac{da}{dt} \propto a^{-1}$ ; l'andamento del fattore di scala nel tempo risulta

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad t < t_{eq}.$$

Analizzando la seconda equazione di Friedmann (1.23), ci si rende subito conto che un Universo dominato dalla radiazione si espande decelerando, infatti  $\ddot{a} < 0$  non cambia mai segno, ma tale decelerazione diminuisce nel tempo man mano che la densità si diluisce con l'espansione.

### Universo di materia

Supponiamo di essere ad un'epoca  $z < z_{eq}$  per la quale il contributo di un'eventuale curvatura sia ancora trascurabile. A questo punto, in maniera analoga alla situazione precedente, il lato destro dell'equazione contiene solo il termine di materia:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{0m} \frac{a_0^3}{a^3}. \quad (1.30)$$

Adesso  $\frac{da}{dt} \propto a^{-\frac{1}{2}}$ , pertanto

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}.$$

Questo particolare soluzione va sotto il nome di *modello di Einstein- de Sitter* e rappresenta il modello di riferimento per descrivere l'evoluzione delle perturbazioni dopo l'equivalenza tra materia e radiazione. Anche in questo caso l'eq. (1.23) ci dice che l'espansione è decelerata.

Se però  $k \neq 0$ , da una certa epoca in poi il contributo della curvatura diventa rilevante e l'evoluzione del fattore di scala cambia. Ad esempio, per  $k = 1$ , si può esprimere la

soluzione in forma parametrica come

$$\frac{a}{a_0} = \frac{\Omega_{0m}}{2(\Omega_{0m} - 1)}(1 - \cos\theta), \quad t = \frac{\Omega_{0m}}{2H_0(\Omega_{0m} - 1)^{\frac{3}{2}}}(\theta - \sin\theta), \quad (1.31)$$

dove  $\theta$  varia tra 0 e  $2\pi$ . Per  $\theta = \pi$  l'espansione raggiunge il massimo valore  $a_{max}(t_{max})$ , dopo il quale si passa ad una fase di contrazione che conduce ad una nuova singolarità.

Per  $k = -1$  abbiamo invece

$$\frac{a}{a_0} = \frac{\Omega_{0m}}{2(\Omega_{0m} - 1)}(1 - \cosh\theta), \quad t = \frac{\Omega_{0m}}{2H_0(\Omega_{0m} - 1)^{\frac{3}{2}}}(\theta - \sinh\theta), \quad (1.32)$$

con  $\theta$  che ora assume valori tra 0 e  $\infty$ . Questa volta l'espansione procede indefinitamente come per il caso  $k = 0$ , ma con una diversa dipendenza del fattore di scala dal tempo. Infatti, se  $\theta \gg 1$  si ha  $\cosh\theta \sim \sinh\theta$  e dunque  $a(t) \propto t$ .

Nella Figura 1.1 sono mostrati gli andamenti del fattore di scala per un Universo dominato dalla materia nei tre casi discussi. Si può notare come per epoche prossime al Big Bang le curve siano all'incirca le stesse,  $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ , indice del fatto che ad alti redshift il termine di curvatura è ininfluenza.

### Universo di de Sitter

L'Universo di de Sitter è una particolare soluzione delle equazioni di Friedmann nella quale si suppone che l'unica componente presente sia il termine di energia di vuoto ( $w = -1$ ) in uno spazio piatto  $k = 0$ . Questo modello si adatta bene al limite per tempi grandi del modello cosmologico standard  $\Lambda$ CDM, quando i contributi di materia e radiazione diventano trascurabili rispetto alla densità di energia oscura. L'eq. (1.26) diventa

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda \quad (1.33)$$

che conduce ad una soluzione esponenziale per l'andamento del fattore di scala nel tempo:

$$a(t) \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}, \quad (1.34)$$

mentre l'eq (1.23) si riduce semplicemente a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3},$$

cioè l'espansione è accelerata.

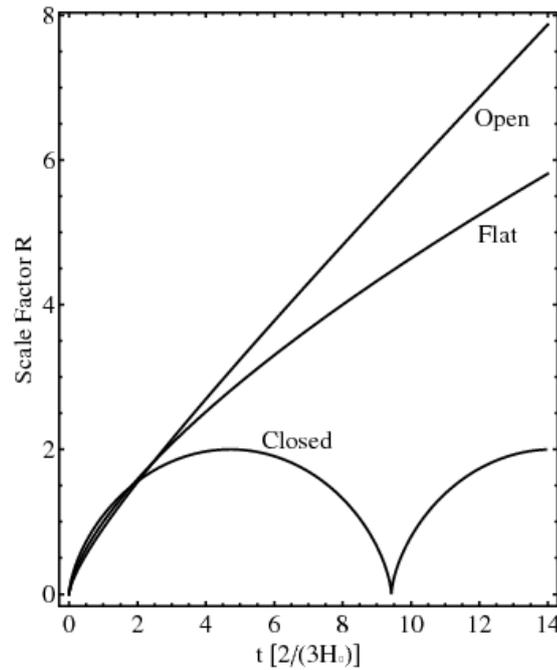


Figura 1.1: Modelli di Universo dominato dalla materia,  $\Omega_\Lambda = 0$ ,  $k = -1, 0, 1$

Si è dunque analizzata in maniera qualitativa la dinamica dell'Universo attraverso le equazioni di Friedmann, avendo assunto il principio cosmologico. Nel prossimo capitolo rilasceremo l'ipotesi di isotropia e omogeneità ed andremo a studiare la formazione delle strutture dall'evoluzione di piccole perturbazioni nella densità iniziale.

## Capitolo 2

### Perturbazioni cosmologiche

Alla fine del precedente capitolo si è visto come ricavare le equazioni che descrivono l'evoluzione dell'Universo avendo posto alla base il principio cosmologico. Siamo ora interessati ad andare oltre l'assunzione di isotropia ed omogeneità, per studiare e comprendere la formazione delle strutture cosmiche osservate oggi, come galassie o ammassi di galassie (figura 4.1). Si suppone che tali strutture abbiano avuto origine da perturbazioni della densità iniziale, generatesi da fluttuazioni quantistiche in seguito alla fase inflazionaria di espansione. Se l'ampiezza di queste perturbazioni è sufficientemente piccola, possiamo analizzare la loro evoluzione temporale in approssimazione lineare.

Nel primo paragrafo tratteremo la teoria delle perturbazioni lineari utilizzando l'approccio newtoniano, estenderemo poi al caso relativistico nella sezione 2.2, definendo la metrica perturbata di FLRW. Infine, nel terzo paragrafo, discuteremo il modello del collasso sferico, che rappresenta il caso più semplice di evoluzione non lineare.

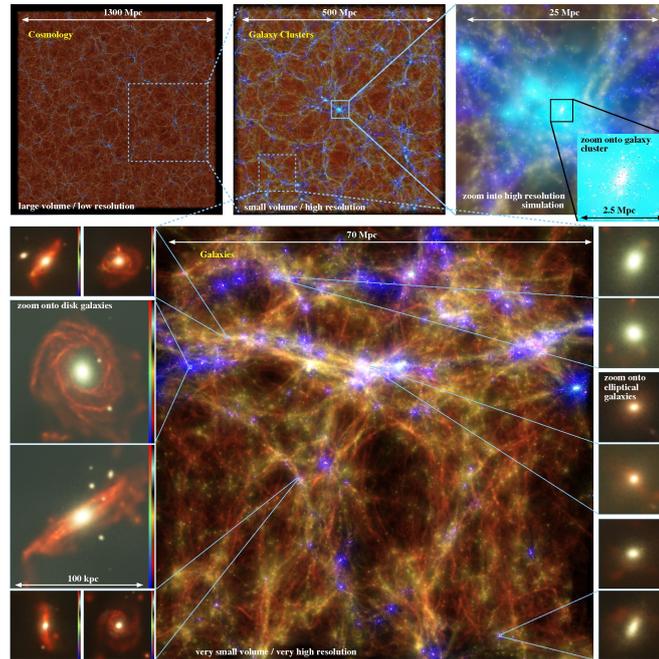


Figura 2.1: Struttura dell'universo come risulta dalle simulazioni numeriche idrodinamiche del *Magneticum Pathfinder* (<http://www.mpa-garching.mpg.de/~kdolag/Simulations/Magneticum>), in un pittorico "zoom-in" da una visione su larga scala, fino alle singole galassie. A sinistra, in alto: simulazione *Box1/mr* che mostra un'area di larghezza 1300 Mpc a  $z=0.0$ , per un totale di  $0.7 \times 10^{10}$  particelle; le zone bianche rappresentano galassie e regioni in cui avviene la formazione stellare. In alto, al centro e a destra: simulazione *Box2/hr* su una scala di 500 Mpc a  $z=0$  per  $0.9 \times 10^{10}$  particelle (centro) e ingrandimento sull'ammasso di galassie più massivo (destra), che contiene più di 700 galassie, per una larghezza di 25 Mpc. Credit: Dolag et al. 2014[21], Teklu et al. 2014

## 2.1 Teoria Newtoniana delle perturbazioni lineari

Consideriamo un contrasto di densità molto minore rispetto alla densità del background, localizzato in una regione molto più piccola della scala dell'orizzonte. In questo caso possiamo considerare la causalità istantanea e, se il contenuto in materia può essere trattato in maniera non relativistica, sviluppare una teoria di tipo Newtoniano per l'evoluzione della perturbazione. Immaginiamo allora di avere un fluido ideale non relativistico con densità  $\rho$ , pressione  $p$ , entropia  $S$  e velocità  $\mathbf{u}$ , soggetto al potenziale gravitazionale  $\phi$ . Per descrivere l'evoluzione temporale avremo dunque bisogno di cinque equazioni che legano tra loro le grandezze indicate.

La prima è l'**equazione di continuità**:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.1)$$

dove  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)$  esprime la *derivata convettiva* rispetto al tempo (la derivata parziale è calcolata ad  $r$  fissato). L'equazione di continuità rappresenta la conservazione della massa.

L'equivalente della seconda legge della dinamica è data dall'**equazione di Eulero**:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi, \quad (2.2)$$

che esprime la conservazione del momento. Ci servirà poi l'equazione di Poisson per il campo gravitazionale

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (2.3)$$

ed un'equazione di stato per il fluido che legghi  $p$ ,  $\rho$  e  $S$ :

$$p = p(S, \rho). \quad (2.4)$$

Infine, per completare il sistema, dobbiamo considerare l'evoluzione temporale dell'entropia; tuttavia per semplificare i calcoli possiamo lavorare con perturbazioni adiabatiche, consistentemente anche con i dati osservativi, ponendo

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (2.5)$$

È però necessario tenere conto dell'espansione dell'Universo; essendo  $\vec{r}$  la coordinata nel sistema di riferimento proprio, essa risulta legata alle coordinate nel sistema comovente  $\vec{x}$  da  $\vec{r}(t) = a(t)\vec{x}(t)$ . In tal modo la velocità del fluido diventa esprimibile come somma di due termini

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \vec{u} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}} = aH\vec{x} + a\vec{v} = H\vec{r} + a\vec{v}.$$

Il primo termine è legato all'espansione dell'Universo, mentre la *velocità peculiare*  $\vec{v}$  è dovuta alla mutua attrazione gravitazionale degli elementi del fluido. Quello che vogliamo fare è scrivere le equazioni per una piccola perturbazione  $\delta \ll 1$  del campo densità al primo ordine (ovvero ne studieremo l'evoluzione lineare) nel sistema di riferimento comovente  $\vec{x}$ . A tal fine consideriamo una soluzione delle eq. (2.1) - (2.5) che sia somma della soluzione imperturbata definita da

$$\begin{cases} \rho = \rho_b \\ \vec{u} = H\vec{r} \\ p = p_b \\ \Phi = \Phi_0, \end{cases}$$

e di una fluttuazione della densità  $\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t) - \rho_b}{\rho_b} = \frac{\delta\rho}{\rho_b}$  che, ovviamente, genererà delle modifiche anche nelle altre grandezze

$$\begin{cases} \rho_b \rightarrow \rho_b(1 + \delta) \\ \vec{u} = H\vec{r} \rightarrow H\vec{r} + \vec{v} \\ p_b \rightarrow p_b + \delta p \\ \Phi_0 \rightarrow \Phi_0 + \phi. \end{cases}$$

Se inseriamo tali espressioni in (2.1), (2.2), (2.3), si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_b + \delta\rho)|_r + \nabla_r[(\rho_b + \delta\rho)(H\vec{r} + \vec{v})] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(H\vec{r} + \vec{v})|_r + [(H\vec{r} + \vec{v}) \cdot \nabla_r](H\vec{r} + \vec{v}) = -\frac{1}{\rho_b + \delta\rho} \nabla_r(p_b + \delta p) - \nabla_r(\Phi_0 + \phi) \\ \nabla_r^2(\Phi_0 + \phi) = 4\pi G(\rho_b + \delta\rho) \end{cases} \quad (2.6)$$

A questo punto possiamo sviluppare il sistema per separare la parte legata alla soluzione imperturbata dalla parte che contiene i termini di fluttuazione. Nell'approssimazione lineare trascuriamo tutti i termini di ordine superiore al primo nelle perturbazioni. Facendo ciò, le eq. (2.6) diventano, nel sistema comovente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \delta\rho\right)_x + \frac{\rho_b}{a} \nabla_x \cdot \vec{v} + 3H\delta\rho = 0; \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right)_x + H\vec{v} = -\frac{v_s^2}{a}\nabla_x\delta - \frac{1}{a}\nabla_x\phi; \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{a^2}\nabla_x^2\phi = 4\pi G\rho_b\delta, \quad (2.9)$$

dove si è definita la *velocità del suono* nel fluido  $v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = cost$ . Conviene ora passare allo spazio dei vettori d'onda (comoventi)  $k = \frac{2\pi}{\lambda_{com}}$ , cerchiamo cioè soluzioni onde piane

$$f(\vec{x}, t) = f_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}},$$

in modo tale da ottenere un sistema di equazioni differenziali nella sola variabile temporale. In aggiunta, possiamo combinare le relazioni così ricavate e ridurre il tutto ad una singola equazione per l'ampiezza della perturbazione nel campo densità  $\delta_k(t)$ :

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \delta_k \left[ \frac{k^2 v_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho_b \right] = 0, \quad (2.10)$$

che descrive l'evoluzione temporale della fluttuazione rispetto all'espansione (secondo termine), alla pressione (il cui contributo è individuato dalla velocità del suono) e la gravità. Il termine di espansione e quello di pressione contrastano la crescita della perturbazione, infatti compaiono con segno opposto rispetto al termine di "aggregazione" gravitazionale. A seconda del loro contenuto (materia barionica, materia oscura, radiazione), dell'epoca cosmologica e della scala che stiamo analizzando, l'evoluzione progredisce in maniera differente: alcune perturbazioni crescono, altre vengono smorzate, altre ancora rimangono di ampiezza costante.

### 2.1.1 La scala di Jeans

Consideriamo ora, a titolo esplicativo, il caso di una fluttuazione nella densità di materia avente lunghezza minore rispetto alla scala dell'orizzonte  $\lambda < R_H$ , per  $t > t_{eq}$  (dove con  $t_{eq}$  s'intende l'epoca dell'equivalenza tra densità di materia e di radiazione) nel caso di un Universo piatto. Vogliamo studiare l'evoluzione temporale in regime lineare di tale perturbazione risolvendo l'eq. (2.10).

La dipendenza dal tempo di  $a$  e  $\rho_b$  è data dalla soluzione delle equazioni di Friedmann per il modello Einstein-de Sitter:

$$\rho_b(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad a(t) = a_0 \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}.$$

Queste espressioni, inserite nell'eq. (2.10), portano a

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t} \dot{\delta}_k + \frac{2}{3t^2} \delta_k \left( \frac{K^2 v_s^2}{4\pi G \rho_b} - 1 \right) = 0, \quad (2.11)$$

dove  $K = \frac{k}{a}$  è il numero d'onda fisico. Questa equazione ammette come soluzione una legge di potenza  $\delta_k(t) \propto t^\alpha$ ; se la sostituiamo dentro eq. (2.11) possiamo ricavare una relazione di secondo grado per il coefficiente  $\alpha$ :

$$3\alpha^2 + \alpha + 2 \left( \frac{K^2 v_s^2}{4\pi G \rho_b} - 1 \right) = 0,$$

il cui discriminante  $\Delta = 25 - \frac{6K^2 v_s^2}{\pi G \rho_b}$  determina il tipo di soluzione. Il valore di  $K$  che annulla  $\Delta$

$$K = K_J = \frac{5}{v_s} \sqrt{\frac{\pi G \rho_b(t)}{6}} \quad (2.12)$$

definisce quella che si chiama *scala di Jeans*  $\lambda_J = 2\pi/K_J$ .

Se  $\lambda < \lambda_J$  i valori di  $\alpha$  sono immaginari e la soluzione può essere espressa, nello spazio delle coordinate:

$$\delta_{\pm}(\vec{x}, t) \propto t^{-1/6} \exp \left[ i\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \frac{5i}{6} \ln t \sqrt{\left( \frac{\lambda_J}{\lambda} \right)^2 - 1} \right]. \quad (2.13)$$

Essa rappresenta una coppia di onde acustiche progressive la cui ampiezza diminuisce nel tempo per effetto dell'espansione. Le onde tendono a diventare onde stazionarie quando  $\lambda \rightarrow \lambda_J$ .

Se invece  $\lambda > \lambda_J$ , abbiamo due valori reali per  $\alpha$  e l'espressione di  $\delta$  in funzione del

tempo risulta

$$\delta_{\pm}(\vec{x}, t) \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} t^{\left[ \frac{-1 \pm 5\sqrt{1 - (\lambda_J/\lambda)^2}}{6} \right]}, \quad (2.14)$$

che, nel limite  $\lambda \gg \lambda_J$ , si riduce a

$$\delta_{\pm} \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} t^{\frac{-1 \pm 5}{6}}. \quad (2.15)$$

L'eq. (2.15) descrive un'onda stazionaria la cui ampiezza aumenta o diminuisce nel tempo; la soluzione crescente è quella che interessa nella formazione delle strutture poiché l'altra decade e non contribuisce. In questo caso l'effetto della gravità vince sulla pressione e le perturbazioni possono svilupparsi.

Abbiamo dunque individuato un valore di  $\lambda$  che separa due regimi di evoluzione temporale: sotto la scala di Jeans la pressione concorre in maniera maggiore rispetto all'ultimo termine in eq. (2.10), le fluttuazioni non si amplificano. Viceversa, per scale maggiori della scala di Jeans la pressione diventa via via trascurabile e la perturbazione riesce a crescere per il fenomeno di **instabilità gravitazionale**.

## 2.1.2 Panoramica sulle soluzioni

Per stabilire l'evoluzione di una generica perturbazione bisogna risolvere l'eq. (2.10), specificando volta per volta le condizioni iniziali e l'epoca che si sta analizzando. Senza soffermarci sui conti, vogliamo fornire una rassegna generale sulla crescita delle fluttuazioni del campo densità in regime lineare per le varie componenti. Forniremo l'andamento di  $\delta$  anche su scale maggiori dell'orizzonte cosmologico, seppur per queste ultime sia necessaria la trattazione relativistica di sez. 2.2. Per una descrizione più completa, si faccia riferimento a [44], capitolo 4.

**Prima dell'equivalenza**  $t < t_{eq}$ .

In questo caso la densità che contribuisce maggiormente è quella della radiazione, e quindi le fluttuazioni nella componente relativistica  $\delta_r$  sono dominanti. Su scale minori dell'orizzonte si può vedere che le perturbazioni nel fluido barioni-radiazione oscilla-

no poichè la lunghezza di Jeans è maggiore di  $R_H$ , mentre quelle nella componente oscura della materia risultano bloccate dall'*effetto di stagnazione* o effetto Meszaros, dovuto al fatto che il tempo scala dell'espansione  $t_{esp} \sim (G\rho_b)^{-1/2}$  è minore del tempo scala dinamico  $t_{dyn} \sim (G\rho)^{-1/2}$  che caratterizza la crescita della perturbazione; qui  $\rho_b$  indica la densità del background mentre  $\rho = \rho_b(1 + \delta)$  rappresenta la densità della perturbazione nella componente di materia. Infatti

$$\frac{t_{esp}}{t_{dyn}} \sim \left(\frac{\rho}{\rho_b}\right)^{1/2} = \left(\frac{a}{a_{eq}}\right)^{1/2} < 1,$$

che implica  $t_{esp} < t_{dyn}$ .

Se siamo fuori dall'orizzonte, ed essendo il termine di curvatura trascurabile a queste epoche, possiamo assumere  $\Omega = 1$ ; le fluttuazioni nella densità di radiazione determinano l'evoluzione anche per le altre componenti:

$$\delta_r \propto \delta_M \propto \delta_{DM} \propto a^2 \quad (2.16)$$

**Tra equivalenza e ricombinazione**  $t_{eq} < t < t_{rec}$

Ora la componente dominante è quella di materia oscura. Se  $\lambda > R_H$  l'andamento per le fluttuazioni segue l'evoluzione di  $\delta_{DM}$ , la quale risulta essere

$$\delta_{DM} \propto a \quad (\Omega_m = 1).$$

Questo si può vedere attraverso un ragionamento qualitativo molto semplice considerando che, in un universo Einstein-De Sitter, il tempo scala dell'espansione risulta proporzionale a  $(G\rho_b)^{-1/2}$ , mentre, come detto sopra, il tempo dinamico vale  $t_{dyn} \sim (G\rho)^{-1/2}$ , dove  $\rho = \rho_b(1 + \delta)$ . Se siamo in regime lineare  $\delta \ll 1$  e dunque  $\rho \simeq \rho_b$ ; questo implica che la perturbazione evolva nello stesso modo dell'universo di background,  $\delta \propto a$ . Per scale più piccole dell'orizzonte cosmologico, le fluttuazioni nella materia oscura continuano a crescere nello stesso modo, mentre quelle nel fluido fotoni-barioni oscillano. Questo avviene poichè la lunghezza di Jeans  $\lambda_J$  è ancora confrontabile con  $R_H$ , e ciò impedisce alle perturbazioni di subire l'instabilità gravitazionale.

In realtà anche la materia oscura, seppur senza pressione [60], è soggetta ad un fenomeno di diffusione chiamato *free streaming*: in pratica le particelle di materia oscura subiscono solo l'azione del campo gravitazionale totale, data la loro natura non collisionale, e percorrono geodetiche timelike nello spaziotempo. Qualsiasi perturbazione di ampiezza inferiore alla distanza attraversata entro il tempo  $t$  dalle particelle viene smorzata. La scala di free-streaming è quindi definita come lo spazio percorso da una particella di materia oscura con velocità  $v(t)$  dall'origine dell'universo fino all'epoca che si sta analizzando. Se assumiamo uno scenario di CDM, possiamo tuttavia trascurare qualsiasi effetto di dissipazione nella materia oscura, poiché la massa corrispondente alla lunghezza di free streaming è ininfluente dal punto di vista cosmologico e quindi tutte le perturbazioni in questa componente possono crescere e portare alla formazione di strutture. Ciò è piuttosto importante in quanto permette un'evoluzione gerarchica di tipo "bottom - up", secondo la quale gli oggetti virializzati presenti oggi abbiano avuto origine attraverso l'agglomerarsi di strutture più piccole. Il modello bottom-up è confermato dalle osservazioni e dall'analisi dello spettro di potenza delle fluttuazioni, il quale mostra come le perturbazioni su piccola scala (grandi  $k$ ) abbiano maggiore ampiezza rispetto a quelle su larga scala.

### **Epoche successive alla ricombinazione $t > t_{rec}$**

Sopra l'orizzonte la situazione è analoga alla precedente, con le fluttuazioni di materia oscura che governano l'evoluzione; entro l'orizzonte invece, una volta che le particelle di materia barionica si sono disaccoppiate dalla radiazione, esse subiscono l'instabilità gravitazionale e cadono nelle buche di potenziale generate dalla materia oscura. La massa corrispondente alla lunghezza di Jeans per i barioni crolla di circa 10 ordini di grandezza rispetto a prima della ricombinazione, raggiungendo un valore di  $10^5 - 10^6 M_{\odot}$ , cosmologicamente trascurabile; le perturbazioni nella componente barionica subiscono una crescita accelerata per seguire l'andamento di  $\delta_{DM}$ . Le fluttuazioni nella densità di radiazione invece continuano ad oscillare e decadono con l'espansione.

Man mano che ci avviciniamo alla nostra epoca, i contributi di curvatura ed energia di vuoto nelle equazioni di Friedmann per l'universo di background non saranno

più ignorabili, e dunque il modello EdS non potrà più essere applicato per descrivere l'espansione. Come conseguenza, anche l'evoluzione delle perturbazioni subirà una modifica a causa del termine di frizione  $2\frac{a}{\dot{a}}\dot{\delta}_k$  nell'equazione (2.10).

Nel grafico seguente (figura 2.2) riportiamo l'andamento per le fluttuazioni nella componente di materia in funzione del redshift, normalizzate a 1 per  $z = 0$ , nel caso di tre modelli di universo. La linea rossa rappresenta l'evoluzione delle perturbazioni in un universo di materia senza curvatura (EdS), la linea verde identifica il caso di un universo aperto con  $\Omega_m = 0.3$ , mentre la linea azzurra tratteggiata individua l'andamento nel caso di un universo di materia senza curvatura con costante cosmologica  $\Omega_\Lambda = 0.7$ . La figura 2.3 mostra invece i risultati di una simulazione numerica N-body per il modello EdS (in basso) e per il modello con  $\Omega_m = 0.3$  e  $\Omega_\Lambda = 0.7$  (in alto). Le regioni cerchiata in giallo rappresentano ammassi di galassie; in queste zone il contrasto di densità vale circa  $10^4 \rho_b$  e dunque la loro descrizione non può essere effettuata applicando la teoria lineare (vedere paragrafo 2.3).

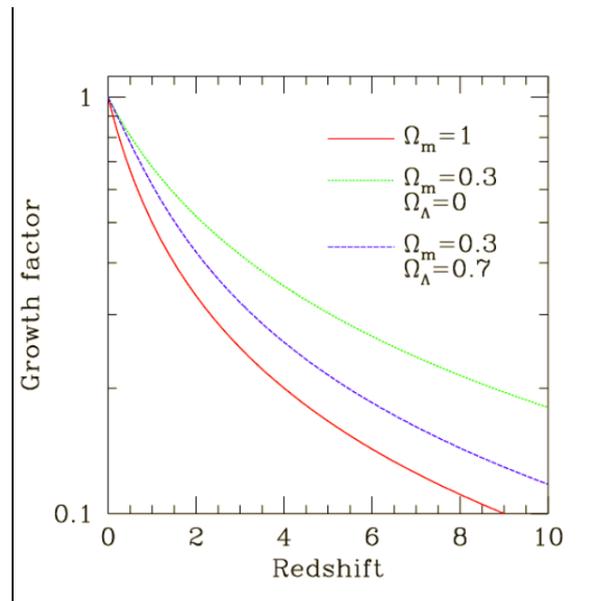


Figura 2.2: Evoluzione delle perturbazioni nel caso di un universo dominato dalla materia piatto (rosso), aperto (verde) e nello scenario del modello standard (linea azzurra tratteggiata).

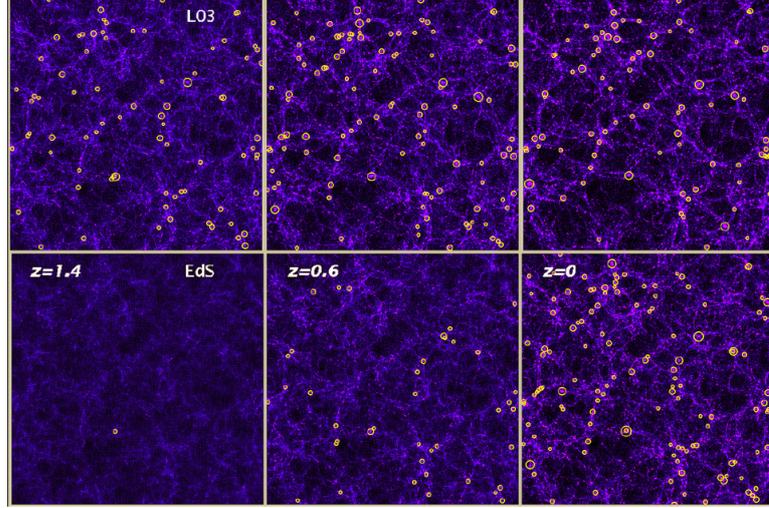


Figura 2.3: Simulazione numerica N-body per differenti valori del redshift nel caso di un universo EdS (in basso) e  $\Lambda$ CDM (in alto). Ciascuno dei riquadri mostra una regione di  $250h^{-1} \times 75h^{-1} Mpc$ ; ogni simulazione contiene circa  $2 \times 10^6$  particelle. Figura da Borgani & Guzzo, 2001[12].

## 2.2 Teoria relativistica delle perturbazioni

Nel caso di perturbazioni la cui dimensione sia confrontabile o maggiore di quella dell'orizzonte, o il cui contenuto non possa essere trattato come un fluido newtoniano, è importante sviluppare una teoria più generale che permetta di descriverne l'evoluzione nel tempo in regime lineare. Non scenderemo molto nel dettaglio, tuttavia dovremo discutere alcuni risultati derivanti dall'approccio relativistico, fondamentali per gli obiettivi di questa tesi.

L'idea di base è molto semplice: invece di fluttuazioni nella densità del fluido, si studiano fluttuazioni nella metrica rispetto ad uno spaziotempo di background; esse vengono collegate alle perturbazioni nel campo di densità attraverso le equazioni di Einstein:

$$(\delta G)_{\mu\nu} = -8\pi G(\delta T)_{\mu\nu}.$$

In aggiunta, la legge di conservazione covariante per il tensore energia-impulso  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$  fornisce una descrizione di come cambia temporalmente il contenuto della perturbazione. Utilizzando queste equazioni è possibile analizzare un generico contra-

sto di densità (in regime lineare) qualunque sia la scala della perturbazione e il tipo di materia presente in essa. La complessità nell'uso di tale formulazione deriva principalmente dal formalismo richiesto dalla relatività generale, e dalla libertà nella scelta del sistema di coordinate, o *scelta di gauge*.

### 2.2.1 La metrica di FLRW perturbata

Consideriamo uno spaziotempo descritto dalla metrica di FLRW (1.3); per quanto detto alla fine della sezione 1.3, possiamo porre  $k = 0$ , e dunque  $f(\chi) = \chi$ . Ciò che otteniamo è conforme allo spaziotempo di Minkowski a meno del fattore di scala  $a^2(\tau)$ . Scrivendo il tensore metrico in coordinate cartesiane, si ottiene:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = a^2(\tau) \begin{bmatrix} -1 & \vec{0} \\ \vec{0} & \delta_{ij} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Immaginiamo ora di avere una perturbazione  $\delta g$  che modifichi la metrica di fondo  $\bar{g}$  in modo tale che

$$\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu},$$

con  $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |\bar{g}_{\mu\nu}|$ . La fluttuazione può essere scritta come

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\tau) \begin{bmatrix} -2\phi & w_i \\ w_i & -2e\delta_{ij} + 2h_{ij} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

dove  $w_i$ ,  $\phi$  e  $h_{ij}$  sono funzioni dei punti dello spaziotempo e  $h$  ha traccia nulla;  $e$  rappresenta il numero di Nepero. Suddividendo opportunamente  $w_i$  e  $h_{ij}$ , è possibile decomporre la perturbazione in una parte scalare, in una vettoriale e in una tensoriale. Scriviamo quindi

$$w_i = \partial_i w + w_i^\perp, \quad \text{con } \nabla \times (\nabla w) = 0 \text{ e } \nabla \cdot \vec{w}^\perp = 0, \quad (2.19)$$

$$h_{ij} = D_{ij} h + h_{(i;j)} + h_{ij}^\top, \quad (2.20)$$

con  $D_{ij} = D_i D_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2$ . Il simbolo  $(i; j)$  indica la derivata covariante simmetrizzata rispetto agli indici spaziali  $i$  e  $j$ , mentre  $D_i$  rappresenta la derivata covariante rispetto al solo indice  $i$  (si è introdotta la notazione ”;” e ”D” in questa sezione per evitare confusione con l’operatore gradiente  $\nabla$ ). Per le componenti di  $h_{ij}$  vale:

$$\partial^i h_{ij}^\top = 0; \quad h_{ij}^\top = h_{ji}^\top; \quad (h^\top)^i{}_i = 0; \quad (2.21)$$

$$\partial^i h_i = 0. \quad (2.22)$$

A questo punto la perturbazione della metrica può essere scritta come segue:

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= \delta g_{\mu\nu}^S + \delta g_{\mu\nu}^V + \delta g_{\mu\nu}^T = \\ &= a^2(\tau) \left( \begin{bmatrix} -2\phi & \partial_i w \\ \partial_i w & -(2e\delta_{ij} + \frac{2}{3}\nabla^2 h\delta_{ij}) + 2D_i D_j h \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & w_i^\perp \\ w_i^\perp & 2h_{(i;j)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2h_{ij}^\top \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove  $S$ ,  $V$  e  $T$  stanno rispettivamente per scalare, vettoriale e tensoriale. Introduciamo la quantità

$$\psi = e + \frac{1}{3} \nabla^2 h$$

in modo che, nel primo addendo dell’eq. (2.23), la parte puramente spaziale diventi

$$-2\psi\delta_{ij} + 2D_i D_j h.$$

Vedremo come l’imposizione che le equazioni di campo siano soddisfatte, cioè che l’Universo sia descritto dalla teoria della Relatività Generale, porti alla condizione  $\phi = \psi^1$ .

La decomposizione in modi scalari, vettoriali e tensoriali serve per identificare fenomeni distinti: le perturbazioni scalari sono legate al potenziale gravitazionale e sono

<sup>1</sup>Bisogna tenere presente che questo vale solo se siamo in regime lineare

importanti per descrivere la formazione delle strutture. Le perturbazioni vettoriali rappresentano invece effetti gravito-magnetici che inducono rotazioni, quelle tensoriali descrivono le onde gravitazionali. Per i nostri scopi saranno utili solo le prime, sfrutteremo allora i gradi di libertà nostra disposizione per eliminare le componenti che non ci interessano. Questo equivale a fissare una specifica *gauge*.

### 2.2.2 La libertà di Gauge

Per descrivere una quantità rappresentativa della perturbazione (ad esempio il contrasto di densità  $\frac{\delta\rho}{\rho}$ ) è necessario stabilire una corrispondenza tra i punti dello spaziotempo di fondo e quelli nello spaziotempo perturbato. Purtroppo tale legame non è univoco, in quanto una qualsiasi trasformazione di coordinate nello spaziotempo descritto da  $g_{tot} = \bar{g} + \delta g$  produce un cambiamento nella corrispondenza sopra nominata, anche avendo fissato la metrica di background. Questa libertà nella scelta del sistema di coordinate è chiamata *libertà di gauge*. Consideriamo un punto  $P$ , identificato dalle coordinate  $x^\alpha$  nel background. Si esamini ora lo stesso punto visto nello spaziotempo perturbato, ma descritto con due differenti sistemi di coordinate  $\tilde{x}^\alpha$  e  $\hat{x}^\alpha$ , per i quali  $P$  diventa rispettivamente  $\tilde{P}(\tilde{x})$  e  $\hat{P}(\hat{x})$ . Ovviamente, per costruzione:

$$P(x) = \tilde{P}(\tilde{x}) = \hat{P}(\hat{x}),$$

in quanto rappresentano tutti e tre lo stesso punto. Inoltre, poichè abbiamo supposto che la perturbazione fosse piccola, i sistemi di coordinate non differiranno di molto tra loro. Vogliamo allora chiederci quali siano le coordinate di  $\tilde{P}$  rispetto al sistema  $\hat{x}^\alpha$ . Si può porre, senza perdere in generalità

$$\hat{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) + \xi^\alpha, \quad (2.24)$$

dove  $\xi^\alpha$  sono parametri infinitesimi. Questa è nota come *trasformazione di gauge* e non cambia la fisica nei sistemi (le equazioni di Einstein continuano a valere), tuttavia ogni scelta diversa della trasformazione, e quindi di  $\xi$ , produce differenti valori per le grandezze che stiamo analizzando. Proprio per questo motivo è utile lavorare con

quantità gauge-invarianti, anche perché, per definizione, tutte le grandezze osservabili sono gauge-invarianti; ad esempio per  $\phi$  e  $\psi$  si possono definire i *Potenziali di Bardeen* [3]

$$\begin{aligned}\Phi &= \phi + \frac{1}{a} [(w - h')a]' \\ \Psi &= \psi - \frac{a'}{a}(w - h'),\end{aligned}\tag{2.25}$$

dove l'indice primo indica la derivata rispetto alla coordinata radiale. Si dimostra che questi oggetti non si modificano nel passaggio da un sistema di coordinate ad un altro tramite eq. (2.24).

### Gauge Newtoniana Conforme

Una particolare scelta di gauge è quella in cui si pongono  $w_i = 0$  e  $h_{ij} = 0$ . In questo modo si ignorano i contributi dovuti alle componenti vettoriali e tensoriali e la fluttuazione  $\delta g$  si riduce alla sola

$$\delta g^S = \begin{bmatrix} -2\Phi & 0 \\ 0 & -2\Psi \end{bmatrix}.$$

Da notare che in questo caso i potenziali di Bardeen coincidono proprio con  $\phi$  e  $\psi$ . Possiamo allora scrivere l'elemento di distanza per la metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker perturbata  $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau) [-(1 + 2\Phi)d\tau^2 + (1 - 2\Psi)\delta_{ij} dx^i dx^j].\tag{2.26}$$

La metrica sarebbe conformalmente equivalente a quella che si otterrebbe facendo il limite newtoniano (nel precedente capitolo ne abbiamo ricavato la componente  $g_{00}$ ) nel caso in cui  $\phi$  fosse uguale a  $\psi$ . Per questo motivo la scelta di gauge prende il nome di gauge Newtoniana conforme. Definiamo il tempo proprio  $\Theta$  in questo caso come

$$\Theta = \int \sqrt{-ds^2} = \int a(\tau) d\tau \sqrt{1 + 2\Phi - (1 - 2\Psi)\delta_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}}.\tag{2.27}$$

Supponiamo ora di voler risolvere le equazioni di Einstein per la metrica perturbata. Dovremo considerare una fluttuazione  $\delta T_{\mu\nu}$  rispetto ad un tensore energia impulso di fondo che è quello del fluido perfetto, calcolare le componenti del tensore di Ricci al primo ordine in  $\Phi$  e  $\Psi$  ed eguagliare per ottenere una serie di relazioni tra i potenziali e le perturbazioni nella densità, nella pressione e nella velocità del fluido. Per i dettagli della derivazione si rimanda al capitolo 4 del libro di Mo, Bosch e White [44]; quello che invece interessa a noi è una particolare equazione che emerge dal conto. Nello spazio degli impulsi  $k$  si ha:

$$k^2(\Phi - \Psi) = -8\pi G a^2 \bar{P}\Pi, \quad (2.28)$$

dove

$$\bar{P}\Pi = \frac{3}{2} \left( \frac{k_i k_j}{k^2} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \left( T^i_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} T \right)$$

rappresenta il *tensore di Stress* ed è nullo per un fluido perfetto. Ciò implica che  $\Phi - \Psi = 0$  nel nostro caso, e quindi  $\Phi = \Psi$ . L'eq. (2.28) è una sorta di equazione di Poisson per la differenza dei potenziali.

Immaginiamo ora che un qualche esperimento fornisca invece  $\Phi \neq \Psi$ ; la prima cosa che potremmo supporre è di aver sbagliato a considerare  $\bar{P}\Pi = 0$ , ovvero che la descrizione del fluido perfetto non sia la più adatta. In effetti se rilasciassimo il principio cosmologico, il tensore energia impulso potrebbe avere un'altra forma, magari un fluido non ideale con differenti componenti di pressione e uno stress non nullo. Tuttavia le osservazioni del fondo cosmico di Microonde (COBE, WMAP, PLANCK) mostrano che le anisotropie sono dell'ordine di  $\sim 10^{-5}$ , e di conseguenza la scelta di un background che obbedisca al principio cosmologico sembra appropriata.

Un'altra possibilità potrebbe essere data dal fatto che l'equazione (2.28) non sia valida; poichè essa si ottiene imponendo le equazioni di Einstein, allora ciò significa che la Relatività Generale non possa più essere usata per descrivere l'Universo a questa scala, ma sia necessaria una qualche estensione, un modello di *gravità modificata*. La metrica (4.21) fornisce dunque un modo per evidenziare deviazioni dalla relatività generale tramite lo studio dei potenziali scalari; vedremo nel capitolo 4 come relazionare questi potenziali ai profili di massa derivati dal lensing gravitazionale e dalla dinami-

ca dell'ammasso per applicare il risultato al caso specifico dell'ammasso di galassie MACS 1206 ( $z = 0.44$ ).

### 2.3 Regime non lineare: collasso sferico

Nei precedenti paragrafi abbiamo visto come trattare le perturbazioni in regime lineare, ovvero quando l'ampiezza delle fluttuazioni è sufficientemente piccola rispetto al background da poter approssimare le equazioni al primo ordine. Tuttavia, osservando l'Universo oggi, possiamo notare come le strutture presenti abbiano una densità molto maggiore rispetto alla densità media, in questo caso la teoria sviluppata nella prima parte del capitolo non può essere applicata (cfr. figura 4.3); per capire come allora si siano formati oggetti quali galassie e ammassi di galassie è necessario abbandonare la trattazione lineare e studiare cosa accade quando  $\delta \gg 1$ .

In generale è molto difficile descrivere analiticamente l'evoluzione di sistemi legati gravitazionalmente in regime non lineare, per questo motivo si ricorre all'uso di simulazioni numeriche; esistono tuttavia alcuni modelli "guida" risolvibili per via analitica, applicabili solo nel caso di particolari geometrie della perturbazione, ma che possono ad ogni modo essere utili per la comprensione del problema. Il modello più semplice di questo tipo è il *collasso sferico*, proposto per la prima volta da Prartridge e Peebles nel 1967 [47].

Supponiamo di avere un universo di tipo Einstein-de Sitter al cui interno sia presente una regione sovradensa sferica, con densità iniziale

$$\rho(r, t_i) = \rho_b(t_i) + \delta\rho(r, t_i) = \rho_b(t_i)[1 + \delta_i(r)], \quad (2.29)$$

con  $\delta_i(r) = \delta(r, t_i)$ . Possiamo immaginare tale regione sovradensa come un universo chiuso a sé stante dominato dalla materia, assumendo che gli effetti della pressione siano trascurabili; supponiamo inoltre che la lunghezza d'onda della perturbazione sia molto minore del raggio dell'orizzonte, così da poter considerare valida la trattazione Newtoniana. Se al tempo  $t = t_i$  la fluttuazione è ancora piccola, essa evolverà con il

background secondo l'eq. (2.10). Per il modello EdS si ottiene

$$\delta(t) = \delta_+(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3} + \delta_-(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{-1}, \quad (2.30)$$

avendo usato la soluzione eq.(2.15) del paragrafo 2.1.1. Imponendo ora che la velocità peculiare della perturbazione al bordo  $v(t_i)$  sia nulla, si ricava facilmente la condizione

$$\delta_+(t_i) = \frac{3}{5}\delta(t_i).$$

Possiamo immaginare che il modo decrescente  $\delta_-$  decada dopo un tempo sufficientemente breve, e quindi porre  $\delta \simeq \delta_+(t_i)$ .

Se ora consideriamo la perturbazione come modello di Friedmann chiuso, essa sarà caratterizzata dal parametro

$$\Omega_p(t_i) = \frac{\rho_b(t_i)(1 + \delta_i)}{\rho_c(t_i)} = \Omega_b(t_i)(1 + \delta(t_i)). \quad (2.31)$$

Affinché ad un determinato istante  $t_m$  la perturbazione cessi di crescere con il background ed inizi a collassare è necessario che  $\Omega_p(t_i) > 1$ . Questa condizione può essere tradotta in una relazione per il modo  $\delta_+$ :

$$\delta_+(t_i) = \frac{3}{5}\delta_i > \frac{3}{5} \frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m(1 + z_i)}; \quad (2.32)$$

$\Omega_m$  rappresenta il parametro di densità oggi per l'universo di background. Se  $\Omega_m \geq 1$  tutte le perturbazioni possano arrestare la loro espansione ad una data epoca e cominciare il collasso, mentre se  $\Omega_m < 1$  la fluttuazione deve superare il valore critico di eq.(2.32).

La descrizione dell'evoluzione per un universo chiuso è data dall'equazione di Friedmann (1.22):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_i}\right)^2 = H^2(t_i) \left[ \Omega_p(t_i) \frac{a_i}{a} + 1 - \Omega_p(t_i) \right], \quad (2.33)$$

dove  $a$  indica il fattore di espansione dell'universo separato che descrive la perturbazione sferica. Le soluzioni per questo caso sono espresse nell'eq. (1.31). Come abbiamo

accennato nel capitolo 1, questo modello prevede un punto di massima espansione per  $\theta = \pi$ , caratterizzato da

$$t_m = \frac{\pi\Omega_p(t_i)}{2H(t_i)[\Omega_p(t_i) - 1]^{3/2}}, \quad a_m(t_m) = a(t_i)\frac{\Omega_p(t_i)}{\Omega_p(t_i) - 1}, \quad (2.34)$$

al quale corrisponde una densità

$$\rho_p(t_m) = \frac{3\pi}{32Gt_m^2}. \quad (2.35)$$

Tenendo conto che la densità del background al tempo  $t_m$  vale

$$\rho_b(t_m) = \frac{1}{6\pi Gt_m^2},$$

possiamo stimare il rapporto tra le due come

$$\xi = \frac{\rho_p(t_m)}{\rho_b(t_m)} \simeq 5.6, \quad (2.36)$$

che implica un valore per l'ampiezza della perturbazione  $\delta_+(t_m) \simeq 4.6$ . Se avessimo continuato ad utilizzare la teoria lineare di eq.(2.30), avremmo ottenuto

$$\delta_+^{lin}(t_m) = \delta_+(t_i) \left(\frac{t_m}{t_i}\right)^{2/3} \simeq 1.07.$$

Dopo  $t_m$  la fluttuazione inizia la fase di collasso, che, se si potesse ancora trascurare la pressione, porterebbe alla formazione di una singolarità in un tempo  $t_c \sim 2t_m$ . In realtà, per una perturbazione barionica, l'alta densità induce la compressione ed il conseguente riscaldamento della materia, favorendo la comparsa di gradienti di pressione ed onde d'urto in una serie di oscillazioni smorzate attorno ad un raggio di equilibrio  $R_{vir}^2$ . La situazione stabile sarà raggiunta in un tempo  $t_{vir}$ , l'Energia totale della fluttuazione

---

<sup>2</sup>questo discorso vale anche per la materia oscura; in tal caso la configurazione di equilibrio si ottiene grazie all'effetto di free streaming

all'equilibrio è ottenibile mediante il teorema del viriale:

$$E_{vir} = \frac{V_{vir}}{2} = -\frac{1}{2} \frac{3GM^2}{5R_{vir}}, \quad (2.37)$$

dove  $V_{vir}$  rappresenta l'energia potenziale nella situazione di equilibrio e  $M$  è la massa totale della fluttuazione sotto l'ipotesi che essa non diminuisca durante il collasso. Poiché al momento della massima espansione l'energia è, per definizione, solo potenziale

$$E_m = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_m}, \quad (2.38)$$

possiamo ricavare una stima per  $R_{vir} \simeq \frac{1}{2}R_m$  che implica una densità  $\rho_p(t_{vir}) = 8\rho_p(t_m)$ . Se assumiamo che al tempo  $t_{vir}$  l'Universo sia ancora descritto dal modello EdS, possiamo ricavare il contrasto di densità

$$\delta_+(t_{vir}) \sim 8 \times 5.6 \simeq 178,$$

mentre un'estrapolazione dalla teoria lineare avrebbe fornito  $\delta_+^{lin}(t_{vir}) \sim 1.68$ .

## Capitolo 3

# Fenomenologia degli ammassi di galassie

Nel precedente capitolo abbiamo sommariamente discusso l'evoluzione delle perturbazioni nella densità dell'Universo in approssimazione lineare e nel caso semplice di collasso sferico per il regime non lineare. Da ciò possiamo farci un'idea generale di come avvenga la formazione delle strutture presenti oggi: le fluttuazioni nella materia oscura crescono a tutte le scale cosmologicamente rilevanti, preparando le buche di potenziale nelle quali i barioni "cadono" dopo la ricombinazione. Da quel momento le perturbazioni barioniche evolvono seguendo quelle nella componente oscura, fino a collassare quando il contrasto di densità diventa sufficientemente grande.

Le strutture osservabili più estese che hanno subito il collasso gravitazionale sono gli ammassi di galassie. Essi rappresentano il punto d'incontro tra astrofisica e cosmologia; infatti la loro dinamica interna, complessivamente dominata dalla gravità, la loro abbondanza e la distribuzione spaziale forniscono indicazioni sul modello cosmologico, mentre a scale comparabili con le singole galassie avvengono processi legati alla composizione e alle proprietà delle galassie stesse e del mezzo intergalattico che le circonda.

In questo breve capitolo illustreremo le proprietà osservative degli ammassi, individuando gli aspetti più rilevanti ai fini della nostra analisi; daremo poi una descrizione

del progetto CLASH, da cui derivano i dati usati per la ricostruzione dei profili di massa dell'ammasso MACS 1206, che sfrutteremo per ricavare il risultato originale di questa tesi nei capitoli 4 e 5. Per informazioni più dettagliate sulla struttura e sulla formazione degli ammassi di galassie si faccia riferimento a Allen et al., 2011 [2]; Kravstov & Borgani, 2012 [40].

### 3.1 La struttura degli ammassi di galassie

La presenza in cielo di oggetti di natura nebulare, ovvero estesi e non puntiformi, differenti da semplici stelle o pianeti, era nota fin dal diciottesimo secolo, come testimoniano gli studi di William Herschel e Charles Messier. Quest'ultimo realizzò un primo catalogo di tali nebulose tra il 1730 e il 1817. Fu però solo nella prima metà del Novecento che ci si rese conto di come gli oggetti in questione fossero per buona parte galassie ellittiche o a spirale localizzate ad una grande distanza da noi (Hubble, 1926); di conseguenza apparenti agglomerati di nebulose risultarono essere in realtà sistemi di dimensioni enormi composti da galassie.

Zwicky nel 1933 sfruttò le misure del redshift delle galassie, effettuate da Hubble & Humason (1931), per stimare, mediante la dispersione delle velocità per le galassie localizzate nell'ammasso Coma, la massa di quest'ultimo sotto l'ipotesi di equilibrio viriale; dal suo lavoro si ottenne un valore che eccedeva di un fattore  $\sim 200$  quello calcolato combinando le masse delle singole stelle presenti in tutto l'ammasso. Ciò fece supporre la presenza di una grande quantità di materia invisibile, che Zwicky ribattezzò *Materia Oscura*, distribuita tra le galassie. Successive osservazioni (Cavaliere, Gursky & Tucker 1971 [17]; Forman et al., 1972 [26]; Kellogg et al., 1972 [35]) rivelarono che una parte di questa materia mancante nell'ammasso Coma era costituita da gas che emetteva nella banda X per effetto bremsstrahlung termico, chiamato Mezzo Inter-Ammasso (ICM - Intra Cluster Medium).

Nel 1958 George Abell pubblicò un catalogo di 2712 ammassi di galassie basato sulle informazioni dalla Palomar Sky Survey; la lista, che inizialmente comprendeva solo gli ammassi dell'emisfero Nord, venne successivamente ampliata inserendo i dati provenienti dalla "Southern Survey" per un totale di 4073 oggetti a redshift  $z \leq 0.2$ .

I criteri utilizzati da Abell per la selezione degli ammassi sono essenzialmente due<sup>1</sup>:

(i). *Criterio di ricchezza*: un ammasso deve contenere un minimo di 50 membri con magnitudine apparente compresa tra  $m_3$  e  $m_3 + 2$ , dove  $m_3$  è la magnitudine apparente della terza galassia più brillante. La ricchezza è dunque definita come il numero di galassie con magnitudine in questo intervallo. In realtà Abell divise gli ammassi in 6 gruppi di ricchezza, da 0 a 5 in ordine crescente, inserendo nel primo gruppo anche quelli contenenti da 30 a 49 membri (noti come ammassi "poveri").

(ii) *Criterio di Compattezza*: solo le galassie che distano fino a  $1.5 h^{-1} Mpc$  dal centro dell'ammasso sono selezionate come membri. Il raggio massimo è chiamato raggio di Abell e, per  $h = 0.7$  vale circa  $2 Mpc$ . Da notare che il criterio di compattezza, avendo stabilito la ricchezza dell'ammasso, equivale ad una misura della densità.

I primi due ammassi di galassie maggiormente studiati, data la loro vicinanza e la loro ricchezza, sono Abell 1656, anche detto ammasso Coma o ammasso della Chioma ( $z = 0.231$ , Fig. 3.1 sinistra) e l'ammasso della Vergine ( $z = 0.0036$ , Fig 3.2). Quest'ultimo, la cui massa fu stimata per la prima volta da Smith nel 1936, non era incluso nell'originario catalogo di Abell poiché troppo esteso per poter essere contenuto in una singola lastra fotografica della Palomar Sky Survey. L'ammasso della Vergine presenta una struttura piuttosto irregolare, asimmetrica, con evidenti sottostrutture (tre quelle maggiormente significative, in corrispondenza delle 3 galassie più brillanti); ciò indica che la dinamica interna non ha ancora raggiunto una situazione di equilibrio, ovvero l'ammasso non è *dinamicamente rilassato*.

Un chiaro esempio di oggetto rilassato è invece l'ammasso Abell 383 ( $z = 0.18$ , Fig 3.1, destra): la distribuzione delle galassie è approssimativamente a simmetria sferica, senza palesi sottogruppi identificabili. Al centro dell'ammasso si trova la galassia più brillante (BCG - Brightest Cluster Galaxy), ed essa coincide all'incirca con il picco della distribuzione proiettata dei fotoni nella banda X (Fig 3.1, destra), anch'essa concentrica. Vedremo nei successivi capitoli come la caratteristica di rilassamento sia

---

<sup>1</sup>La classificazione di Abell prevede anche l'analisi di altre proprietà, come la distanza, la latitudine galattica e la forma della distribuzione delle galassie nell'ammasso

fondamentale per la determinazione del profilo di massa.

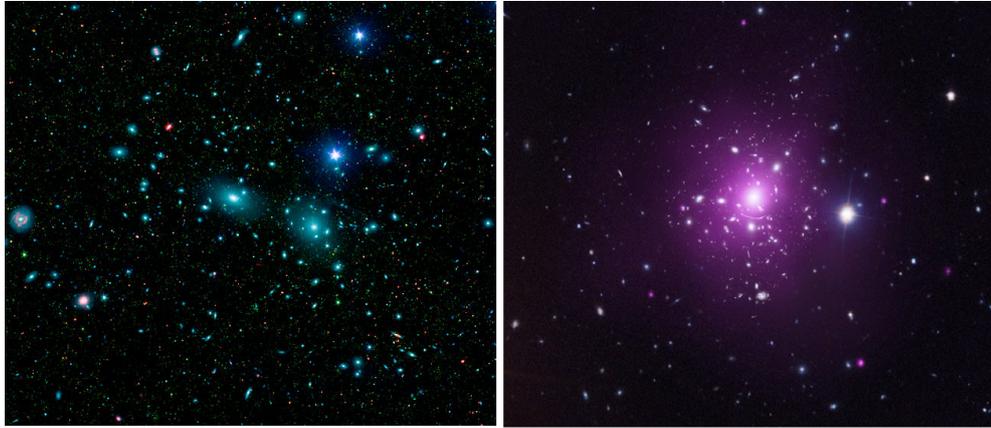


Figura 3.1: Sinistra: immagine dell'ammasso della Chioma ottenuta combinando i dati nel visibile (colore falsato in blu) dalla Sloan Digital Sky Survey e nell'infrarosso (in rosso e verde) dallo Spitzer Space Telescope della NASA. Destra: immagine composta dell'ammasso Abell 383 in ottico e X. L'area in viola mostra la distribuzione del gas caldo che emette in X ad una temperatura di  $10^8 K$ . Immagine da: NASA/CXC/Caltech/A.Newman et al./Tel Aviv/A. Morandi & M. Limousin (banda X), NASA/STScI, ESO/VLT, SDSS (visibile).

### 3.1.1 Proprietà delle galassie di un ammasso

Un generico ammasso di galassie ha massa complessiva tipicamente compresa tra  $10^{14}$  e  $10^{15} M_{\odot}$ ; di questa solo circa il 2% è contenuto nelle singole galassie (Lin et al., 2003[42]; Gonzalez et al., 2007[30]).

La popolazione galattica in un ammasso è per lo più caratterizzata da galassie ellittiche (fino all'80% del totale negli ammassi di forma regolare) e ciò fa supporre che le galassie subiscano delle modifiche alla loro morfologia quando si trovano in regioni più dense rispetto alla media, come un ammasso; vari meccanismi sono stati proposti per spiegare questo fenomeno (si veda Mo-Bosch-White, capitolo 12.5 [44]). Le galassie ellittiche tendono ad essere maggiormente concentrate nella regione centrale e presentano indicazioni di deboli processi di formazione stellare; per meglio dire, specialmente negli ammassi a  $z < 1$ , la *rate* di formazione stellare diminuisce man mano che ci si avvicina verso il centro dell'ammasso. In aggiunta, la dispersione delle velocità osservata per le galassie centrali risulta minore rispetto alle velocità delle ga-

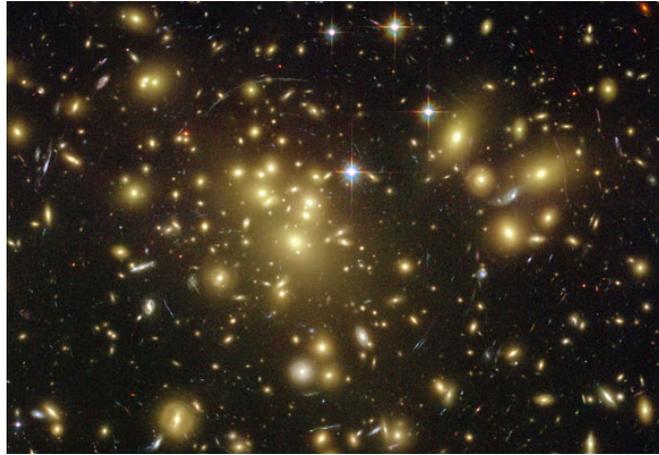


Figura 3.2: Ammasso della Vergine. Immagine dal telescopio spaziale Hubble (HST).

lassie più esterne, con una differenza in certi casi superiore al 30%; questo fenomeno è noto come *segregazione dinamica*. La dispersione delle velocità, come vedremo nel prossimo capitolo, è una delle osservabili dinamiche fondamentali che permettono di determinare il profilo di massa attraverso l'equazione di Jeans (4.79). La segregazione dinamica induce a pensare che se si considerano separatamente le due zone (interna ed esterna) dell'ammasso si ottengano due profili incompatibili tra loro. Tuttavia nell'equazione (4.79) compare anche la densità numerica di galassie, che nel caso della regione centrale è maggiore e compensa la minore velocità osservata.

La densità numerica di galassie in funzione della distanza dal centro dell'ammasso è ben descritta da una funzione

$$n(r) \propto \frac{1}{r^\gamma (r + r_s)^{3-\gamma}},$$

dove  $r_s$  è chiamato raggio di scala. Tipicamente  $\gamma \sim 1$  e  $r_s \sim 20\%$  del raggio dell'ammasso (van der Marel et al., 2000 [68]; Lin et al., 2004b [43]). Il profilo della densità numerica risulta molto simile al profilo di Navarro Frenk e White che descrive l'alone di materia oscura ottenuto attraverso simulazioni numeriche (Navarro et al., 1997 [46]), di cui parleremo nel capitolo 5; questo suggerisce che le galassie siano dei buoni tracciatori per la distribuzione di massa dell'ammasso.

### 3.1.2 Il Mezzo Inter-Amasso

La maggior parte della materia barionica si trova sotto forma di plasma ionizzato alla temperatura di diversi  $keV$  chiamato ICM, con una densità che varia da  $10^{-1}$  a  $10^{-4} cm^{-3}$ . Questo plasma emette fotoni nella banda X con un luminosità di  $10^{43} - 10^{45} erg s^{-1}$  a causa dell'interazione degli elettroni liberi con gli ioni (per lo più protoni e nuclei di elio); sono anche presenti di elementi più pesanti come ferro, carbonio ed ossigeno alcuni solo parzialmente ionizzati, che producono righe di emissione in X, con abbondanze tipiche pari ad un terzo di quelle nel Sole.

Dalle analisi dello spettro in banda X si può determinare la temperatura dell'ICM, mentre attraverso il profilo di brillantezza superficiale siamo in grado di risalire alla densità del gas (Suto et al., 1998 [66]); l'emissività  $\epsilon_v$  dovuta al bremsstrahlung termico, definita come l'energia emessa per unità di tempo, frequenza e volume, è data da:

$$\epsilon_v = \frac{2^5 \pi e^6}{3 m_e c^3} \left( \frac{2\pi}{3 m_e k_B} \right)^{1/2} n_e T^{-1/2} e^{-h\nu/k_B T} \sum_i Z_i^2 n_i g_{ff}(Z_i, T, \nu), \quad (3.1)$$

dove la somma è sugli ioni che compongono il plasma. Il fattore  $g_{ff}(Z_i, T, \nu)$  è chiamato fattore di Gaunt ed esprime correzioni dovute ad effetti quantistici. Il bremsstrahlung termico produce uno spettro X approssimativamente continuo e per alte temperature ( $T > 3 \times 10^7 K$ ) è il meccanismo di emissione dominante. Per temperature minori la radiazione in X riceve un contributo molto importante dalle righe di emissione degli elementi più pesanti; tali righe sono per lo più dovute ad eccitazione degli atomi a causa delle collisioni tra gli elettroni liberi e quelli degli atomi stessi. In questo caso l'emissività (integrata su tutte le frequenze) si esprime come:

$$\int \epsilon_v^{line} d\nu = n(X^i) n_e \frac{h^3 \nu \Omega(T) B}{4 \omega_{gs}(X^i)} \left[ \frac{2}{\pi^3 m_e^3 k_B T} \right]^{1/2} e^{-\Delta E/k_B T}, \quad (3.2)$$

con  $\Delta E$  è l'energia tra lo stato fondamentale e lo stato eccitato,  $B$  rappresenta il *Branching Ratio* del decadimento,  $\Omega(T)$  è chiamata "intensità di collisione" e generalmente varia lentamente in funzione della temperatura.  $X^i$  indica un certo elemento  $X$  ionizzato  $i$  volte,  $n(X^i)$  la sua densità.

La velocità quadratica media delle particelle di gas nell'ICM  $\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}$  è comparabile con le velocità delle galassie nell'ammasso, facendo supporre che entrambe le componenti barioniche siano in equilibrio in un potenziale gravitazionale comune. Questo ci permette di individuare un modo per la ricostruzione del profilo di massa di un ammasso sfruttando il profilo di densità dell'ICM. Se infatti supponiamo che il gas in un ammasso di galassie sia in equilibrio idrostatico con il potenziale gravitazionale (Sarazin, 2008 [59]), allora la massa totale entro un raggio  $r$  sarà legata alla pressione e alla densità del gas attraverso

$$\rho_{gas}(r) \frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (3.3)$$

dove abbiamo assunto simmetria sferica.  $\rho_{gas}$  e  $P$  sono rispettivamente densità e pressione del gas. Se sfruttiamo l'equazione di stato del gas perfetto  $P = \frac{\rho_{gas} k_B T}{\mu m_p}$  con  $\mu$  che indica la massa media per particella in termini della massa del protone  $m_p$ , possiamo determinare un'espressione del profilo di massa in funzione della temperatura e della densità del gas, ottenendo:

$$M(r) = -\frac{k_B T(r) r}{\mu m_p G} \left[ \frac{d \ln \rho_{gas}(r)}{d \ln r} + \frac{d \ln T(r)}{d \ln r} \right]. \quad (3.4)$$

L'equazione (3.4) è molto simile all'equazione di Jeans che deriveremo nel prossimo capitolo assumendo che la dinamica delle galassie nell'ammasso sia non collisionale; in quel caso, come vedremo, al posto della temperatura la grandezza fondamentale sarà la dispersione delle velocità.

Si pensa che l'elevata temperatura dell'ICM sia dovuta principalmente ad un riscaldamento di tipo gravitazionale; in pratica la grande massa degli ammassi di galassie produce una profonda buca di potenziale, ed il gas è costretto a muoversi molto velocemente sotto l'influenza di questo potenziale. Quando due flussi di gas si scontrano, la collisione produce onde d'urto che riscaldano le particelle. In aggiunta a questo meccanismo, contribuiscono anche effetti di origine non gravitazionale, specialmente nelle regioni centrali e in ammassi molto piccoli; ad esempio le supernove ed i Nuclei Galattici Attivi (AGN- Active Galactic Nuclei) presenti negli ammassi emettono una

gran quantità di energia, agendo come sorgenti di calore per l'ICM.

Nella regione più interna degli ammassi rilassati si osserva tipicamente un picco di emissione in X, che dovrebbe essere collegato ad un'elevata perdita di energia radiata ed un conseguente raffreddamento del gas (Fabian, 1994); tuttavia ciò non corrisponde alla basso tasso di formazione stellare osservato nella BCG e nelle galassie centrali. Inoltre, a causa della grande quantità di gas che dovrebbe raffreddarsi, ci si aspettava la presenza di forti righe di emissione legate a transizioni atomiche di ricombinazione tra  $0.5\text{keV}$  e  $1\text{keV}$ , ma la teoria del "cooling flow" proposta da Fabian per spiegare il meccanismo di raffreddamento fu sviluppata quando ancora non si disponeva della tecnologia per effettuare spettroscopia spazialmente risolta. In realtà le successive osservazioni hanno mostrato che queste righe sono più deboli almeno di un fattore 10 da quanto previsto nel modello di cooling flow e dunque solo una modesta quantità di materia effettivamente si raffredda (Bohringer et al., 2001; Peterson et al., 2001). Deve quindi essere presente un processo di riscaldamento che bilancia la diminuzione della temperatura a seguito dell'irraggiamento: le sorgenti termiche principali responsabili di questo processo sono proprio i nuclei galattici attivi che agiscono da "regolatori" della formazione stellare.

Il rapporto tra la frazione di massa associata alle galassie e quella associata all'ICM vale in media circa 0.1, ma risulta minore nel caso di ammassi più grandi (Fig. 3.3), variando tra  $\sim 0.2$  per  $M \sim 10^{13}M_{\odot}$  fino a  $\sim 0.05$  per  $M \sim 10^{15}M_{\odot}$ . Ad ogni modo, il contributo alla massa totale di un ammasso di galassie dato dai barioni non eccede il 20%, anzi, nel caso di ammassi molto massicci ( $M > 3 \times 10^{14}M_{\odot}$ ), la frazione dei barioni contenuti in essi è molto vicina alla frazione cosmica. Il resto è sotto forma di Materia Oscura, che dunque costituisce la componente dominante dell'ammasso. I suoi effetti sono osservabili attraverso il fenomeno del lensing gravitazionale, ovvero la distorsione della luce proveniente dalle sorgenti nel background causata dalla deformazione dello spaziotempo in prossimità dell'ammasso. In alcune situazioni questo fenomeno è particolarmente evidente grazie alla formazione di immensi archi di luce (strong lensing), ma si manifesta in maniera meno eclatante anche a grandi distanze dal centro dell'ammasso (weak lensing). Il lensing gravitazionale, di cui ci occuperemo in dettaglio nel prossimo capitolo, è uno degli strumenti utilizzati per la ricostruzione del

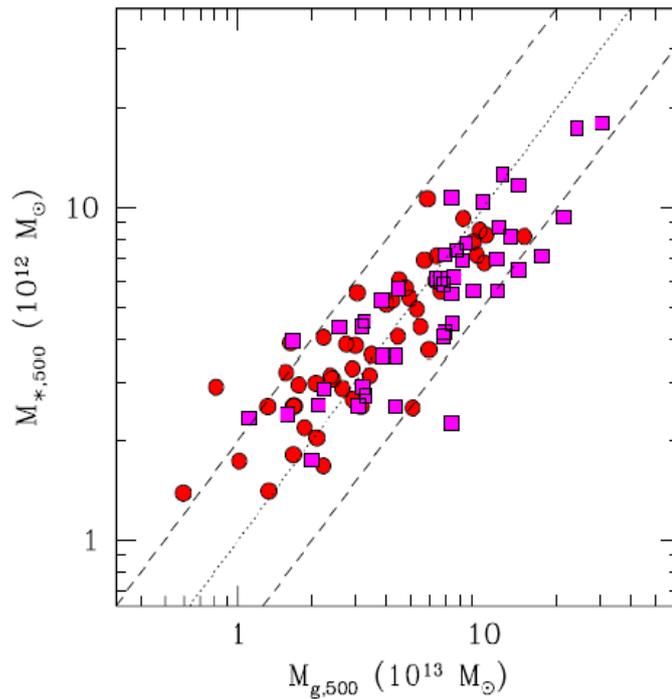


Figura 3.3: Massa delle stelle rispetto alla massa dell'ICM entrambe calcolate entro il raggio  $R_{500}$  definito come il raggio che racchiude un eccesso di densità pari a 500 volte la densità critica a quel dato redshift. I quadratini rappresentano ammassi localizzati a  $0.1 < z < 0.6$ , mentre i cerchi son ammassi a  $z < 0.1$ . La linea punteggiata centrale rappresenta il valore costante del rapporto tra le masse 0.1, mentre le altre due linee tratteggiate indicano i valori 0.2 e 0.05. Figura da Lin et al., 2012.

profilo di massa.

Un effetto molto interessante dovuto alla presenza dell'ICM è chiamato *effetto Sunayev-Zeldovich* (Sunayev & Zeldovich 1970, 1972) e consiste in una piccola distorsione nello spettro del fondo cosmico di microonde dovuta all'interazione dei fotoni del CMB con gli elettroni presenti nel plasma. Gli elettroni cedono parte della loro energia ai fotoni per scattering Compton inverso, causando uno shift misurabile nello spettro della radiazione, che corrisponde ad una variazione nella temperatura pari a  $10^{-4} - 10^{-5} K$ . Poiché questa misura è legata solo alle fluttuazioni nel CMB, è praticamente indipendente dalla distanza e quindi l'effetto Sunayev-Zeldovich costituisce un potente strumento per la localizzazione di ammassi lontani.

Nella figura 3.4 possiamo osservare un esempio della distorsione dei fotoni del CMB

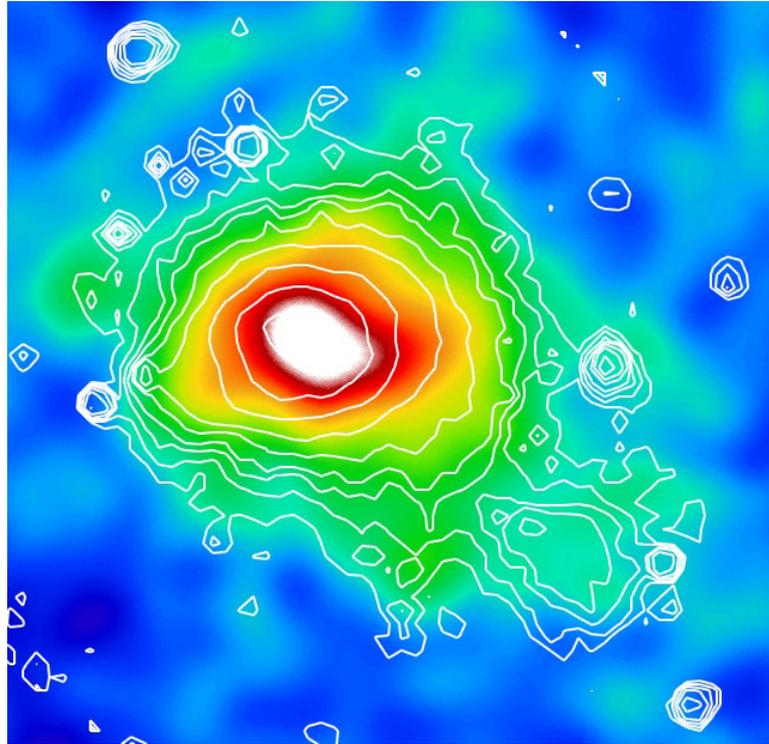


Figura 3.4: Ammasso Coma osservato attraverso l'effetto SZ sui fotoni del CMB. In sovrapposizione sono riportate le osservazioni in X del satellite ROSAT (linee solide bianche) Immagine da Planck Collaboration. Credit:ESA/HFI & LFI consortia.

causata dall'effetto SZ nell'ammasso Coma, realizzato da Planck Collaboration. I differenti colori indicano l'intensità della deformazione nello spettro che dipende dalla frequenza dei fotoni e dalla temperatura del gas. La zona rossa e quella bianca rappresentano la regione centrale dell'ammasso. Le linee bianche identificano invece i contorni di iso-brillanza superficiale per l'emissione in X dai dati del satellite ROSAT; da notare come le zone con maggiore emissione X corrispondano alle zone in cui l'effetto SZ è più marcato.

Per avere un'idea qualitativa di ciò che avviene, consideriamo uno scattering elettrone-fotone nel sistema di riferimento dell'elettrone. Il rapporto tra l'energia del fotone uscente  $\epsilon'$  e l'energia del fotone incidente  $\epsilon$ , se questo viene deviato di un angolo  $\theta$ , vale:

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = \left[ 1 + \frac{\epsilon}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \right]^{-1}. \quad (3.5)$$

Poiché i fotoni del CMB hanno energie molto piccole, i.e.  $\varepsilon \ll m_e c^2$ , lo scattering è essenzialmente elastico nel sistema dove l'elettrone è a riposo. In questo limite (scattering Thomson), indicando con  $\mu$  e  $\mu'$  i coseni direttori per il moto del fotone prima e dopo l'interazione e con  $\beta = v_e/c$  la velocità dell'elettrone rispetto a quella della luce, si ha:

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = e^s = \frac{1 + \beta\mu'}{1 - \beta\mu}, \quad (3.6)$$

nel sistema di riferimento del laboratorio. Qui  $s$  rappresenta la variazione logaritmica dell'energia.

La probabilità che un scattering Compton inverso produca uno shift  $s$  è data da

$$P(s, \beta) = \int [2\gamma^4(1 - \beta\mu)^3]^{-1} d\mu \phi(\mu, \mu') \frac{d\mu'}{ds}, \quad (3.7)$$

con  $\gamma$  che indica il fattore di Lorentz e

$$\phi(\mu, \mu') = \frac{3}{8} \left[ 1 + \mu^2 \mu'^2 + \frac{1}{2}(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) \right].$$

Nel caso in cui abbiamo un gas di elettroni all'equilibrio termico alla temperatura  $T_e$ , possiamo calcolare la distribuzione di probabilità di scattering  $P_1(s)$  tra i fotoni del CMB e il gas (supponendo che ogni fotone interagisca una sola volta) integrando sulla funzione di distribuzione delle velocità degli elettroni. Nel caso in cui la temperatura degli elettroni è sufficientemente bassa (tipicamente  $< 5 \text{ keV}$ ) si può approssimare la funzione  $P_1(s)$  ad una Gaussiana, i cui parametri si ottengono risolvendo l'*equazione di Kompaneets* (Kompaneets, 1956 [37]); che descrive la "diffusione" per il numero di occupazione dei fotoni dovuta all'interazione Compton-inversa. In tal modo:

$$P_K(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y_e}} e^{-(s+3y_e)^2/4y_e}, \quad (3.8)$$

dove  $y_e$  viene chiamato "parametro di comptonizzazione", definito dalla relazione

$$y_e = \int n_e \sigma_T dl \frac{k_B T_e}{m_e c^2},$$

e rappresenta una stima del tempo medio che il fotone passa nel gas di elettroni. L'integrale è esteso alla linea di vista,  $n_e$  è la densità di elettroni, mentre  $\sigma_T$  indica la sezione d'urto dello scattering Thomson.

Se i fotoni del CMB sono descritti da una distribuzione di Planck alla temperatura  $T_{rad}$ , si può dimostrare che la variazione d'intensità specifica nel campo di radiazione è data da (Birkinshaw & Lancaster, 2008 [8]):

$$\Delta I(\nu) = \frac{2h}{c^2} \left( \frac{k_B T_{rad}}{h} \right)^3 y_e \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} [x \coth(x/2) - 4], \quad (3.9)$$

dove abbiamo definito la frequenza riscalata

$$x = \frac{h\nu}{k_B T_{rad}}.$$

L'equazione (3.9) è un'approssimazione che descrive abbastanza bene l'effetto SZ nel caso in cui il gas sia in regime non relativistico. In generale lo spettro  $\Delta I(\nu)$  si ottiene integrando numericamente l'eq. (3.7) sulle velocità ed includendo la probabilità di scattering multiplo tra i fotoni ed il gas di elettroni.

Nella figura 3.5 Carlstrom et al. (2002)[16] mostrano come si modifica lo spettro del CMB a causa dell'effetto SZ termico per un ammasso fittizio di massa 1000 volte maggiore rispetto ad un tipico ammasso di galassie. Possiamo osservare come a basse frequenze ( $x \ll 1$ ) si abbia una diminuzione dell'intensità, ovvero  $\Delta I(\nu) < 0$  nell'eq. (3.9). Ad alte frequenze invece  $\Delta I(\nu) > 0$  e la distorsione SZ produce un aumento dell'intensità.

## 3.2 Il progetto CLASH

Nel Maggio del 2009 si concluse la missione della NASA per la riparazione e il potenziamento del Telescopio Spaziale Hubble *HST*, con l'installazione della *Wide Field Camera 3* (*WFC3*, Kimble et al., 2008); poco dopo venne avviato il programma *Multi-Cycle Treasury* (MCT) con l'ambizioso compito di effettuare osservazioni per più di 500 orbite di HST.

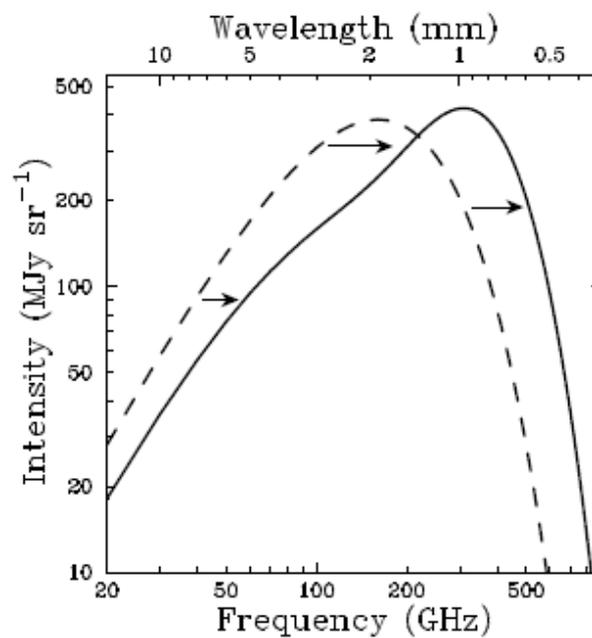


Figura 3.5: Distorsione dello spettro del CMB a seguito dell'effetto SZ termico. La linea tratteggiata indica lo spettro imperturbato, mentre la linea solida mostra lo spettro distorto per un ammasso di galassie ideale avente massa pari a 1000 volte quella di un tipico ammasso ricco. L'effetto SZ produce una diminuzione dell'intensità a basse frequenze ( $< 218 \text{ GHz}$ ), ed un aumento ad alte frequenze. Figura da Carlstrom et al., 2002.

Cluster Lensing And Supernova survey with Hubble (CLASH<sup>2</sup>) nasce come uno dei tre progetti di MCT con quattro principali obiettivi scientifici: l'utilizzo dei dati dal lensing gravitazionale per determinare la distribuzione di massa negli ammassi di galassie con grande precisione e risoluzione, lo studio della struttura interna e dell'evoluzione delle galassie negli ammassi, la ricerca di galassie lontane a  $z > 7$  e l'analisi delle supernove di tipo Ia fino a  $z \sim 2.5$  per misurare la dipendenza dal tempo dell'equazione di stato per l'Energia Oscura.

La maggior parte delle osservazioni (474 orbite) si focalizzano sull'*imaging* degli ammassi in 16 filtri differenti, dal vicino ultravioletto al vicino infrarosso, garantendo un'elevata quantità e qualità dei dati (Postman et al., 2012 [54]). Le analisi sono realizzate su un campione di 25 ammassi, 20 dei quali sono stati selezionati dai precedenti cataloghi delle osservazioni nella banda X (e.g. Abell, MACS) per la caratteristica di essere dinamicamente rilassati. Ciò viene evidenziato dalla presenza di un picco ben definito nella regione centrale e dalla distribuzione concentrica dei fotoni (Fig. 3.6). La temperatura media determinata dall'analisi in X del *Chandra X-ray Observatory* per ciascun membro del campione scelto è tale che  $kT > 5 \text{ keV}$ ; la maggior parte dei 20 ammassi presentano una leggera ellitticità  $\langle \epsilon \rangle \simeq 0.19$  e la posizione della galassia più brillante in proiezione dista circa  $23 \text{ kpc}$  dal centro del picco in X.

Gli altri 5 ammassi sono stati inseriti nel progetto CLASH per le loro eccezionali proprietà come lenti gravitazionali; i raggi di Einstein per questi ammassi<sup>3</sup> sono particolarmente grandi ( $\theta_E > 35''$ ) e l'elevata magnificazione che subiscono le sorgenti retrostanti può essere utilizzata per individuare galassie deboli e molto distanti.

Complessivamente, i 25 ammassi di galassie di CLASH spaziano circa un ordine di grandezza in massa (da  $\sim 5$  a  $\sim 30 \times 10^{14} M_\odot$ ) e coprono un intervallo in redshift piuttosto ampio,  $0.18 < z < 0.90$ . Nella figura 3.6 vengono mostrati i 20 membri selezionati in X; in particolare, MACS 1206 (seconda riga, primo da destra) è l'ammasso che sfrutteremo in questa tesi per vincolare il rapporto tra i potenziali scalari nella metrica di FLRW linearmente perturbata, introdotta nel capitolo precedente. Dei modi attraverso i quali è stato ottenuto il profilo di massa per MACS 1206, e di come si

<sup>2</sup><http://www.stsci.edu/postman/CLASH/Home.html>

<sup>3</sup>Definiremo e discuteremo il raggio di Einstein nel capitolo 4, paragrafo 4.1.4

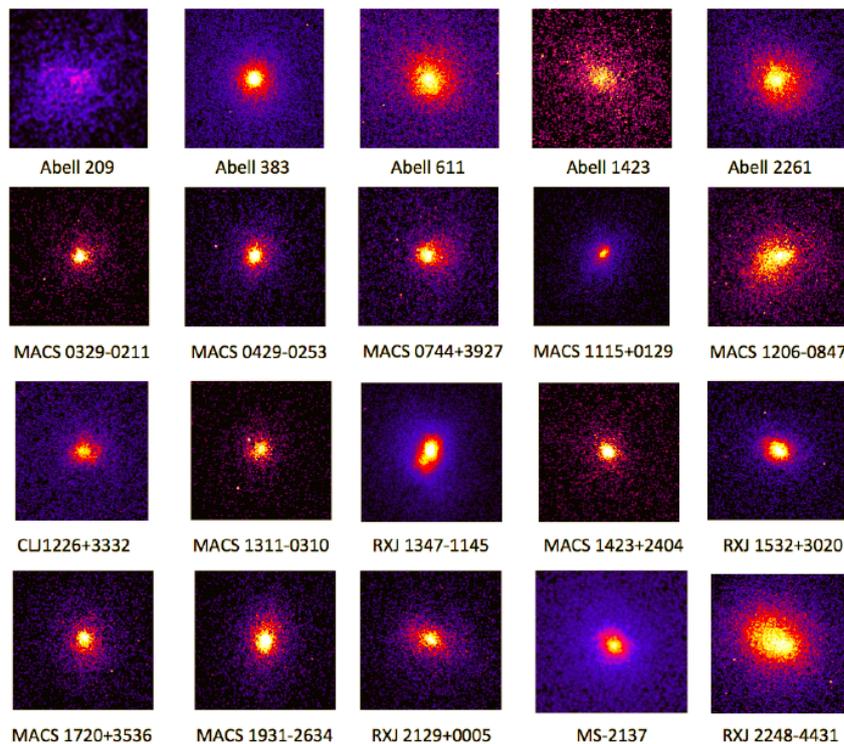


Figura 3.6: Immagini nella banda X dei 20 ammassi CLASH selezionati per la caratteristica di essere dinamicamente rilassati. Si può notare il picco di emissione nel centro di ciascun ammasso e la forma approssimativamente circolare nella distribuzione dei fotoni. Immagine da *Archive of Chandra Cluster Entropy Profile Tables (ACCEPT)*, Postman et al., 2012 [54].

possa collegare questo profilo alla metrica ci occuperemo nei capitoli 4 e 5.

## CLASH-VLT

Basato sul "Large Program dell'Osservatorio europeo australe (ESO): "Dark Matter Mass Distribution of Hubble Treasury Clusters and the Foundations of  $\Lambda$ CDM Structure Formation Models", il progetto CLASH-VLT<sup>4</sup> nasce con l'obiettivo di approfondire la ricerca di CLASH, effettuando un'analisi spettroscopica di 14 dei 25 ammassi di CLASH-HST localizzati nell'emisfero australe, accessibili dal *Very Large Telescope* (VLT) in Cile (Rosati et al., 2014[57]). A partire dal 2011, sono stati raccolti dati per un totale di 225 ore di osservazioni, realizzate mediante lo spettrografo multi-oggetto

<sup>4</sup><https://sites.google.com/site/vltclashpublic>

VIMOS, con lo scopo di ottenere la conferma spettroscopica di circa 500 galassie-membro in ciascun ammasso fino ad almeno 2 volte il raggio viriale e misurare il redshift di oltre 200 galasse retrostanti che hanno subito il lensing gravitazionale nel centro dell'ammasso.

A titolo di esempio, in Figura 3.7 abbiamo riportato i primi risultati per l'ammasso MACSJ0416-2403[57]: i cerchi rossi indicano le 880 galassie-membro identificate; la velocità media ricavata per gli elementi del sistema vale  $v \sim 3 \times 10^3 km s^{-1}$  rispetto al redshift  $z = 0.396$ , identificativo dell'ammasso.

Utilizzando le informazioni raccolte da VLT è possibile ricostruire un profilo di massa analizzando la dinamica delle galassie negli ammassi con la stessa accuratezza con la quale si è in grado di determinare il profilo dal lensing gravitazionale.

Per quanto riguarda l'ammasso MACS 1206, come approfondiremo nel capitolo 5, le analisi di strong lensing dei dati ottenuti da CLASH-HST e CLASH-VLT effettuate da Zitrin et al. nel 2012 [71] hanno permesso di vincolare il profilo di massa (proiettato) nella regione più interna dell'ammasso (tra  $5 kpc$  e  $300 kpc$ ) e di stimare la massa racchiusa entro l'anello di Einstein (cfr. Capitolo 4, paragrafo 4.1.4)  $M = 1.34 \times 10^{14} M_{\odot}$ . Tali analisi sono state perfezionate e combinate con quelle per il weak lensing da Umetzu et al. [67], per ottenere una descrizione del profilo di massa fino a  $1.6 Mpc h^{-1}$ , con  $h = 0.70$ . Analogamente, un'altra derivazione del profilo per MACS 1206 è stata realizzata da Biviano et al., 2013 [10] sfruttando la dispersione delle velocità delle galassie nell'ammasso. I risultati di [67] e [10] ci consentiranno di determinare il nostro vincolo sul rapporto  $\eta = \Psi/\Phi$ . Un procedimento simile a quello che utilizzeremo in questa tesi è stato applicato da Sartoris et al. nel 2014 [60] i quali, sfruttando gli stessi profili di massa ottenuti per MACS 1206, hanno ricavato un vincolo sull'equazione di stato della materia oscura; il loro risultato è compatibile con l'assunzione che la materia oscura sia senza pressione.

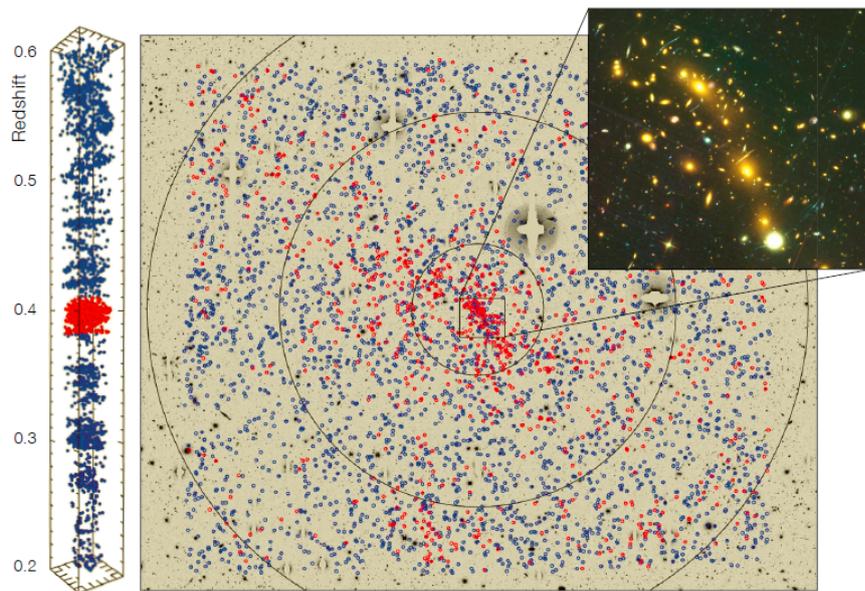


Figura 3.7: Distribuzione spaziale delle galassie per l'ammasso MACSJ0416.1-2403 ( $29 \times 25$  arcminuti) ottenuta dalla *Subaru Sup/Cam*. I cerchietti rossi indicano i membri riconosciuti dell'ammasso, mentre quelli in azzurro le altre 3307 galassie esterne in un intervallo di redshift  $0.02 < z < 4.15$ . Le circonferenze nere rappresentano invece le sfere (in proiezione) di raggio 1, 3, 5 Mpc centrate nella BCG più a nord. A sinistra abbiamo la rappresentazione tridimensionale del nucleo dell'ammasso ( $2 \times 1.8$  arcminuti) nell'intervallo  $0.2 < z < 0.6$ . Figura da Rosati et al., 2014 [57]

## Capitolo 4

# Lensing e Dinamica degli ammassi: profili di massa e potenziali

In questo capitolo dimostreremo come sia possibile ricostruire il profilo di massa per un ammasso di galassie sfruttando i dati osservativi sulla sua dinamica interna, tracciata dal moto delle galassie, e sul (weak-)lensing gravitazionale. Si collegheranno quindi i profili di massa così ottenuti alla metrica di Friedman- Robertson Walker perturbata per determinare un'espressione esplicita del parametro  $\eta = \frac{\Phi}{\Psi}$  che vogliamo vincolare. Vedremo come il lensing ci fornirà una quantità sensibile sia alla componente spaziale che a quella temporale della metrica; in altre parole, nell'approssimazione lineare, otterremo qualcosa di proporzionale a  $\Phi + \Psi + O(\Phi^2, \Psi^2)$ .

Il profilo derivante dalla dinamica ci permetterà invece di vincolare solo la componente temporale della metrica, quindi solo uno dei due potenziali. Un confronto diretto tra i due profili fornisce dunque vincoli su una possibile deviazione dalla Relatività Generale.

## 4.1 Dalla deflessione della luce alle equazioni della lente

Fin dal XVIII secolo si pensava che la presenza di un campo gravitazionale potesse modificare la traiettoria di un raggio di luce. Nel 1804, sfruttando la legge di gravitazione di Newton, Soldner calcolò l'angolo di deflessione per una "particella" di luce in prossimità del sole:

$$\tilde{\alpha} = \frac{2GM_{sun}}{c^2 R_{sun}} \simeq 0.83.$$

Successivamente Einstein, nel 1911, derivò la stessa formula, poi corretta con un fattore 2 moltiplicativo che emergeva dal contributo di curvatura spaziale nella trattazione general-relativistica. Il risultato di 1.7 arcsec fu confermato durante l'eclissi totale del 1919, con la misura dello spostamento apparente di una stella vicino alla superficie del Sole (Dyson, Eddington, Davidson, 1920). Questa verifica, in pieno accordo con la predizione di Einstein, costituì uno dei test fondamentali per la validità della Relatività Generale.

Una conseguenza interessante del fenomeno del lensing gravitazionale è la possibilità di ottenere *immagini multiple*: i raggi di luce emessi da una sorgente possono raggiungere l'osservatore mediante diversi percorsi, generando delle copie fittizie della sorgente (Chwolson, 1924). Il problema fondamentale, messo in evidenza da Einstein nel 1936, era legato all'osservazione di questi effetti: la deflessione della luce causata da una massa come quella di una stella avrebbe prodotto uno slittamento della sorgente troppo piccolo per essere osservato. Fu naturale allora spostare l'attenzione verso oggetti molto più grandi di una stella, come ad esempio una galassia o un ammasso di galassie: in questo caso l'angolo di deflessione risulta decisamente maggiore e può facilmente essere misurato; inoltre la magnificazione della luce generata dalla lente permette di individuare sorgenti molto deboli e distanti. Ciò dimostra quindi le potenzialità del lensing come strumento d'indagine astrofisica e cosmologica: oltre ad evidenziare oggetti altrimenti difficilmente rivelabili, la deflessione non risente in alcun modo né della composizione né della luminosità della lente, ma dipende esclusivamente dal profilo di massa; come tale fornisce indicazioni sulla presenza e sull'evoluzione

della materia oscura al suo interno. In aggiunta il profilo ottenuto può essere ricollegato ai parametri cosmologici (legame evidente, ad esempio, nella funzione di massa di Press e Schechter [55]), dunque un'analisi dal lensing permette di porre dei vincoli su di essi.

Nei paragrafi che seguiranno studieremo più in dettaglio il fenomeno, concentrandoci su alcuni risultati fondamentali per questa tesi: sarà dapprima derivata, sfruttando l'equazione delle geodetiche, un'espressione operativa in cui compaiano i due potenziali  $\Phi$  e  $\Psi$ . Successivamente, con conti meno formali, andremo a definire le quantità e le relazioni maggiormente note del lensing gravitazionale per avere un'idea generale di come poi avvenga la ricostruzione del profilo di massa. Dove non altrimenti specificato, utilizzeremo unità  $c = 1$ .

#### 4.1.1 L'indice di rifrazione efficace

Consideriamo un campo gravitazionale che sia statico, ovvero tale che sia possibile definire un vettore di Killing timelike e che esso sia ortogonale ad una famiglia diipersuperfici nulle. In termini della metrica ciò equivale a dire

$$\partial_t g_{\mu\nu} = 0; \quad (4.1)$$

$$g_{0i} = g_{i0} = 0. \quad (4.2)$$

Se ora consideriamo un raggio di luce che si muove sotto l'influenza del campo gravitazionale, la curva che ne descrive la traiettoria è di tipo nullo:

$$ds^2 = 0 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Possiamo quindi riscrivere questa espressione come

$$dt^2 = -\frac{g_{ij}}{g_{00}} dx^i dx^j. \quad (4.3)$$

Definiamo  $\hat{g}_{ij} = -\frac{g_{ij}}{g_{00}}$  la *metrica di Fermat* in una varietà tridimensionale Riemanniana.

Andremo ora a dimostrare che l'equazione delle geodetiche nulle in uno spaziotempo statico si riduce all'equazione delle geodetiche nello spazio di Riemann su cui è definita la metrica  $\hat{g}_{ij}$  con parametro affine  $t$  (Faber 2006) [24]. Questo ci permetterà di enunciare la versione relativistica del principio di Fermat e di legare il percorso del raggio di luce (che dipende dalla struttura dello spaziotempo) ad un *indice di rifrazione efficace*.

Riscriviamo l'equazione (A.7)

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\chi^2} + \Gamma_{\mu\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\chi} \frac{dx^\rho}{d\chi} = 0. \quad (4.4)$$

Tenendo conto che gli unici simboli di Christoffel non nulli sono  $\Gamma_{00i} = \frac{1}{2}\partial_i g_{00}$ ,  $\Gamma_{j00} = -\frac{1}{2}\partial_j g_{00}$  e  $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}[\partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}]$ , si ottiene:

$$g_{00} \frac{d^2 x^0}{d\chi^2} + 2\Gamma_{00i} \frac{dx^0}{d\chi} \frac{dx^i}{d\chi} = 0, \quad (4.5)$$

$$g_{jk} \frac{d^2 x^k}{d\chi^2} + \Gamma_{j00} \frac{dx^0}{d\chi} \frac{dx^0}{d\chi} + \Gamma_{jlm} \frac{dx^l}{d\chi} \frac{dx^m}{d\chi} = 0. \quad (4.6)$$

Ma  $x^0 = t$  e dunque  $\Gamma_{j00} \left(\frac{dx^0}{d\chi}\right)^2 = \Gamma_{j00} \left(\frac{dt}{d\chi}\right)^2$ . A questo punto, usando eq. (4.3):

$$g_{jk} \frac{d^2 x^k}{d\chi^2} + \left[ \Gamma_{jlm} - \Gamma_{j00} \frac{g_{lm}}{g_{00}} \right] \frac{dx^l}{d\chi} \frac{dx^m}{d\chi} = 0. \quad (4.7)$$

Le equazioni (4.5) e (4.7) possono essere riscritte in funzione del parametro  $t$ <sup>1</sup>

$$g_{00} \frac{d^2 t}{d\chi^2} + 2\Gamma_{00i} \frac{dx^i}{dt} \left( \frac{dt}{d\chi} \right)^2 = 0, \quad (4.8)$$

$$g_{jk} \frac{d}{d\chi} \left( \frac{dx^k}{dt} \frac{dt}{d\chi} \right) + \left[ \Gamma_{jlm} - \Gamma_{j00} \frac{g_{lm}}{g_{00}} \right] \frac{dx^l}{dt} \frac{dt}{d\chi} \frac{dx^m}{dt} \frac{dt}{d\chi} = 0, \quad (4.9)$$

<sup>1</sup>da notare che  $t$  non è parametro affine nello spazio quadridimensionale di metrica  $g_{\mu\nu}$

Svolgendo esplicitamente la derivata, con alcuni passaggi si arriva a scrivere

$$g_{jk} \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \left[ \Gamma_{jlm} - \Gamma_{j00} \frac{g_{lm}}{g_{00}} \right] \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^m}{dt} = -g_{jk} \frac{dx^k}{dt} \left[ \frac{d^2 t}{d\chi^2} \left( \frac{dt}{d\chi} \right)^{-2} \right]. \quad (4.10)$$

Sostituiamo ora l'eq. (4.8) dentro l'equazione (4.10) ed esplicitiamo la definizione dei simboli di Christoffel:

$$g_{jk} \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \left[ \Gamma_{jlm} - \Gamma_{j00} \frac{g_{lm}}{g_{00}} - 2\Gamma_{00m} \frac{g_{jm}}{g_{00}} \right] \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^m}{dt} = 0,$$

$$g_{jk} \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \left[ \partial_m g_{jl} - \frac{1}{2} \partial_j g_{lm} + \frac{1}{2} \frac{g_{lm}}{g_{00}} \partial_j g_{00} - \frac{g_{jl}}{g_{00}} \partial_m g_{00} \right] \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^m}{dt} = 0. \quad (4.11)$$

Se teniamo conto della definizione di metrica di Fermat, l'eq. (4.11) può essere riscritta come

$$g_{jk} \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \left[ \partial_m \hat{g}_{jl} - \frac{1}{2} \partial_j \hat{g}_{lm} \right] \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^m}{dt} = 0. \quad (4.12)$$

Dove l'oggetto tra parentesi quadre non è altro che  $\Gamma_{jml}$ . Abbiamo dunque ottenuto l'equazione delle geodetiche in una metrica tridimensionale di Fermat descritta da

$$dt^2 = \hat{g}_{ij} dx^i dx^j.$$

Questo implica che, per definizione di geodetica, il parametro  $t$  deve soddisfare

$$\delta\tau = \delta \int_C dt = 0 = \delta \int_C \sqrt{\hat{g}_{ij} dx^i dx^j}. \quad (4.13)$$

dove  $\tau$  rappresenta la lunghezza del cammino  $C$  percorso nella varietà Riemaniana, oppure la coordinata temporale  $x^0 = \tau$  misurata da un osservatore nello spaziotempo di Lorentz. Questa è esattamente la formulazione del principio di Fermat in relatività generale:

**Teorema.** *Sia  $S$  un evento sorgente e  $l$  la linea universo dell'osservatore in uno spaziotempo  $(M, g_{\mu\nu})$ . Allora una curva  $\gamma$  da  $S$  a  $l$  rappresenta un raggio di luce se e solo se il tempo di arrivo  $\tau$  su  $l$  è stazionario per variazioni al primo ordine  $\delta\gamma$ .*

Per la dimostrazione, il lettore interessato può fare riferimento a Misner, Thorne e Wheeler [14], pag 100-103.

È possibile ricavare un risultato più generale nel caso di uno spaziotempo stazionario conforme, descritto da una metrica

$$ds^2 = e^{2f(t,x^i)} [-(dt + \hat{\phi}_i dx^i)^2 + \hat{g}_{ij} dx^i dx^j], \quad (4.14)$$

dove  $\hat{\phi}_i(x^\mu)$  è chiamata 1-forma di Fermat. In questo caso il teorema assume la forma

$$\delta \int \left[ \sqrt{\hat{g}_{ij} dx^i dx^j} - \hat{\phi}_i dx^i \right] = 0. \quad (4.15)$$

L'espressione si riduce all'eq. (4.13) nel caso di uno spaziotempo statico dove  $\hat{\phi}_i = \partial_i h$ , con  $h$  funzione scalare delle coordinate spaziali.

Ricordiamo ora che la velocità della luce in un mezzo è definita come  $v_n = \frac{c}{n}$ , dove  $n$  rappresenta l'indice di rifrazione del mezzo. Il principio di Fermat si può allora riscrivere in termini di distanza ottica invece che di tempo:

$$c \delta \int dt = \delta \int n(x, y, z) v_n dt = \delta \int n(x, y, z) ds = 0, \quad (4.16)$$

con  $ds = \delta_{ij} dx^i dx^j$  elemento di distanza nella metrica euclidea tridimensionale. Supponiamo ora che la metrica di Fermat  $\hat{g}_{ij}$  sia equivalente alla metrica euclidea a meno di una trasformazione conforme, ovvero

$$\hat{g}_{ij} = \Omega^2(x, y, z) \delta_{ij}.$$

Inserendo questa uguaglianza in eq. (4.13) si ottiene

$$\delta \int \sqrt{\hat{g}_{ij} dx^i dx^j} = \delta \int \Omega(x, y, z) \sqrt{\delta_{ij} dx^i dx^j} = \delta \int \Omega(x, y, z) ds = 0, \quad (4.17)$$

che corrisponde alla forma (4.16) ponendo  $\Omega = n$ . Dunque in uno spaziotempo stazionario descritto dalla metrica  $g_{\mu\nu}$ , se la parte spaziale è conformemente euclidea,

possiamo definire un *indice di rifrazione efficace* come il coefficiente della trasformazione conforme tra la metrica tridimensionale di Fermat e la metrica euclidea.

Nel caso in cui non disponiamo di una metrica spaziale conformemente euclidea, è comunque lecito parlare di indice di rifrazione effettivo, con la differenza che questa volta non sarà uno scalare, bensì un tensore:

$$n_{ij} = \sqrt{\hat{g}_{ij}}$$

### 4.1.2 Metrica di FLRW perturbata e indice di rifrazione

La struttura spaziotemporale di un ammasso di galassie può essere descritta attraverso la metrica linearmente perturbata di FLRW introdotta nel capitolo 2, dal momento che il potenziale gravitazionale medio (che compare nella componente temporale della metrica) risulta dell'ordine di  $10^{-4}c^2$ . Poiché le deviazioni dalla relatività generale sono attese essere piccole, come confermato dalle recenti osservazioni (Planck Collaboration, 2015 [50]), anche il potenziale  $\Psi$  sarà dello stesso ordine di grandezza. Vogliamo ora collegare i potenziali della metrica nella gauge Newtoniana all'indice di rifrazione efficace, poiché, come vedremo, esso è in relazione con una quantità misurabile, ovvero l'angolo di deflessione del raggio di luce. Per fare ciò utilizzeremo una derivazione originale che riadatta la procedura illustrata da Faber in [24] al caso di nostro interesse. Per prima cosa consideriamo le equazioni di Maxwell in forma covariante nel vuoto, per una metrica arbitraria  $g_{\mu\nu}$ :

$$F_{[\mu\nu;\rho]} = \frac{1}{3} (\nabla_\rho F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\rho}) = 0;$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0, \tag{4.18}$$

dove  $F_{\mu\nu}$  è il tensore di *Field-Strength* del campo elettromagnetico. Esplicitando la definizione di derivata covariante e di simboli di Christoffel, possiamo riscrivere le eq. (4.18) come

$$F_{[\mu\nu,\rho]} = 0,$$

$$(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{,v} = (g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\sqrt{-g}F_{\alpha\beta})_{,v} = 0. \quad (4.19)$$

Effettuiamo ora una trasformazione conforme del tipo

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x^\mu)g_{\mu\nu}.$$

È immediato vedere che la prima delle eq. (4.19) rimane invariata, poiché la metrica non compare. Per la seconda, consideriamo che

$$g^{\mu\nu} = \Omega^2\tilde{g}^{\mu\nu}, \quad \sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-\tilde{g}}$$

quindi  $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\sqrt{-g}$  è invariante. Questo significa che la metrica agisce sul campo elettromagnetico solo attraverso la sua parte conforme, e dunque la descrizione della propagazione dei raggi luminosi si semplifica notevolmente. Infatti, nel nostro caso, possiamo utilizzare l'espressione (1.3), introdotta nel capitolo 1, per la metrica imperturbata:

$$ds^2 = a(\tau)^2 [-c^2 d\tau^2 + (d\chi^2 + f_k(\chi)^2 d\Omega^2)] \quad (4.20)$$

dove, per comodità, abbiamo reintrodotta il fattore  $c$ . La metrica perturbata in coordinate sferiche può essere scritta, nella gauge di Newton, come

$$ds^2 = a(\tau)^2 \left[ -c^2 d\tau^2 \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) + \left( 1 - \frac{2\Psi}{c^2} \right) (d\chi^2 + f_k(\chi)^2 d\Omega^2) \right]. \quad (4.21)$$

Mettendo in evidenza la componente  $g_{00}$ , nella parte spaziale si ottiene proprio la metrica di Fermat e l'eq. (4.21) assume la forma

$$ds^2 = a^2(\tau) \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) d\tilde{s}^2,$$

avendo posto

$$d\tilde{s}^2 = -c^2 d\tau^2 + \frac{1 - \frac{2\Psi}{c^2}}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} [d\chi^2 + f_k^2(\chi) d\Omega^2], \quad (4.22)$$

la metrica perturbata conformemente equivalente alla precedente. Per quanto detto sopra, l'invarianza conforme delle geodetiche nulle ci permette di lavorare solo con quest'ultima relazione. Analizziamo dunque il coefficiente della parte spaziale:

$$\frac{1 - \frac{2\Psi}{c^2}}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \simeq \left(1 - \frac{2\Psi}{c^2}\right) \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \simeq 1 - \frac{2}{c^2}(\Psi + \Phi) + O(\Psi^2, \Phi^2), \quad (4.23)$$

dove si è sfruttato il fatto che le perturbazioni sono piccole. Possiamo definire la quantità  $\Phi_{lens} = \frac{\Phi + \Psi}{2}$ , che chiameremo *Potenziale di Lensing* (il cui significato sarà chiaro più avanti), in modo tale da riscrivere l'eq. (4.22) nella seguente forma:

$$d\tilde{s}^2 \simeq -c^2 d\tau^2 + \left(1 - \frac{4}{c^2}\Phi_{lens}\right) [d\chi^2 + f_k^2(\chi)d\Omega^2]. \quad (4.24)$$

In generale la metrica di Fermat scritta in questi termini non è conformemente equivalente alla metrica euclidea, a causa della presenza della funzione  $f_k(\chi)$ . Tuttavia, come già specificato nel capitolo 1, paragrafo 1.3, dalle analisi del fondo di microonde [64] risulta un valore per  $\Omega_0 \simeq 1$ , pertanto possiamo assumere  $k = 0$ . In questo modo  $f_k(\chi) \equiv \chi$  e il problema non sussiste<sup>2</sup>. Ciò vuol dire che possiamo identificare l'indice di rifrazione efficace, al primo ordine nei potenziali scalari:

$$n = \sqrt{1 - \frac{4}{c^2}\Phi_{lens}} \simeq 1 - \frac{2}{c^2}\Phi_{lens} + O(\Phi^2, \Psi^2). \quad (4.25)$$

Questa espressione coincide proprio con quella trovata da Schneider nel 1992 [62]:

$$n \simeq 1 - \frac{2}{c^2}\Phi,$$

nel caso in cui  $\Phi = \Psi$ .

La velocità della luce che si propaga nel campo gravitazionale diventa dunque espri-

---

<sup>2</sup>In realtà si può ricavare un indice di rifrazione scalare per qualsiasi valore della curvatura, sotto l'assunzione che la metrica sia a simmetria sferica. In questa tesi ci limitiamo a mostrare il caso semplice  $k = 0$

mibile in termini del potenziale di lensing

$$v = \frac{c}{n} \simeq c + \frac{2}{c} \Phi_{lens}.$$

Da notare che gli effetti al secondo ordine risultano  $10^{-4}$  volte più piccoli rispetto a quelli del prim'ordine, come tale li trascureremo nella nostra discussione. Alla fine, una volta ottenuto il risultato conclusivo, saremo in grado di giustificare quanto assunto.

### 4.1.3 Indice di rifrazione e angolo di deflessione

Dai risultati del precedente paragrafo possiamo intuire come la propagazione della luce in un campo gravitazionale produca effetti molto simili a quelli osservati nella comune ottica geometrica; la presenza di un potenziale gravitazionale è analoga a quella di un mezzo avente indice di rifrazione  $n > 1^3$ , e produce una diminuzione della velocità dei fotoni nella zona in cui agisce il campo e una modifica della traiettoria nello spaziotempo. Come conseguenza, anche il tempo che impiega il raggio crescerà a causa sia della differenza di cammino rispetto alla traiettoria imperturbata, sia della minore velocità. Questo secondo ritardo, denominato *Shapiro delay* (Shapiro, 1964[63]) può essere facilmente ottenuto dalle relazioni ricavate alla fine della sez. 4.1.2 e vale

$$\Delta t = - \int_{source}^{observ} dl \frac{2}{c^3} \Phi \quad (4.26)$$

dove l'integrale viene fatto sulla traiettoria del raggio di luce.

Nei casi d'interesse la zona in cui avvengono le modifiche ad opera della gravità è molto più piccola rispetto al percorso che la luce attraversa dalla sorgente fino all'osservatore. È lecito allora suddividere tale cammino in 3 zone distinte: il tratto dal punto di emissione alla lente, in cui la traiettoria non viene alterata, la regione propria della lente, dove si manifestano gli effetti del campo gravitazionale, e il tratto finale dalla lente all'osservatore, dove nuovamente il raggio di luce prosegue indisturbato.

<sup>3</sup>Si tenga presente che i potenziali scalari sono definiti negativi

Un'approssimazione molto frequente che si utilizza in questa situazione è chiamata *di schermo sottile*: in pratica si considera lo spessore  $z$  della lente trascurabile rispetto al percorso dei fotoni, la distribuzione di massa della lente viene proiettata lungo la linea di vista e rimpiazzata con un "foglio" ortogonale (alla linea di vista). Il piano dove giace questo foglio prende il nome di *piano della lente*.

La densità superficiale di massa proiettata può essere espressa in funzione di un vettore bidimensionale  $\vec{\xi}$  che giace sul piano della lente (Fig. 4.1):

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz, \quad (4.27)$$

dove  $\rho(\vec{\xi}, z)$  indica la densità di massa (volumetrica) della lente, e  $z$  è la direzione della linea di vista.

L'approssimazione di schermo sottile è lecita anche nel caso degli ammassi di galas-

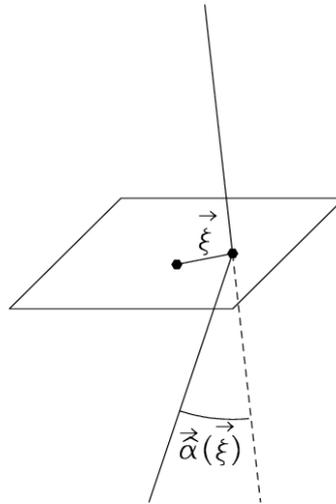


Figura 4.1: Deflessione in approssimazione di schermo sottile con  $\vec{\alpha}(\vec{\xi})$  l'angolo di deflessione

sie; infatti la distanza alla quale sono situati rispetto a noi (ad esempio  $\sim 10^3 Mpc h^{-1}$  per MACS 1206) è molto grande rispetto alla dimensione di un ammasso (tipicamente  $\sim 2 Mpc$ ).

Consideriamo ora un raggio di luce che si propaga nello spazio euclideo tridimensionale. possiamo definire il vettore unitario tangente come

$$\vec{e} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

dove  $ds$  è l'elemento di lunghezza euclideo. L'angolo di deflessione totale  $\vec{\alpha}$  è esprimibile come differenza tra il vettore tangente entrante ed uscente :

$$\vec{\alpha} = \vec{e}_{in} - \vec{e}_{out}, \quad (4.28)$$

che può anche essere riscritta come integrale lungo la traiettoria del fotone:

$$\vec{\alpha} = - \int \frac{d\vec{e}}{ds} ds. \quad (4.29)$$

Dalle leggi di ottica geometrica, la propagazione dei raggi luminosi in un mezzo con un indice di rifrazione non uniforme può essere relazionata al gradiente dell'indice di rifrazione mediante l'equazione:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (4.30)$$

Svolgendo esplicitamente la derivata, si ottiene

$$n \frac{d\vec{e}}{ds} = \nabla n - \vec{e}(\vec{e} \cdot \nabla n) = \nabla_{\perp} n,$$

dove  $\nabla_{\perp}$  rappresenta il gradiente fatto nella direzione perpendicolare ad  $\vec{e}$ . A questo punto l'eq. (4.29) diventa

$$\vec{\alpha} = - \int \frac{\nabla_{\perp} n}{n} ds = - \int \nabla_{\perp} (\ln n) ds. \quad (4.31)$$

In realtà in letteratura è possibile trovare l'angolo di deflessione indicato con un segno opposto

$$\vec{\alpha} = \int \frac{\nabla_{\perp} n}{n} ds, \quad (4.32)$$

ma la differente notazione non incide sul concetto fisico, essendo legata al semplice orientamento nella definizione dell'angolo. Se sostituiamo l'espressione (4.25) nell'equazione (4.31), tenendo conto che  $\Phi_{lens} \ll c^2$ :

$$\vec{\alpha} \simeq \frac{2}{c^2} \int \nabla_{\perp} \Phi_{lens} ds, \quad (4.33)$$

che lega  $\vec{\alpha}$  al potenziale di lensing. Da notare che  $\nabla_{\perp} \Phi_{lens}$  punta in direzione opposta rispetto alla lente, pertanto anche  $\vec{\alpha}$  avrà lo stesso verso.

Poiché in tutti i casi d'interesse l'angolo di deflessione risulta molto piccolo, possiamo approssimare la traiettoria del fotone ad una linea retta con lo stesso parametro d'impatto  $b$ , e quindi trasformare l'integrale in  $ds$  in un integrale lungo la traiettoria del fotone imperturbata, ovvero lungo la linea di vista  $z$ . Supponiamo di avere un oggetto puntiforme di massa  $M$ , assumendo valide le leggi della relatività generale:

$$\Psi = \Phi \rightarrow \Phi_{lens} \equiv \Phi.$$

Il potenziale Newtoniano generato dalla massa a distanza  $r = \sqrt{b^2 + z^2}$  vale

$$\Phi(b, z) = -\frac{GM}{\sqrt{b^2 + z^2}} \quad (4.34)$$

e dunque

$$\nabla_{\perp} \Phi(b, z) = \frac{GM\vec{b}}{(b^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Inserendo quest'ultima equazione dentro l'eq. (4.33), possiamo integrare in  $dz$  tra 0 e  $\infty$  sfruttando la simmetria del potenziale. Un rapido calcolo porta al risultato:

$$|\vec{\alpha}| = \hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 b}, \quad (4.35)$$

che corrisponde al valore dell'angolo di deflessione calcolato da Einstein ponendo  $b = R_{\odot}$ . Nel caso di una distribuzione di massa in approssimazione di schermo sottile, l'angolo di deflessione ad una determinata posizione  $\vec{\xi}$  è dato dalla somma dei

contributi di tutti gli elementi di massa nel piano della lente:

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \Sigma(\vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi', \quad (4.36)$$

dove  $\Sigma(\vec{\xi})$  è la densità superficiale data da eq. (4.27). Se la lente ha simmetria circolare, l'espressione per il modulo di  $\alpha$  diventa particolarmente semplice

$$\hat{a}(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi}, \quad (4.37)$$

con  $\xi$  che ora indica la distanza radiale dal centro della lente e  $M(\xi)$  che rappresenta la massa racchiusa nel raggio  $\xi$ :

$$M(\xi) = 2\pi \int_0^\xi \Sigma(\xi') \xi' d\xi'.$$

#### 4.1.4 L'equazione della lente e l'anello di Einstein

Già con il semplice modello per la deflessione dovuta ad un oggetto puntiforme abbiamo potuto osservare come il potenziale di lensing sia collegato alla massa della lente tramite l'angolo  $\vec{\alpha}$ . Andremo ora ad analizzare qualitativamente la geometria nel processo di lensing gravitazionale per ricavare alcune relazioni fondamentali che caratterizzano questo fenomeno. Consideriamo dunque un raggio di luce emesso da una sorgente  $S$  che raggiunge l'osservatore nel punto  $O$  dopo essere stato deviato di un angolo  $\vec{\alpha}$ . Definiamo  $\vec{\beta}$  l'angolo tra la linea dell'asse ottico della lente e la posizione della sorgente  $S$  e  $\vec{\theta}$  l'angolo tra l'asse ottico e l'immagine  $I$  (figura 4.2).

Introduciamo l'*angolo di deflessione ridotto*:

$$\vec{\alpha}_r = \frac{D_{ds}}{D_s} \vec{\alpha},$$

dove  $D_{ds}$  e  $D_s$  sono, rispettivamente, la distanza tra lente e sorgente e la distanza tra sorgente e osservatore. L'angolo ridotto rappresenta la separazione angolare tra sorgente ed immagine rispetto all'osservatore, come possiamo vedere in fig. 4.2.

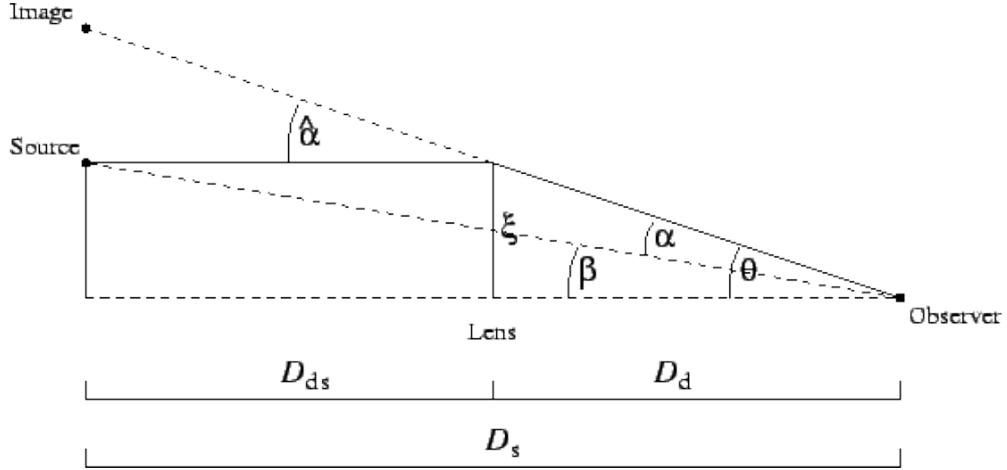


Figura 4.2: Descrizione geometrica del lensing.  $\xi$  rappresenta il punto di massimo avvicinamento del raggio di luce dal centro della lente. Qui  $\hat{\alpha}$  indica l'angolo di deflessione, mentre  $\alpha$  l'angolo di deflessione ridotto

Ora, dal momento che  $\theta D_s = \beta D_s + \alpha D_{ds}$ , se sostituiamo la definizione di angolo ridotto:

$$\boxed{\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}_r(\vec{\theta})} \quad (4.38)$$

che è chiamata *equazione della lente*. Generalmente tale equazione è non lineare in  $\vec{\theta}$ , ovvero per ogni singola sorgente localizzata ad un angolo  $\beta$  possiamo avere diverse immagini in corrispondenza di diversi  $\theta_i$ .

Immaginiamo adesso di avere una lente a simmetria circolare con densità superficiale costante; allora, utilizzando l'eq. (4.37):

$$\alpha_r(\xi) = \frac{4D_{ds}G}{D_s c^2 \xi} \Sigma \pi \xi^2.$$

Ma  $\xi = D_d \theta$ , quindi:

$$\alpha(\theta) = \frac{4\pi G \Sigma D_{ds} D_d}{c^2 D_s} \theta,$$

e l'equazione della lente diventa

$$\beta = \theta - \frac{4\pi G \Sigma D_{ds} D_d}{c^2 D_s} \theta \propto \theta, \quad (4.39)$$

Se imponiamo che  $\Sigma$  sia uguale ad una densità critica  $\Sigma_{cr}$  tale per cui

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} = 0.35 \text{ cm}^{-2} \left( 1 \text{ Gpc} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} \right),$$

allora  $\alpha(\theta) = \theta$  e  $\beta = 0$ , ovvero la sorgente giace esattamente sull'asse ottico, qualunque sia il valore di  $\theta$ . Se  $\Sigma > \Sigma_{cr}$  la lente viene chiamata *supercritica*, e si ha il fenomeno delle immagini multiple (sebbene esistano delle eccezioni in cui ciò non avviene - Subramanian & Cowling, 1986 [65]).

Se consideriamo una lente che conservi ancora la simmetria circolare, ma avente un profilo di massa arbitrario  $M(\theta)$ , possiamo riscrivere l'eq. (4.38) come

$$\beta(\theta) = \theta - \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{4GM(\theta)}{c^2 \theta}. \quad (4.40)$$

Si supponga ora che la sorgente si trovi sull'asse ottico e che la lente sia supercritica. In questo caso, data la simmetria, le immagini multiple si disporranno in un anello, detto *anello di Einstein*, di raggio  $\xi_E = D_d \theta_E$ , dove  $\theta_E$  lo possiamo ottenere imponendo  $\beta = 0$  nell'equazione della lente:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM(\theta_E)}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}}. \quad (4.41)$$

Il suo valore dipende non solo dal profilo di massa, ma anche dalle distanze in gioco. L'angolo  $\theta_E$  viene chiamato raggio di Einstein, e si utilizza come scala di riferimento per descrivere molti aspetti del lensing gravitazionale: in primo luogo si osserva che, nel caso di immagini multiple, la separazione angolare tipica tra le immagini vale circa  $2\theta_E$ ; in aggiunta, le sorgenti la cui distanza dall'asse ottico è minore del raggio di Einstein sono amplificate e distorte maggiormente fino anche a formare degli archi strabilianti nel cielo, effetto che rientra nella categoria dello *strong lensing*, mentre quelle più lontane di  $\theta_E$  sono più deboli. Inoltre l'anello di Einstein funge da limite approssimativo per discriminare tra le posizioni delle sorgenti che vengono distorte una singola volta (weak lensing) e di quelle che subiscono il fenomeno delle immagini multiple (strong lensing).

Da notare come, dall'eq. (4.41), la densità superficiale di massa media contenuta in un anello di Einstein sia proprio la densità critica  $\Sigma_{cr}$ .

Nel caso di una lente puntiforme di massa  $M$ , il raggio di Einstein vale

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}};$$

possiamo utilizzarlo per riscrivere l'equazione della lente nella forma

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}, \quad (4.42)$$

che ha due soluzioni per ogni valore di  $\beta$ , date da

$$\theta_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}. \quad (4.43)$$

L'eq. (4.43) ci mostra come man mano che si considerano sorgenti più distanti dall'asse ottico, un'immagine si avvicina alla lente, mentre l'altra tende a coincidere con la reale posizione della sorgente.

### 4.1.5 Potenziale di lensing efficace e tensore di magnificazione

Il teorema di Liouville ci garantisce che la brillantezza superficiale di un oggetto sia preservata dalla deflessione gravitazionale. Tuttavia il lensing modifica l'angolo solido apparente della sorgente, pertanto il flusso ricevuto da una determinata immagine sarà amplificato o diminuito in base al rapporto tra l'area occupata dall'immagine e l'area della sorgente. Questa quantità è chiamata *magnificazione*  $\mu$  e, nel caso semplice di lente a simmetria sferica, risulta

$$\mu = \frac{\theta d\theta}{\beta d\beta} \quad (4.44)$$

Se poi assumiamo che la lente sia puntiforme, possiamo ottenere i valori espliciti di  $\mu$  per ciascuna delle due soluzioni eq. (4.43):

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{1 - (\theta_E/\theta_{\pm})^4} = \frac{(\beta/\theta_E)^2 + 2}{2(\beta/\theta_E)\sqrt{(\beta/\theta_E)^2 + 4}} \pm \frac{1}{2} \quad (4.45)$$

Ciò implica che la soluzione interna all'anello di Einstein  $\theta_- < \theta_E$  ha una magnificazione negativa, ovvero l'immagine ha parità invertita rispetto alla sorgente.

Cosa accade però nel caso generale? Per una lente di forma qualsiasi la magnificazione non sarà più un oggetto scalare, ma verrà descritto da una quantità tensoriale che prende appunto il nome di  *tensore di magnificazione*

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_j}. \quad (4.46)$$

Per capire meglio cosa rappresentino le sue componenti, riprendiamo il potenziale di lensing che abbiamo ricavato nel paragrafo 4.1.1. Così come è stato fatto per la massa nell'eq. (4.27), possiamo riscaldare il potenziale  $\Phi_{lens}$  e proiettarlo lungo la linea di vista, definendo un  *potenziale efficace*

$$\Psi(\vec{\theta}) = \frac{2}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \int \Phi_{lens}(D_d \vec{\theta}, z) dz, \quad (4.47)$$

il cui gradiente rispetto al vettore  $\vec{\theta}$  fornisce l'angolo di deflessione ridotto:

$$\nabla_{\vec{\theta}} \Psi = \frac{2}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_d D_s} \int \nabla_{\xi} \Phi_{lens} dz \equiv \vec{\alpha}_r, \quad (4.48)$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\nabla_{\vec{\theta}} = D_d \nabla_{\xi}$ . Se ora operiamo nuovamente con il gradiente:

$$\nabla_{\vec{\theta}}^2 \Psi = \frac{2}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \int \nabla_{\xi}^2 \Phi_{lens} dz,$$

sfruttando l'equazione di Poisson, possiamo legare il potenziale alla densità di massa. L'integrazione lungo  $z$  porta alla densità superficiale introdotta in eq. (4.27):

$$\nabla_{\vec{\theta}}^2 \Psi = \frac{2}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s} 4\pi G \Sigma(\vec{\theta}) = 2 \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}} = 2\kappa(\vec{\theta}). \quad (4.49)$$

Nel penultimo passaggio abbiamo sostituito la definizione di densità critica. La quantità  $\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}}$  viene chiamata  *convergenza* , e descrive gli effetti di una magnificazione isotropica della sorgente.

L'equazione (4.49) può anche essere letta come una nuova equazione di Poisson bidi-

mensionale per il potenziale efficace; questo ci permette di derivare un'espressione di  $\psi$  in termini della convergenza:

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'| d^2\theta' \quad (4.50)$$

e dunque, l'angolo di deflessione assume la forma

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} d^2\theta', \quad (4.51)$$

che equivale all'equazione (4.36) se scriviamo  $\kappa$  in funzione della densità critica. Torniamo ora al tensore di magnificazione e consideriamone l'inverso:

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} = \mathcal{M}^{-1}.$$

Questo altro non è che la matrice Jacobiana associata alla trasformazione della sorgente nel processo di lensing. Se sostituiamo l'equazione della lente (4.38) al posto di  $\beta_i$ , si ottiene

$$\mathcal{A}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \delta_{ij} - \Psi_{ij}, \quad (4.52)$$

avendo usato la definizione di  $\psi$  in eq. (4.50). La quantità  $\Psi_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$  indica la deviazione della trasformazione operata dal lensing rispetto all'identità.

L'equazione (4.49) ci consente di esprimere  $\kappa(\vec{\theta})$  in termini delle componenti del tensore  $\mathcal{A}$ . In particolare si ha:

$$\kappa = \frac{1}{2}(\Psi_{11} + \Psi_{22}) \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(\Psi_{ij}). \quad (4.53)$$

Possiamo ricavare un secondo oggetto, sfruttando le derivate del potenziale efficace, che esprima il grado di deformazione dell'immagine rispetto alla sorgente. Tale oggetto prende il nome di *tensore di shear* ed è definito come

$$\gamma_1(\vec{\theta}) = \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) = \gamma(\vec{\theta}) \cos(2\phi(\vec{\theta}))$$

$$\gamma_2(\vec{\theta}) = \psi_{12} = \psi_{21} = \gamma(\vec{\theta}) \sin(2\phi(\vec{\theta})) \quad (4.54)$$

dove  $\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$  esprime l'intensità della distorsione, mentre l'angolo  $\phi$  ne identifica l'orientazione nel piano della lente. Se ora combiniamo le equazioni (4.53) e (4.54), il tensore di magnificazione inverso diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{bmatrix} = (1 - \kappa) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \gamma \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

L'equivalente della quantità scalare di eq. (4.44) è dato dal determinante del tensore di magnificazione:

$$\mu = \det \mathcal{M} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2} \quad (4.56)$$

### 4.1.6 Lensing con gli ammassi di galassie

In un generico ammasso di galassie sono osservabili due tipologie di fenomeni legati al lensing gravitazionale: *strong lensing* e *weak lensing*.

Il primo avviene se l'ammasso è particolarmente ricco e denso nella regione centrale, quando una sorgente nel background giace su una specifica linea nel piano della lente detta *caustica*. In questo caso l'effetto di distorsione è molto forte, vengono prodotte immagini multiple e si possono formare giganteschi archi luminosi. Infatti la caustica rappresenta la posizione  $\beta$  della sorgente in corrispondenza della quale si ha un cambiamento nella molteplicità delle immagini e il massimo della magnificazione. Il corrispettivo della caustica nello spazio  $\theta$  è chiamata *linea critica*.

Con il secondo tipo vengono invece identificati tutti i fenomeni di debole intensità che subiscono le sorgenti retrostanti i cui raggi luminosi passano abbastanza vicini all'ammasso per essere deviati dal suo campo gravitazionale. Il risultato consiste in una

serie di immagini lievemente distorte (mediamente 50 - 100 galassie per arco minuto quadro), chiamate *arcllets*, che furono per prime osservate da Fort et al. (1988) [27].

Entrambi questi effetti possono essere utilizzati nella determinazione del profilo di massa della lente; nel caso dello strong lensing il principio di base è molto semplice e si fonda sulla posizione degli archi per stimare la massa (proiettata sul piano) racchiusa nel cerchio tracciato dall'arco stesso. Per una lente a simmetria circolare infatti, la densità superficiale media entro la linea critica (che è approssimativamente individuata dall'arco) è uguale alla densità critica  $\Sigma_{cr}$ , e l'apertura angolare del cerchio fornisce una stima del raggio di Einstein. A questo punto, la massa all'interno della circonferenza vale:

$$M(\theta) = \Sigma_{cr} \pi (\theta D_d)^2. \quad (4.57)$$

Ovviamente la geometria del lensing in un ammasso non sempre può essere approssimata con un modello a simmetria sferica, come testimonia il fatto che raramente un arco è accompagnato da una sua controparte sul lato opposto, e mai della stessa intensità (Grossman, Narayan 1988 [31], Kovner 1989 [38]). In aggiunta si può dimostrare che la probabilità che si formino archi sufficientemente grandi aumenta con l'asimmetria dell'ammasso, poiché è maggiore il numero di cuspidi nelle caustiche, responsabili della produzione di questi fenomeni (Bartelmann, Weiss 1994 [4]).

Ad ogni modo l'equazione (4.57), sebbene costruita su assunzioni elementari, rappresenta un importante punto di partenza per modelli più sofisticati. Ad esempio si può parametrizzare il profilo  $M(\theta)$  stimato tramite eq. (4.57) ed inferire i valori per i parametri del profilo di massa richiedendo che vengano riprodotti al meglio i dati osservativi.

Per quanto riguarda il weak lensing, il procedimento per la determinazione della massa è più complicato, poiché gli effetti di deformazione sono molto piccoli per ogni singola sorgente e difficili da osservare (ad esempio, per osservazioni da terra, la turbolenza atmosferica può falsare un'immagine ellittica facendola apparire circolare). In generale, i metodi che si usano per la ricostruzione del profilo si basano su un approccio statistico; l'ellitticità delle sorgenti, che permette di ricavare convergenza e shear (Fig.

4.3), viene opportunamente mediata su una definita regione di cielo.

Il primo algoritmo che sfrutta gli effetti del weak lensing per risalire alla densità superficiale  $\Sigma(\theta)$  è stato introdotto nel 1993 da Kaiser & Squires [34], e richiede la sola conoscenza del tensore di shear. Procedure più elaborate sviluppate in seguito aggiungono ai dati sulla distorsione informazioni sulla convergenza (Broadhurst, Taylor & Peacock, 1995; Bartelmann & Narayan, 1995a [5]).

Il metodo di Kaiser & Squires si basa sul fatto che  $\kappa(\vec{\theta})$  e  $\gamma_{1,2}(\vec{\theta})$  sono tra loro collegati. L'idea è quella di ricavare le componenti dello shear dalla misura della distorsione negli *arclenets*, cioè le immagini delle galassie deformate dal weak lensing, poi determinare la convergenza mediante la relazione di convoluzione:

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\theta' \mathcal{R} \left[ \mathcal{D}^*(\vec{\theta} - \vec{\theta}') \Gamma(\vec{\theta}') \right], \quad (4.58)$$

dove

$$\mathcal{D}(\vec{\theta}) = \frac{(\theta_2^2 - \theta_1^2) - 2i\theta_1\theta_2}{|\vec{\theta}|^4}$$

è il kernel di convoluzione e  $\Gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$  rappresenta lo shear nel campo complesso. L'equazione (4.58) può essere facilmente ricavata a partire dalle derivate del potenziale efficace.

Una volta trovato  $\kappa(\vec{\theta})$ , e quindi il potenziale proiettato, la densità superficiale di massa si ottiene dalla relazione

$$\Sigma(\vec{\theta}) = \Sigma_{cr} \kappa(\vec{\theta}). \quad (4.59)$$

Da notare che tutti metodi di questo tipo, qualsivoglia complicati, permettono di risalire solo ad un profilo bidimensionale e non alla distribuzione di massa in tre dimensioni. La procedura di deproiezione è molto delicata, e spesso comporta delle assunzioni sulla simmetria del potenziale. Tuttavia, come vedremo nel capitolo 5, paragrafo 5.1, nel caso di interesse le proprietà e la struttura dell'ammasso MACS 1206 ci consentiranno di assumere simmetria sferica, cosa che semplifica notevolmente la ricostruzione del profilo totale.

|                     | $< 0$   | $> 0$  |
|---------------------|---|--|
| $\kappa$            |  |  |
| $\text{Re}[\gamma]$ |  |  |
| $\text{Im}[\gamma]$ |  |  |

Figura 4.3: Effetti di convergenza e shear su una sorgente circolare in proiezione. L'area in verde indica la forma della sorgente, mentre i contorni neri rappresentano l'immagine modificata dal weak lensing nei diversi casi (dall'alto: convergenza da sola, parte reale dello shear complesso e parte immaginaria).

## 4.2 Dinamica delle galassie nell'ammasso

Un sistema costituito da stelle e galassie funziona in maniera diversa rispetto ad un classico gas di particelle libere contenuto in una scatola. Infatti, la forza principale che governa il moto dei corpi in una galassia o in un ammasso di galassie è di tipo gravitazionale, a lungo raggio, e la dinamica viene determinata in prima approssimazione dalla struttura complessiva dell'ammasso, mentre la probabilità d'interazione tra due oggetti è molto bassa (vedi paragrafo 4.2.1) e le collisioni possono essere trascurate. Questo implica che la forza agente su un determinato elemento cambia lentamente e produce dunque un'accelerazione regolare sul corpo, al contrario invece di come accade, ad esempio, al gas libero di molecole in una scatola dove sono gli urti a definire la dinamica.

Un sistema di questo tipo, in cui le interazioni tra i suoi costituenti non sono rilevanti, si dice *non collisionale*.

Nei paragrafi seguenti analizzeremo il moto delle galassie in un ammasso sotto l'azione del potenziale gravitazionale  $\Phi$  (la componente temporale della metrica perturbata di FLRW), derivando l'equazione di Boltzmann non collisionale e successivamente l'equazione di Jeans, che collega il profilo di massa alle grandezze dinamiche osservabili. Per questa sezione si fa riferimento a Binney & Tremaine (1987) [7], capitolo 4 e a Mo, Bosch & White (2010), capitolo 5.

### 4.2.1 Collisioni e scale temporali

Innanzitutto dimostreremo la validità dell'ipotesi di sistema non collisionale analizzando i tempi necessari affinché avvenga un incontro tra due elementi. A tal fine consideriamo un insieme di  $N$  oggetti identici di massa  $m$  autogravitanti e focalizziamo l'attenzione sul moto di un singolo elemento. Nel caso di una galassia  $N \sim 10^{11}$  e  $m \sim M_\odot$ , mentre nel caso di un ammasso  $N \sim 10^2 - 10^3$  e  $m \sim 10^{11} M_\odot$ . Vogliamo stimare la variazione di velocità  $\delta\vec{v}$  che il corpo percepisce a seguito dell'interazione con un altro corpo. Se supponiamo che  $\frac{|\delta\vec{v}|}{v} \ll 1$  e che la traiettoria della galassia nella zona d'incontro sia approssimabile con una linea retta, possiamo calcolare semplicemente la componente perpendicolare al moto  $|\delta\vec{v}_\perp|$  che, da una banale applicazione della seconda legge della dinamica, risulta essere:

$$|\delta\vec{v}_\perp| \simeq \frac{Gm}{bv}, \quad (4.60)$$

dove  $b$  rappresenta il parametro d'impatto. A questo punto, assumendo rozzamente che il sistema sia assimilabile ad una sfera di raggio  $R$ , la densità di galassie nel nostro ammasso sarà all'incirca

$$n \sim \frac{N}{\pi R^2}.$$

In un attraversamento completo del sistema da parte del corpo di riferimento il numero di incontri con parametro d'impatto tra  $b$  e  $b + db$  vale

$$\delta n = \frac{2N}{R^2} b db \quad (4.61)$$

e quindi, la variazione del quadrato della velocità in un attraversamento risulta data da

$$\delta v_{\perp}^2 \simeq \frac{2N}{R^2} b \left( \frac{2Gm}{bv} \right)^2 \quad (4.62)$$

affinché continui ad essere verificata la condizione  $\frac{|\delta v|}{v} < 1$ , il parametro d'impatto dovrà essere maggiore di un certo valore  $b_{min} = Gm/v^2$ , pertanto la variazione totale  $\Delta v_{\perp}^2$  si ottiene integrando in  $db$  tra  $b_{min}$  e  $R$ :

$$\Delta v_{\perp}^2 = \int_{b_{min}}^R \delta v_{\perp}^2 \simeq 8N \left( \frac{Gm}{Rv} \right)^2 \ln \left( \frac{R}{b_{min}} \right), \quad (4.63)$$

che ci permette di determinare il rapporto

$$\frac{\Delta v_{\perp}^2}{v^2} = \frac{8}{N} \ln \left( \frac{R}{b_{min}} \right)$$

per ciascun attraversamento del sistema. Questo implica che, per avere una variazione relativa della velocità nell'ordine dell'unità, la galassia di prova dovrà attraversare il sistema un numero di volte pari a

$$n_{cross} = \frac{N}{8} \left[ \ln \left( \frac{R}{b_{min}} \right) \right]^{-1}.$$

Il tempo necessario a compiere questi attraversamenti è chiamato *tempo di rilassamento* e vale  $t_{rel} = n_{cross} t_{cross}$ , dove  $t_{cross} = R/v$  è il tempo in cui avviene un singolo attraversamento.

Come detto sopra, per un ammasso di galassie sufficientemente ricco  $N \sim 10^3$ , da cui  $n_{cross} \sim N/\ln N \sim 18$ , e un tempo di attraversamento pari a  $t_{cross} \simeq 10^9$  y. Ciò porta ad un valore  $t_{rel} \sim 10^{10}$  comparabile con il tempo di vita dell'universo  $t_H$ , che quindi

ci permette di trascurare gli incontri nel nostro studio e considerare la dinamica del sistema come non collisionale.

### 4.2.2 L'equazione di Boltzmann non collisionale

In base a quanto affermato nel paragrafo precedente, il sistema di  $N$  galassie identiche sarà dunque governato da un potenziale globale  $\Phi(\vec{x}, t)$ . Come già accennato, esso coincide con il potenziale Newtoniano  $\Phi$  che compare nella componente temporale della metrica perturbata di FLRW. Questo perché, essendo la velocità media con cui si muovono le galassie molto minore della velocità della luce, nell'equazione delle geodetiche (A.7) vale l'approssimazione (1.14)<sup>4</sup>. La descrizione dello stato del sistema ad un dato istante  $t$  può essere fatta specificando il numero di oggetti che occupano le posizioni nell'intervallo tra  $\vec{x}$  e  $\vec{x} + d^3\vec{x}$ , aventi velocità comprese tra  $\vec{v}$  e  $\vec{v} + d^3\vec{v}$ :

$$dN = f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3\vec{x} d^3\vec{v} \quad (4.64)$$

dove  $f(\vec{x}, \vec{v}, t) \geq 0$  è chiamata *funzione di distribuzione* ed esprime la densità di oggetti nello spazio delle fasi. Conoscendo  $f$  per determinate condizioni iniziali, possiamo ricavare il suo valore in un qualsiasi istante successivo.

Definiamo il vettore a 6 componenti  $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) = (\vec{x}, \vec{v})$ , che identifica un punto nello spazio delle fasi. Il moto dei componenti dell'ammasso genera un flusso (nello spazio delle fasi) di questi punti caratterizzato dalle velocità

$$\dot{\vec{w}} = (\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{v}}) = (\vec{v}, -\nabla\Phi).$$

Avendo assunto la dinamica non collisionale, il flusso conserva il numero di galassie ed è caratterizzato da un moto regolare di "drift". La funzione di distribuzione soddisferà

---

<sup>4</sup>In questo caso dovrebbe comparire anche il fattore di scala  $a(\tau)$ , ma il sistema in considerazione (nel nostro caso un ammasso di galassie) si è distaccato dal flusso di Hubble, e quindi non risente dell'espansione dell'Universo

dunque ad un'equazione di continuità:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(f\dot{w}_i)}{\partial w_i} = 0. \quad (4.65)$$

Integrandola in un volume dello spazio delle fasi, si vede che il primo termine descrive il tasso d'incremento dei punti nel volume, mentre il secondo rappresenta il tasso con cui tali punti fluiscono all'esterno della zona considerata. L'equazione (4.65) può anche essere riscritta tenendo conto che

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{w}_i}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial v_j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \right] = 0,$$

in quanto  $v$  e  $x$  sono coordinate indipendenti e  $\nabla\Phi$  non dipende dalla velocità. In tal modo, l'eq.(4.65) diventa:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \dot{w}_i \frac{\partial f}{\partial w_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \left( v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial v_j} \right) = 0, \quad (4.66)$$

che è nota come *equazione di Boltzmann non collisionale* o equazione di Vlasov. Utilizzando la definizione di derivata convettiva del capitolo 2, la relazione (4.66) diventa semplicemente

$$\frac{Df}{dt} = 0,$$

cioè esprime la conservazione della densità dei punti nello spazio delle fasi per un osservatore comovente con il flusso; in altre parole, questo flusso agisce come un fluido incompressibile. Nel caso in cui gli incontri tra i corpi non sono più trascurabili, all'equazione va aggiunto un nuovo termine

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll},$$

che identifica il tasso di variazione della funzione di distribuzione nello spazio delle fasi ad opera delle collisioni tra le galassie. In teoria cinetica dei gas, il termine collisionale viene determinato sotto l'ipotesi del *caos molecolare*, ovvero che gli urti

avvengano solo tra due particelle, e che queste siano scorrelate prima della collisione. Risulta spesso utile, per studiare sistemi con particolare simmetria, riscrivere l'equazione (4.66) in altre coordinate; ad esempio, per le coordinate sferiche, possiamo ricavare l'espressione:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \dot{v}_r \frac{\partial f}{\partial v_r} + \dot{v}_\theta \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + \dot{v}_\phi \frac{\partial f}{\partial v_\phi} = 0 \quad (4.67)$$

dove

$$\begin{aligned} \dot{v}_r &= \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \dot{v}_\theta &= \frac{v_\phi^2 \cot \theta - v_r v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \\ \dot{v}_\phi &= -\frac{v_\theta v_r + v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

### 4.2.3 L'equazione di Jeans

Vogliamo ora analizzare più in dettaglio l'equazione di Boltzmann non collisionale e determinare alcune sue importanti implicazioni. Come primo passo, integriamo l'eq. (4.66) nelle velocità:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \vec{v} + \sum_{i=1}^3 \left[ \int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3 \vec{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \vec{v} \right] = 0. \quad (4.69)$$

Le derivate parziali nel primo e nel secondo termine possono essere portate fuori, infatti l'intervallo di velocità nel quale stiamo integrando non dipende dal tempo, inoltre  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$ . Per quanto riguarda il terzo termine, se assumiamo che la funzione di distribuzione tenda a zero per grandi valori di  $v$  (ragionevole, dal momento che non esistono galassie con velocità infinita), una semplice applicazione del teorema della divergenza mostra che esso è nullo. In conclusione, definendo

$$\mathbf{v}(\vec{x}, t) = \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3 \vec{v}; \quad \bar{v}_i(\vec{x}, t) = \frac{1}{v} \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3 \vec{v},$$

essere rispettivamente la densità spaziale e la velocità media delle galassie, si ottiene:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(v\bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (4.70)$$

dove si sottoinende la somma sull'indice  $i$ . Questa altro non è che la classica equazione di continuità per la densità di oggetti  $v$ .

Moltiplichiamo ora l'equazione di Boltzmann per  $v_j$  prima di integrarla:

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial t} d^3\vec{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\vec{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\vec{v} = 0. \quad (4.71)$$

Questa volta l'ultimo pezzo non si annulla, possiamo però riscriverlo sfruttando sempre il teorema della divergenza:

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\vec{v} = - \int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3\vec{v} = -\delta_{ij} v,$$

avendo usato nuovamente il fatto che  $f$  si annulla all'infinito. Se indichiamo con

$$\overline{v_i v_j} = \frac{1}{v} \int v_i v_j f d^3\vec{v},$$

l'equazione (4.71) diventa

$$\frac{\partial(v\bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(v\bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} + v \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0. \quad (4.72)$$

Quest'ultimo risultato può essere rimaneggiato introducendo il *tensore di stress*

$$v\sigma_{ij}^2 = v \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = v [\overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j] \quad (4.73)$$

e sottraendo  $\bar{v}_j$  volte l'eq. (4.70). Quello che si ottiene è l'*equazione di Jeans* (Jeans, 1919):

$$v \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + v \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -v \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(v\sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}. \quad (4.74)$$

Questa relazione è molto simile all'equazione di Eulero (2.2), dove al posto del gradiente di pressione compare il gradiente del tensore di stress.

Come possiamo facilmente osservare,  $\sigma^2$  è simmetrico, dunque in ogni punto  $\vec{x}$  possiamo scegliere una base ortogonale  $\vec{e}_i(\vec{x})$  che diagonalizza il tensore, cioè  $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ii}^2 \delta_{ij}$ . Definiamo *ellissoide delle velocità* l'ellissoide avente come assi principali gli assi coordinati individuati da  $\vec{e}_i(\vec{x})$ , di semilunghezza rispettivamente  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{33}$ .

Sebbene l'equazione di Jeans possieda il vantaggio di relazionare quantità osservabili, non esiste l'analogo di un'equazione di stato che permetta di legare le 6 componenti indipendenti di  $\sigma_{ij}$  alla densità  $\nu$ . Possiamo allora pensare di integrare nuovamente l'equazione di Boltzmann moltiplicando per  $v_j v_k$ , ma ciò conduce ad un'altra equazione che contiene termini del tipo  $\overline{v_i v_j v_k}$  che, a loro volta, necessitano di un'ulteriore relazione aggiuntiva.

Per chiudere questa gerarchia di equazioni, si possono individuare due distinte strade: la prima consiste nel troncamento della gerarchia stessa ad un certo ordine  $n$ , mentre la seconda prevede assunzioni fisicamente sensate sulla struttura del campo velocità. Ad esempio, come già specificato alla fine del paragrafo 4.1.6, nel caso dell'ammasso MACS 1206 è lecito supporre simmetria sferica (per maggiori dettagli, si veda Capitolo 5, paragrafo 5.1); vediamo allora come in questa situazione si può riscrivere l'eq. (4.74). In primo luogo possiamo scriverla in coordinate sferiche, riderivandola a partire dall'espressione (4.67). Quello che si ottiene è

$$\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r} \left[ 2\overline{v_r^2} - (\overline{v_\theta^2} - \overline{v_\phi^2}) \right] = -\nu \frac{d\Phi}{dr}, \quad (4.75)$$

dove  $v_r$ ,  $v_\theta$  e  $v_\phi$  sono le componenti della velocità definite nell'eq. (4.67).

Supponiamo ora che i profili di velocità e di densità siano invarianti per rotazioni intorno al centro della struttura che stiamo analizzando. Questo implica che  $\overline{v_\theta^2} = \overline{v_\phi^2}$  e gli ellipsoidi di velocità sono sferoidi i cui assi di simmetria in ogni punto sono diretti verso il centro dell'ammasso. Definiamo la quantità

$$\beta(r) = 1 - \frac{\overline{v_r^2}}{\overline{v_\theta^2}} \quad (4.76)$$

che identifica il grado di *anisotropia* nella distribuzione di velocità;  $\beta = 0$  nel caso di orbite completamente isotrope.

Simulazioni ed osservazioni suggeriscono che  $\overline{v^2}_r \geq \overline{v^2}_\theta$ , dunque  $\beta(r) \geq 0$ . Riscrivendo l'eq. (4.75) si ricava

$$\frac{1}{v} \frac{d(v\overline{v^2}_r)}{dr} + \frac{2\beta\overline{v^2}_r}{r} = -\frac{d\Phi}{dr} \quad (4.77)$$

Dunque le misure della densità numerica  $v$ , della velocità  $\overline{v^2}_r$  e di  $\beta(r)$  ci permettono di determinare la derivata del potenziale gravitazionale newtoniano. Ovviamente  $\Phi$  è legato al profilo di densità di massa mediante l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho(\vec{r}). \quad (4.78)$$

Nel caso di simmetria sferica, integrando una volta l'eq. (4.78), si trova

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{M(< r)G}{r^2},$$

dove  $M(< r)$  indica la massa cumulativa racchiusa nel raggio  $r$ . Con pochi semplici passaggi di calcolo, possiamo ottenere una forma più elegante per l'equazione di Jeans:

$$M(< r) = -\frac{r\overline{v^2}_r}{G} \left[ \frac{d(\ln v)}{d(\ln r)} + \frac{d(\ln \overline{v^2}_r)}{d(\ln r)} + 2\beta(r) \right], \quad (4.79)$$

che mostra in maniera più esplicita la relazione tra il profilo di massa e le grandezze osservabili. Il problema fondamentale nell'uso di questa formula si ha nel fatto che noi possiamo misurare solo la dispersione di velocità lungo la linea di vista; non è in generale possibile fare misure indipendenti di  $\beta$  e  $\overline{v^2}_r$ . In aggiunta la componente trasversa della velocità è molto piccola, risulta pertanto estremamente complicato calcolare direttamente l'anisotropia. Per tale ragione, come per il lensing, un metodo comunemente usato per la determinazione di  $M(< r)$  consiste nel fare ipotesi sul modello del profilo di massa in forma parametrica e poi sfruttare un algoritmo di massima verosimiglianza per ottenere i valori dei parametri che si adattano meglio ai dati osservativi.

Nella figura 4.4 viene mostrato il profilo dell'anisotropia  $\beta(r)$  ricavato da [10] per l'ammasso MACS 1206 tramite l'inversione dell'equazione di Jeans, considerando tutti i membri dell'ammasso (in alto) e separatamente galassie con formazione stellare

attiva e galassie passive (in basso). Possiamo osservare come *beta* sia consistente con 0 al centro, ed aumenti leggermente con il raggio. Nella figura in alto sono mostrati anche 3 modelli parametrici (linee nere tratteggiate) i cui parametri sono stati ricavati con l'algoritmo di massima verosimiglianza MAMPOSSt (paragrafo 3.1 di [10]) avendo posto come modello di riferimento del profilo di massa una funzione Navarro-Frenk-White (vedi capitolo 5, paragrafo 5.1).

Nel prossimo capitolo andremo dunque ad applicare quanto visto fin'ora a MACS 1206, mettendo in relazione i due profili di massa [10], [67] con i potenziali  $\Phi$  e  $\Psi$  della metrica linearmente perturbata di FLRW e ricavando il vincolo sul rapporto  $\eta = \Psi/\Phi$ .

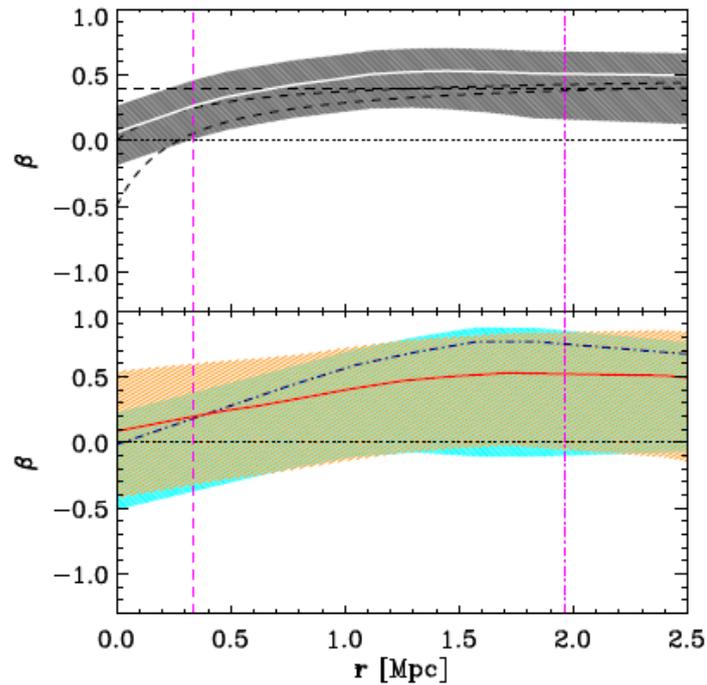


Figura 4.4: Profilo di anisotropia delle velocità  $\beta(r)$  in funzione della distanza dal centro dell'ammasso per diverse scelte dei membri dell'ammasso. In alto: tutti i membri. La linea bianca rappresenta la soluzione dall'inversione dell'equazione di Jeans mentre l'area ombreggiata in grigio mostra gli errori al 68 % del livello di confidenza. Le linee nere tratteggiate indicano tre profili parametrici per  $\beta$  determinati con un algoritmo di massima verosimiglianza avendo assunto che il profilo di massa fosse descritto da una funzione NFW. In basso: la linea rossa e la regione ombreggiata arancione rappresentano l'anisotropia al 68% C.L. per galassie passive, mentre la linea tratteggiata in blu e la regione in celeste sono l'equivalente per galassie con formazione stellare attiva. In entrambi i grafici le linee viola verticali tratteggiate indicano i raggi  $r_{-2}$  (sinistra) e  $r_{200}$  (destra) che definiremo nel prossimo capitolo. Figura da Biviano et al., 2013 [10]

# Capitolo 5

## Calcolo e vincoli su $\eta$ dal confronto dei profili di massa

In questo capitolo verranno presentati e discussi i risultati originali della tesi, ovvero i vincoli sul parametro  $\eta(r) = \Psi/\Phi$ , derivati a partire dal confronto dei profili di massa per l'ammasso di galassie MACS 1206. Come già accennato, tali profili sono stati ottenuti dalle analisi della dinamica e dal lensing gravitazionale.

Nel paragrafo 5.1 descriveremo brevemente le caratteristiche dei profili di massa, accennando ai metodi utilizzati per ricavarli. Nel paragrafo 5.2 deriveremo  $\eta$  in funzione dei due profili ed illustreremo la procedura applicata per determinarne il valore. Infine, nel paragrafo 5.3 si discuterà il risultato, confrontandolo con i vincoli più stringenti precedentemente ottenuti (Planck collaboration, 2015 [50]), enfatizzando l'efficacia del metodo e la sua possibile applicazione in futuro grazie all'enorme quantitativo di dati che presto saranno a disposizione.

Le misure e i calcoli mostrati in questa parte sono stati effettuati assumendo un valore per i parametri cosmologici:  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$  e  $h = 0.7$ .



Figura 5.1: Immagine dell'ammasso MACS 1206 ottenuta da Hubble Space Telescope (HST)

## 5.1 MACS 1206: profili di massa dal lensing e dalla dinamica

MACS J1206.2-0847 (o, semplicemente, MACS 1206, fig. 4.1) è un ammasso di galassie localizzato nella costellazione del Corvo ad una distanza di circa  $1.2 \times 10^3 Mpc h^{-1}$  ( $z = 0.44$ ), scoperto originariamente durante la survey MACS (MAssive Cluster Survey) [22]. Le osservazioni del telescopio Chandra (Ebeling et al., 2009 [23]) hanno permesso di stimare una luminosità totale in X pari a  $2.4 \times 10^{45} erg s^{-1}$  e una temperatura globale media di circa  $11.6 \pm 0.7 keV$ ; il profilo di temperatura in funzione del raggio può essere considerato circa costante, sebbene siano presenti diverse fluttuazioni.

Informazioni più dettagliate sono giunte a seguito delle osservazioni del telescopio spaziale Hubble (HST) nell'ambito del progetto CLASH; attraverso l'analisi di dati ottenuti in 16 filtri dall'UV all'IR (Postman et al., 2012 [54]). MACS 1206 fa parte dei 20 ammassi selezionati da CLASH per la caratteristica di essere dinamicamente

rilassati; infatti già [23] avevano mostrato un profilo nella banda X molto piccato in corrispondenza della posizione della BCG (Brightest Cluster Galaxy) e una morfologia in proiezione di forma circolare. In aggiunta dalle analisi Lemze et al. (2013) [41] e di Girardi et al. (2015) [29], non sono emerse sottostrutture significative all'interno dell'ammasso, in particolare entro il raggio  $r_{200}$  (che definiremo a breve), e non si osservano grosse deviazioni dalla velocità media delle galassie.

L'ipotesi di rilassamento, avendo appurato che un ammasso non si trovi in una fase di merging o post-merging, ci permette di assumere simmetria sferica nella determinazione dei profili ([10], [67]).

### Il modello di Navarro Frenk e White

Come spiegato nel capitolo 3, gli ammassi di galassie sono dominati dalla materia oscura, e quindi il profilo di massa ricostruisce essenzialmente la distribuzione dell'alone di materia oscura all'interno dell'ammasso. Le simulazioni numeriche a diverse scale (da galassie nane ad ammassi di galassie), basate sul modello CDM non collisionale, hanno mostrato che il profilo della densità di massa ha caratteristiche universali e può essere descritto da una semplice funzione del raggio dal centro dell'ammasso. Questo modello è chiamato modello di Navarro - Frenk - White (Navarro et al., 1997 [46]) ed è determinato da due parametri, che generalmente sono  $r_{200}$ , ovvero il raggio della sfera all'interno della quale la densità di massa vale 200 volte la densità critica dell'Universo, e il *raggio di scala*  $r_{-2}$ , inteso come il raggio al quale la derivata logaritmica del profilo di densità  $\frac{d \ln \rho}{d \ln r}$  è uguale a  $-2$ . Navarro et al. [46] presentano un profilo approssimativamente analogo a quello di una sfera isoterma (ovvero dipendente da  $\frac{1}{r^2}$ ), ma con pendenza maggiore di  $r^{-2}$  in prossimità di  $r_{200}$  e minore per raggi più piccoli di  $r_{-2}$ . Un altro modo per parametrizzare il modello è utilizzando la massa  $M_{200} = 200 \left( r_{200}^3 \frac{H^2(z)}{2G} \right)$ , ed il parametro di *concentrazione*, definito come il rapporto  $c = \frac{r_{200}}{r_{-2}}$ .

Nell'articolo originale, il profilo viene presentato mediante la seguente espressione

$$\rho(r) = \rho_c \frac{\delta_c}{(r/r_{-2})(1 + r/r_{-2})^2}, \quad (5.1)$$

dove

$$\delta_c = \frac{200}{3} \frac{c^3}{\ln(1+c) - c/(1+c)}.$$

Mead et al. (2010) e Duffy et al. (2010) hanno mostrato che, in un ammasso di galassie, il contributo dei barioni alla massa totale modifica il parametro di concentrazione di circa il 10 %, sebbene gli effetti possano essere più significativi in sistemi con masse minori  $M < 5 \times 10^{14} M_\odot$  (Fedeli, 2011 [25]).

### I profili di massa

Sia per il lensing [67] che per la dinamica [10], la determinazione dei profili si riduce alla determinazione dei parametri che definiscono il modello NFW, in quanto, in entrambi i casi, risulta essere quello in maggiore accordo con i dati sperimentali. Umetsu et al. [67] hanno effettuato un'analisi combinata di weak e strong lensing sfruttando i dati provenienti dal telescopio Subaru assieme alle informazioni detteggiate di CLASH *HST* e VIMOS@VLT<sup>1</sup>. Misurazioni complementari della distorsione e della magnificazione hanno permesso di determinare la distribuzione di massa nella zona più esterna, fino a poco più del raggio viriale  $r_{200}$ , mentre un nuovo algoritmo basato su un metodo Montecarlo- Markov Chain è stato applicato per migliorare la precedente analisi di Zitrin et al. (2012) [70], e ricavare il profilo nella regione interna. Tale profilo risulta consistente con le misure indipendenti di strong lensing e in accordo con la distribuzione esterna nella zona tra  $0.3 Mpc$  e  $0.4 Mpc$  dove sono state applicate entrambe le procedure (sia weak lensing che strong lensing). Il risultato conclusivo porta alla determinazione dei parametri:

$$M_{200}h = (1.07_{-0.16}^{+0.20}(stat) \pm 0.10(syst)) \times 10^{15} M_\odot \quad c = 6.9_{-0.9}^{+1.0}(stat) \pm 1.2(syst),$$

dove *stat* indica l'errore statistico e *syst* l'errore sistematico; quest'ultimo è dovuto all'utilizzo di differenti modelli per l'analisi di strong lensing.

Biviano et al. [10] hanno analizzato la dinamica interna dell'ammasso dai dati spet-

<sup>1</sup>VIMOS (<http://www.eso.org/sci/facilities/paranal/instruments/vimos.html>) è uno spettrografo multi-oggetti che opera nel visibile (per la precisione tra 360 e 1000 nm), montato sul telescopio *UT3 Melipal* del Very Large Telescope (VLT)

troscopici di VIMOS@VLT, studiando un campione di 2513 galassie per le quali è stato misurato il redshift spettroscopico. Per stabilire quali facessero parte dell'ammasso è stato utilizzato il metodo di Fadda et al. (1996) basato sulla posizione della BCG, denominato "P+G", poiché non richiede assunzioni a priori sul profilo di massa. Alla fine sono stati identificati 603 membri dell'ammasso; la ricostruzione del profilo avviene risolvendo l'equazione di Jeans (4.74), implementando un algoritmo di massima verosimiglianza chiamato MAMPOSSt nello spazio delle fasi proiettato  $(r_{projected}, v_{rest-frame})$ , nella regione interna a  $r_{200}$ .  $r_{projected}$  rappresenta la distanza radiale dal centro dell'ammasso proiettata sul piano di vista,  $v_{rest-frame} = c(z - \bar{z}) / (1 + \bar{z})$  è la velocità (lungo la linea di vista) delle galassie nel sistema di riferimento dell'ammasso, definita mediante il redshift medio  $\bar{z}$ . Il metodo analizza diversi profili per  $M(r)$  e per l'anisotropia  $\beta(r)$  determinando il tipo di funzione e i valori dei parametri che si adattano meglio ai dati. In conclusione risulta che il modello per il profilo di massa che riproduce i dati in maniera migliore è una funzione NFW di eq. (5.1) con

$$r_{200} = 1.96_{-0.11}^{+0.07} Mpc, \quad r_{-2} = 0.27_{-0.04}^{+0.14} Mpc,$$

avendo scelto, come modello per l'anisotropia  $\beta(r)$ , quello che minimizza il prodotto degli errori relativi sui parametri:

$$\beta(r) = \beta_{\infty} \frac{r - r_{-2}}{r + r_{-2}}$$

dove  $\beta_{\infty}$  è il valore dell'anisotropia a grandi raggi.

Per studiare la regione esterna a  $r_{200}$  (fino a  $5 Mpc$ ) l'equazione di Jeans non si può utilizzare; infatti  $r_{200}$  è vicino al raggio entro il quale il modello di collasso sferico prevede virializzazione, pertanto al di fuori ci si aspetta che l'equilibrio viriale non sia stato raggiunto. Ciò è confermato dalle simulazioni numeriche N-body, le quali hanno mostrato che oltre  $r_{200}$  la dinamica degli aloni cambia e non siamo più in condizioni di equilibrio. Poiché l'equazione di Jeans è ricavata sulla base che il sistema sia all'equilibrio, non possiamo applicarla; al suo posto si utilizza il *metodo delle caustiche*. Questa procedura sfrutta il fatto che le galassie nel piano proiettato  $(r_{pr}, v_{rf})$  si distribuiscono seguendo un profilo simmetrico rispetto all'asse  $r_{pr}$  di ampiezza decrescente

(fig. 5.2)  $\mathcal{A}(r)$ , il cui contorno è chiamato caustica. Si può dimostrare (Diaferio & Geller, 1997[19]; Diaferio 1999[20]) che  $\mathcal{A}(r)$  è legato al profilo di massa dell'ammasso<sup>2</sup>. La figura 5.3 mostra i risultati combinati di [10] e [67]: la linea tratteggiata nera rappresenta il valore di best fit per il profilo di massa  $M(r)$  dall'analisi dinamica fino a  $r = 5 \text{ Mpc}$  calcolato con l'algoritmo MAMPOSSt (regione azzurra) e sfruttando il metodo delle caustiche (regione in verde). Le aree ombreggiate indicano il livello di confidenza del 68%. La striscia arancione e quella rossa mostrano invece il profilo ottenuto rispettivamente dal weak lensing e dallo strong lensing, sempre al 68%. Possiamo osservare come i differenti metodi utilizzati producano profili in ottimo accordo tra loro entro l'errore; ciò suggerisce che il calcolo di  $\eta$  effettuato con questi dati produca un valore consistente con 1. In aggiunta, dall'incertezza sui parametri che caratterizzano entrambi i profili di massa, possiamo aspettarci un intervallo di errore per il nostro risultato sufficientemente piccolo se comparato con le precedenti determinazioni di  $\eta$ .

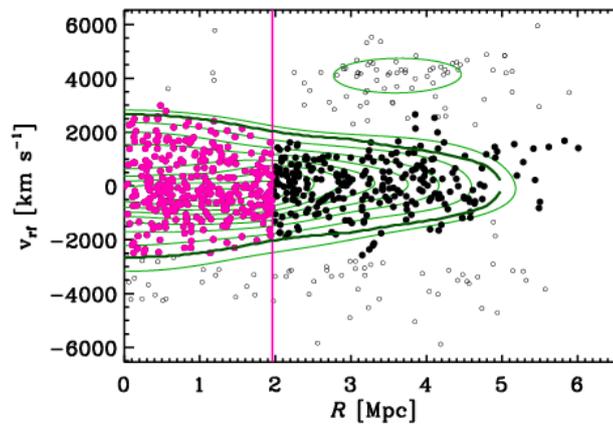


Figura 5.2: Distribuzione delle galassie nel piano proiettato  $(r_{pr}, v_{rf})$  entro  $r_{200}$  (in rosa) e oltre  $r_{200}$  (in nero). Le curve in verde rappresentano i contorni di iso-densità numerica; la caustica è identificata dalla linea più spessa. I cerchi vuoti sono galassie non facenti parte dell'ammasso, i cerchi pieni (rosa e neri) sono i membri dell'ammasso. Figura da Biviano et al.[10]

<sup>2</sup>Il valore di  $\eta$  è stato calcolato fino a  $r_{200}$  in questa tesi, poiché oltre questo raggio la ricostruzione del profilo del lensing è soggetta ad errori sistematici, quindi la regione esterna non verrà presa in considerazione nella nostra analisi

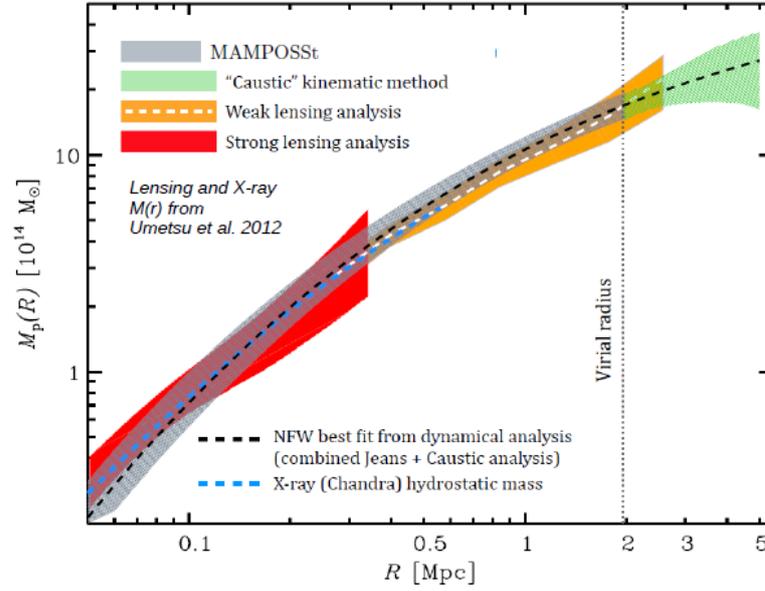


Figura 5.3: Profilo di massa proiettato per l’ammasso MACS 1206, ottenuto tramite l’analisi dinamica (aree in azzurro e verde, linea nera tratteggiata) e tramite l’analisi dal lensing (aree in rosso e arancio, linea bianca tratteggiata) al 68% del livello di confidenza. Figura da Rosati et al.

## 5.2 Vincoli su $\eta$

### 5.2.1 Derivazione di $\eta$ dai profili di massa

Nel capitolo 4 abbiamo definito il potenziale di lensing  $\Phi_{lens}$  attraverso l’indice di rifrazione efficace, mostrando come esso dipenda, al primo ordine, dalla somma dei potenziali scalari  $\Phi + \Psi$ , che descrivono la perturbazione della metrica di FLRW nella gauge newtoniana conforme. Possiamo collegare questa quantità ad un profilo di densità  $\rho_{lens}$  sfruttando l’equazione di Poisson, così come è stato fatto per l’analisi dinamica (paragrafo 4.2.3, eq. 4.78), con la differenza che in quel caso il potenziale era semplicemente dato dalla componente (0,0) della metrica. Ora invece avremo:

$$\rho_{lens}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi G} \nabla^2 \Phi_{lens}(\mathbf{r}). \quad (5.2)$$

Assumendo simmetria sferica (che, come detto precedentemente, rappresenta una valida approssimazione per MACS 1206), il potenziale dipenderà solo dal raggio e il laplaciano diventa  $\frac{d^2}{dr^2}$ .

Integriamo l'eq.(5.2) nel volume compreso entro un raggio  $r$ , così da ottenere la relazione tra profilo di massa e potenziale del lensing:

$$m_{lens}(r) = \frac{r^2}{G} \frac{d}{dr} \Phi_{lens}(r) = \frac{r^2}{2G} \left( \frac{d}{dr} \Phi(r) + \frac{d}{dr} \Psi(r) \right). \quad (5.3)$$

In realtà  $\rho_{lens}(r)$  e  $m_{lens}(r)$  sono sensibili anche al contributo della pressione del fluido che genera il campo gravitazionale (Faber, Visser 2006 [24]); Sartoris et al. [60], assumendo RG, hanno sfruttato il confronto tra i profili per MACS 1206 per vincolare l'equazione di stato della materia oscura sotto l'ipotesi di un fluido con due differenti componenti di pressione, trovando che  $p_t = p_r = 0$  con errore del 15 %. La nostra analisi, invece, considera come assunto l'ipotesi del fluido perfetto con pressione nulla rilasciando l'imposizione di essere in relatività generale.

Il primo addendo a secondo membro di eq. (5.3) è, per definizione, il profilo di massa derivato dalla dinamica, a meno di un fattore 2:

$$m_{dyn}(r) = \frac{r^2}{G} \frac{d}{dr} \Phi(r).$$

A questo punto riscriviamo eq.(5.3) come

$$\frac{G}{r^2} [2m_{lens}(r) - m_{dyn}(r)] = \frac{d}{dr} \Psi(r),$$

e dunque

$$\tilde{\Psi}(r') = \Psi(r') - \Psi(r_0) = \int_{r_0}^{r'} \frac{G}{r^2} [2m_{lens}(r) - m_{dyn}(r)] dr. \quad (5.4)$$

Nell'equazione precedente, per comodità, abbiamo assorbito la costante di integrazione nella definizione di  $\tilde{\Psi}$ <sup>3</sup>. Analogamente per il profilo di massa  $m_{dyn}(r)$  otteniamo

<sup>3</sup>La costante è irrilevante ai fini del conto. Infatti possiamo sempre sfruttare l'arbitrarietà nella definizione dei potenziali per porre  $\Phi(r_0) = \Psi(r_0) = 0$

$$\tilde{\Phi}(r') = \Phi(r') - \Phi(r_0) = \int_{r_0}^{r'} \frac{G}{r^2} m_{dyn}(r) dr \quad (5.5)$$

A questo punto il rapporto tra i potenziali potrà essere espresso in funzione dei profili di massa:

$$\eta(r) = \frac{\int_{r_0}^{r'} \frac{G}{r^2} [2m_{lens}(r) - m_{dyn}(r)] dr}{\int_{r_0}^{r'} \frac{G}{r^2} m_{dyn}(r) dr} \quad (5.6)$$

### 5.2.2 Implementazione numerica e risultati

Il calcolo è stato effettuato sfruttando un codice di integrazione numerica in Matlab basato sulla formula di Cavalieri - Simpson,

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{n-1}) + 2f(x_n)],$$

implementata in maniera adattiva, ovvero il passo di integrazione  $h$  viene scelto in modo tale da garantire che l'errore finale sia inferiore alla tolleranza richiesta. La routine utilizzata ha tolleranza di riferimento pari a  $\varepsilon = 10^{-6}$ , che può essere migliorata fino a  $10^{-12}$ ; tuttavia diverse prove hanno mostrato che la scelta di  $\varepsilon$  non incide sul risultato finale. Il programma integra i profili NFW con i parametri  $r_{200}$  e  $r_{-2}$  fissati da [10] e [67]. L'intervallo di raggi utilizzato per la determinazione del risultato si limita a  $r \leq r_{200}$ , poich'è per raggi maggiori possono insorgere errori sistematici in entrambe le derivazioni delle masse. Ad esempio, come abbiamo già illustrato sopra, l'equazione di Jenas non vale oltre il raggio viriale  $r_{200}$  poichè non siamo più in una condizione di equilibrio. Ciò di per sé non costituirebbe un problema, in quanto il metodo delle caustiche, seppur con minore precisione [10], consente comunque di ricavare il profilo di massa. La complicazione maggiore deriva dalla determinazione del profilo tramite il lensing, che viene alterato da contaminazioni della struttura filamentare a larga scala.

Come limite inferiore abbiamo posto  $r \geq 0.5 Mpc$ , per diverse ragioni. Intanto, come evidente nell'equazione (5.6), il vincolo su  $\eta$  per ogni  $r$  dipende dagli estremi d'integrazione, quindi la scelta di  $r_0$  incide sulla determinazione di tutto il profilo per il nostro parametro. Detto ciò, se osserviamo la figura 5.3, possiamo notare come il profilo di massa ricavato dalle analisi di strong lensing (al di sotto di  $0.5 Mpc$ ) abbia un intervallo di errore più largo rispetto al profilo ottenuto tramite weak lensing. Questo conduce ad un aumento dell'incertezza in  $\eta$  se si considera anche la regione più interna. Oltretutto a numeratore di eq. (5.6) compare una differenza integrata dei profili, e poiché i valori di riferimento per lensing e dinamica (linee tratteggiate in figura 5.3) tendono a differire maggiormente con il diminuire del raggio,  $\eta$  di riferimento che otteniamo estendendo il nostro conto a bassi raggi risulta più grande rispetto al valore che si ha se partiamo da  $r = 0.5 Mpc$ .

In aggiunta a motivazioni prettamente statistiche, la struttura dell'ammasso MACS 1206 gioca un ruolo fondamentale in questa analisi. Abbiamo sottolineato che l'ammasso gode della proprietà di rilassamento; in realtà quello che possiamo dire è che MACS 1206 è *globalmente rilassato*, ma non abbiamo indicazioni sufficienti per stabilire se lo sia nella regione centrale. Questo perché il picco centrale in  $X$  non è così pronunciato come ci si aspetterebbe, si dice infatti che l'ammasso è "non-cool core moderato". Il grado di rilassamento, che incide sulla determinazione dei profili di massa e conseguentemente di  $\eta$ , introduce una sistematica nella procedura illustrata in questa tesi.

Infine, non possiamo trascurare l'effetto dei barioni sui modelli per i profili di massa, più evidente a piccoli raggi, che modifica i valori dei parametri della funzione NFW (Biviano, 2006 [9]).

Provando ad estendere l'integrazione dei profili di massa nell'eq. (5.6) per  $r < 0.5 Mpc$ , ci aspettiamo dunque che il vincolo su  $\eta$  risulti meno stringente. Abbiamo ad ogni modo riportato entrambe le analisi nella figura 5.9, sia per avere un'idea di come  $\eta$  si comporti a piccoli raggi, sia per enfatizzare la differenza quando si prende un intervallo più stretto. Le aree ombreggiate rappresentano gli intervalli di errore al 68% del livello di confidenza (vedere di seguito), in giallo nel caso di  $0.07 Mpc \leq r \leq 1.96 Mpc$ , in azzurro nel caso  $0.55 Mpc \leq r \leq 1.96 Mpc$ . Possiamo osservare come le restrizioni su

$\eta$  si indeboliscono notevolmente quando si aumenta l'intervallo d'integrazione, inoltre l'errore cresce con il diminuire della distanza dal centro in entrambi i casi; si discuterà meglio questo punto più avanti. Facciamo notare inoltre che al di sotto di  $r \sim 0.1 Mpc$ , bisogna anche tenere in considerazione gli effetti della galassia centrale BCG, che domina la dinamica per  $r < 0.05 Mpc$ ; infatti, il profilo di [10] è stato determinato proprio a partire da  $r = 0.05 Mpc$ .

Per ottenere l'intervallo di errore del nostro risultato, si è ripetuto il calcolo di  $\eta(r)$  per  $10^4$  valori dei parametri liberi, determinati da [60] con un metodo Montecarlo - Markov Chain<sup>4</sup> che tenesse conto della covarianza tra  $r_{200}$  e  $r_{-2}$  in entrambi i profili. Per l'analisi dinamica, Biviano et al. [10] hanno mostrato che le distribuzioni dei singoli parametri sono essenzialmente non correlate, mentre, nel caso del lensing, Umetsu et al. [67] ottengono una distribuzione bivariata assimilabile ad una Gaussiana con covarianza diversa da zero.

I risultati dell'algoritmo Montecarlo sono riportati in Figura 5.4 per la dinamica e in Figura 5.5 per il lensing. È evidente, soprattutto in Fig. 5.4, come il vincolo che  $r_{-2} > 0$  porti ad un'asimmetria nella distribuzione di probabilità dei parametri. Questo si riflette anche nella distribuzione per  $\eta$ , dove vengono favoriti valori maggiori di 1, come possiamo osservare nella figura 5.6. Qui abbiamo riportato la funzione di distribuzione di probabilità  $f(\eta)$  rispettivamente per  $\eta(r = 1.04 Mpc)$  (blu) e  $\eta(r_{200} = 1.96 Mpc)$  (rosso), per i  $10^4$  valori generati utilizzando gli altrettanti parametri  $r_{200}$  e  $r_{-2}$ . Le due figure a sinistra mostrano il caso in cui l'integrazione per determinare  $\eta$  ha come estremo inferiore  $r_0 = 0.5 Mpc$ , mentre le due immagini a destra sono ottenute per  $r_0 = 0.07 Mpc$ . In entrambi i casi, per  $r = r_{200}$ ,  $f(\eta)$  risulta più piccata, e l'intervallo di errore diminuisce di circa il 30% rispetto alla distribuzione per  $r = 1.04 Mpc$ .

In figura 5.7 viene mostrato l'andamento di  $\eta$  in funzione di  $r$  nell'intervallo  $[0.55 Mpc - 1.96 Mpc]$ . Le aree ombreggiate rappresentano gli errori al 68% (verde) e al 90% (azzurro) del livello di confidenza, calcolati a partire dalle distribuzioni di probabilità per ciascun  $r$ . Il motivo per cui entrambi i profili di  $\eta(r)$  mostrati in fig. 5.9 presentano un andamento decrescente per l'incertezza in funzione di  $r$  è legato alla correlazione tra

<sup>4</sup>Il metodo Montecarlo- Markov Chain è un algoritmo basato su un processo markoviano, cioè un processo tale per cui la probabilità di transizione ad un certo stato del sistema dipende unicamente dallo stato precedente. L'esempio più semplice di catena di Markov è il *random walk*.

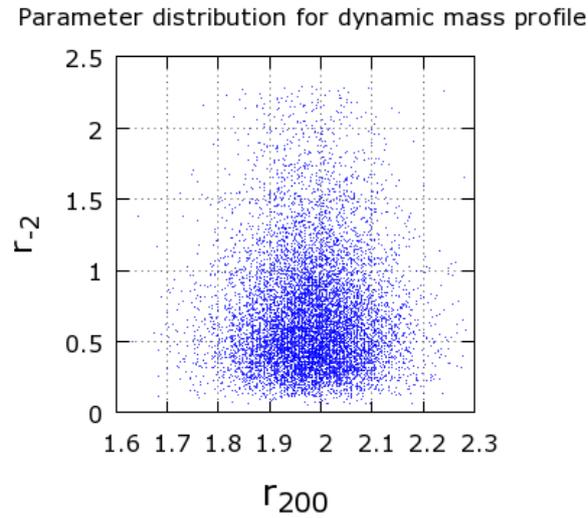


Figura 5.4: distribuzione dei valori  $r_{200}$  e  $r_{-2}$  per il profilo determinato tramite la dinamica. L'asimmetria verso la parte superiore deriva dal vincolo  $r_{-2} > 0$

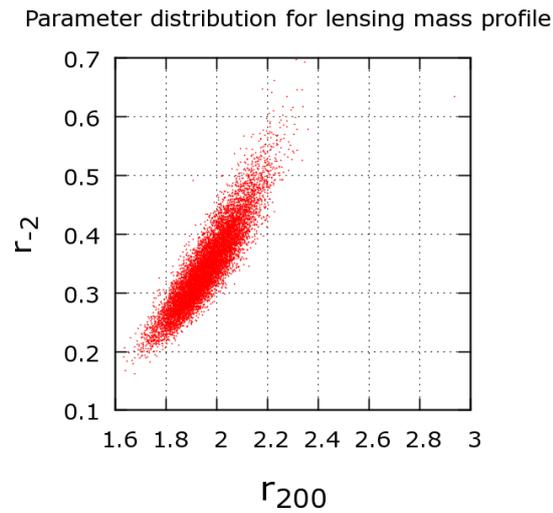


Figura 5.5: Distribuzione dei valori  $r_{200}$  e  $r_{-2}$  per il profilo determinato tramite il lensing. La forma ellissoidale indica la presenza di una correlazione tra i parametri

gli errori; questa deriva dal fatto che i profili di massa sono integrati, e quindi la determinazione di  $\eta$  ad un certo raggio contiene informazioni su tutti i valori precedenti.

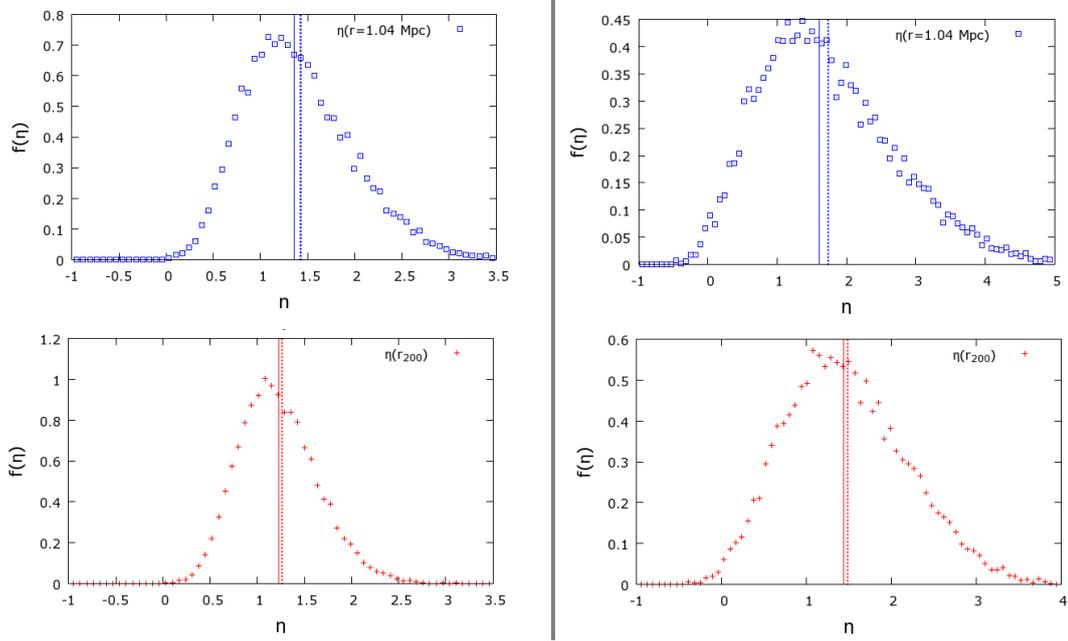


Figura 5.6: Sinistra: distribuzione dei valori  $\eta(r = 1.04 \text{ Mpc})$  (pannello superiore, quadratini blu) e  $\eta(r_{200})$  (pannello inferiore, croci in rosso). Le linee solide verticali rappresentano la mediana, le linee tratteggiate la media. L'asimmetria è più marcata nella distribuzione per  $r = 1.04 \text{ Mpc}$ . Tali distribuzioni sono state ottenute raggruppando i valori di  $\eta$  in intervalli  $\Delta\eta$  di ampiezza 0.7. Destra: stesse distribuzioni nel caso in cui si estende l'intervallo d'integrazione ponendo l'estremo inferiore  $r_0 = 0.07 \text{ Mpc}$

Come riferimento  $\eta_{rif}$ , abbiamo scelto di fornire la mediana di ciascuna distribuzione, per il fatto che non è sensibile a fluttuazioni nelle code, al contrario della media; il valore più probabile è stato escluso poiché l'eventuale presenza di picchi secondari in  $f(\eta)$  produrrebbe un'informazione incompleta. Tuttavia, analizzando la figura 5.8 si vede come in realtà media e mediana non siano molto diverse, e la differenza diventi trascurabile per  $r \rightarrow r_{200}$ . La moda presenta invece un andamento più irregolare, sebbene rimanga sempre entro l'intervallo del 68%. Riportiamo infine la misura di  $\eta$  in corrispondenza del raggio  $r_{200}$ , essendo, per quanto detto sopra, quella maggiormente significativa nella nostra analisi:

$$\eta(r_{200}) = 1.23^{+0.41}_{-0.38} \quad ^{+0.77}_{-0.58} \quad (5.7)$$

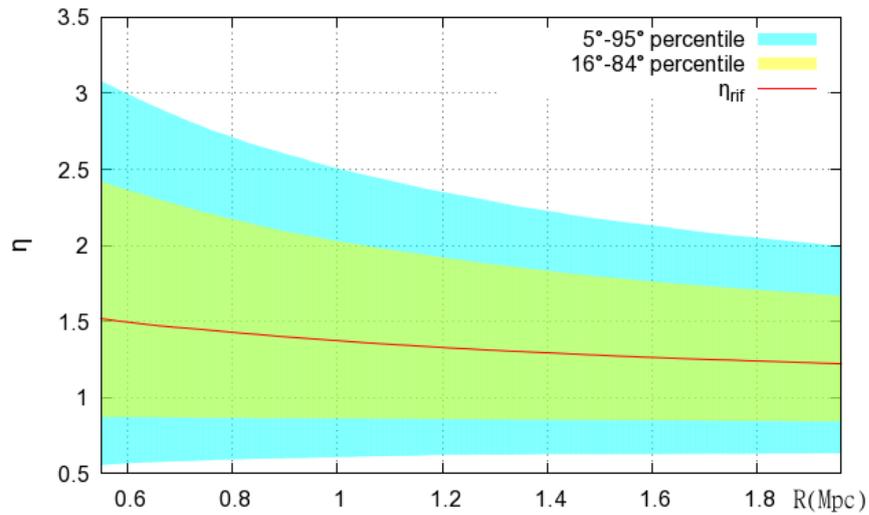


Figura 5.7:  $\eta(r)$  nell'intervallo tra  $r = 0.55 Mpc$  e  $r = 1.96 Mpc$ . L'area in verde indica l'intervallo di errore al 68%, l'area in azzurro al 90%. La linea rossa rappresenta il valore della mediana della distribuzione

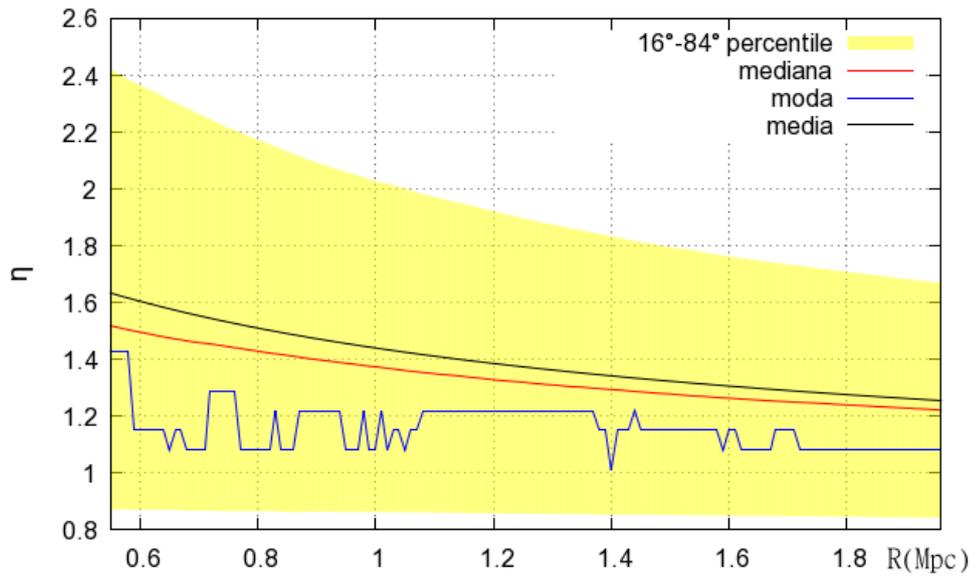


Figura 5.8: andamento della mediana (linea solida rossa), della media (linea solida nera) e della moda (linea solida blu) per  $\eta$ ; tutti sono compresi nell'intervallo tra il 16° e l'84° percentile (area in giallo)

dove l'errore (statistico) è stato definito utilizzando la larghezza tra il 16° e l'84° percentile (primo intervallo) e tra il 2° e il 98° percentile (secondo intervallo). Calcolando  $\eta$  a partire da  $r = 0.07 Mpc$ , si ottiene invece:

$$\eta^1(r_{200}) = 1.44^{+0.67}_{-0.80} (68\% C.L.) \quad +0.82^{+0.82}_{-0.91} (98\% C.L.) \quad (5.8)$$

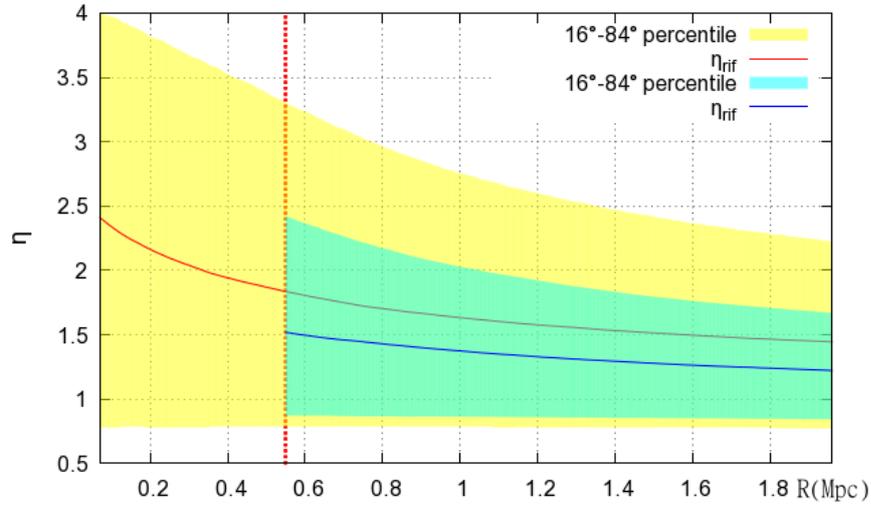


Figura 5.9: Valori di  $\eta(r)$  avendo esteso l'intervallo d'integrazione fino a  $0.07 Mpc$ . La linea solida rossa rappresenta la mediana delle distribuzioni, l'area in giallo indica il 68% del livello di confidenza. Sono stati riportati anche i risultati del calcolo nell'intervallo  $[0.55, 1.96] Mpc$  (linea blu, area in azzurro), sempre al 68% CL, per evidenziare la differenza tra le due situazioni. La linea rossa tratteggiata verticale identifica il raggio  $r = 0.55 Mpc$ . Le due analisi sono consistenti tra di loro, infatti i valori di  $\eta$  ottenuti partendo da  $r_0 = 0.55$  rientrano nell'intervallo di errore che si ha estendendo l'integrazione; da notare come il valore di riferimento (la mediana) nel secondo caso sia leggermente più alto.

### 5.3 Discussioni e confronto con precedenti vincoli

Abbiamo ricavato l'andamento del parametro  $\eta = \frac{\Psi}{\Phi}$  in funzione della distanza radiale per l'ammasso di galassie MACS 1206 attraverso il confronto tra i profili di massa

derivati dalla dinamica e dal lensing gravitazionale. Per  $r_{200} = 1.96 Mpc$ , abbiamo trovato

$$\eta(r_{200}) = 1.23^{+0.41}_{-0.38}, \quad (5.9)$$

al 68% CL. La nostra analisi risulta in accordo con le previsioni della relatività generale,  $\eta = 1$ ; non sono state riscontrate deviazioni significative entro l'errore. Inoltre, dalle misure effettuate non siamo in grado di determinare un'eventuale dipendenza dal raggio per il parametro. In generale, infatti,  $\eta$  è una funzione dalla scala e dal tempo, e rappresenta solo una delle possibili parametrizzazioni ottenibili dai potenziali della metrica linearmente perturbata, utilizzate per identificare variazioni dalla RG. Ad esempio, 3 delle parametrizzazioni più comunemente usate oltre a  $\eta$  nella gauge newtoniana conforme sono:

$Q(a, k)$ , che descrive modifiche all'equazione di Poisson per il potenziale  $\Psi$  come

$$-k^2\Psi = 4\pi G a^2 Q(a, k)\delta\rho; \quad (5.10)$$

$\mu(a, k)$  è l'analogo di  $Q$  nel caso del potenziale  $\Phi$ :

$$-k^2\Phi = 4\pi G a^2 \mu(a, k)\delta\rho; \quad (5.11)$$

$\Sigma(a, k)$ , che esprime le modifiche al potenziale di lensing  $\Phi_{lens} = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi)$  attraverso

$$-k^2\Phi_{lens} = 4\pi G a^2 \Sigma(a, k)\delta\rho. \quad (5.12)$$

In questa tesi si è scelto di lavorare con  $\eta$  poiché, come abbiamo ripetutamente sottolineato, esso è direttamente collegato al rapporto tra i profili di massa.

Ad ogni modo, il nostro risultato presenta aspetti interessanti da collocare nel panorama attuale della ricerca sulla gravità modificata. In primo luogo, il vincolo che abbiamo posto su  $\eta$  è il più stringente fin'ora ottenuto. Con i precedenti studi effettuati sui dati di Planck (Planck, 2015 [50]) era stato possibile determinare il valore, per  $z = 0$ :

$$\eta_0 - 1 = 0.60 \pm 0.86,$$

al 68% del livello di confidenza, sotto l'ipotesi di  $\eta$  costante rispetto alla scala  $k$ . Questo vincolo deriva dall'analisi dei dati del CMB, combinata con le misure delle oscillazioni acustiche dei barioni (BAO), delle supernove di tipo Ia e della costante di Hubble; a queste sono state aggiunte le misure della distribuzione di velocità del campione di galassie CMASS dalla BOSS collaboration<sup>5</sup>, basate sul lavoro di Samushia et al. (2014) [58], e le analisi del weak lensing gravitazionale per i dati dal Canada France Hawaii Telescope Lensing Survey CFHTLenS<sup>6</sup> (Kilbinger et al., 2013[36]; Heymans et al., 2013[32]).

Una deviazione significativa a  $\sim 2\sigma$  dal modello  $\Lambda$ CDM emerge nella distribuzione dei parametri  $\eta_0 - 1$  e  $\mu_0 - 1$ , dove  $\mu(a, k) = -k^2\Phi/4\pi Ga^2\delta\rho$  è definito nell'eq. (5.11); questa tensione sparisce tuttavia quando viene considerato il lensing del CMB, che riporta il risultato ad essere compatibile con il Modello Standard entro  $1\sigma$  (Fig. 14 e Fig 17 di [50]). Inoltre, introducendo la dipendenza  $\eta \rightarrow \eta(k)$ , l'incertezza sulla determinazione del parametro aumenta notevolmente (Fig. 5.10, ovvero fig. 18 di [50]). Nel nostro caso, non solo la misura non necessita assunzioni su eventuali legami con la scala d'interesse, ma l'intervallo di errore risulta dimezzato rispetto al valore del modello scale-independent di [50].

Come discuteremo nelle conclusioni, il lavoro fin qui effettuato costituisce una base su cui implementare ed estendere uno studio più corposo: innanzitutto, attraverso la grande quantità di dati che presto consentirà di fare lensing e dinamica per migliaia di ammassi, sarà conseguentemente possibile un'applicazione del metodo che abbiamo illustrato ad un campione molto vasto, invece che ad un singolo caso; inoltre possiamo sfruttare il nostro risultato per cercare di ottenere vincoli sui parametri che descrivono specifici modelli di gravità modificata.

<sup>5</sup><https://www.sdss3.org/surveys/boss.php>

<sup>6</sup><http://www.cfhtlens.org>

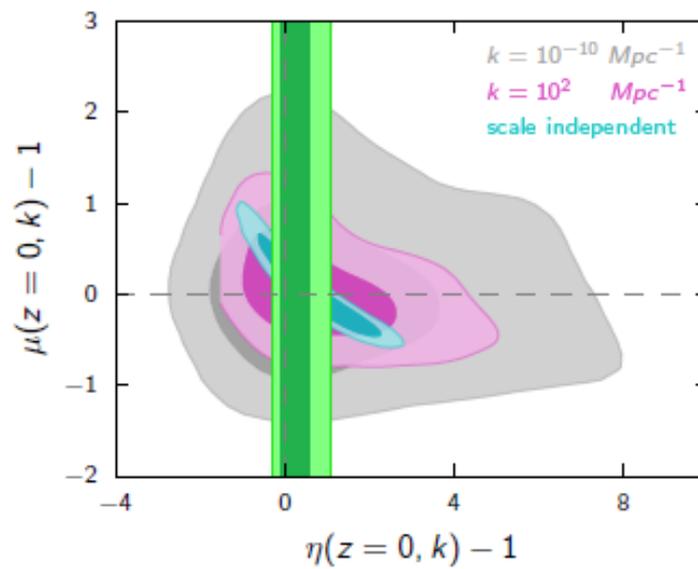


Figura 5.10: Vincoli su  $\eta_0 - 1$  e sul parametro  $\mu_0 - 1$  in funzione della scala. l'area più scura di ogni colore mostra il 68% CL, mentre l'area più chiara il 95%. La regione in azzurro indica il modello scale-independent. Figura da Planck Collaboration, 2015. In verde, il risultato  $\eta(z = 0.44) - 1$  dalla nostra analisi per  $0.55 \text{ Mpc} \leq r \leq 1.96 \text{ Mpc}$  a confronto con le distribuzioni di Planck. Le regioni in verde scuro e in verde chiaro rappresentano rispettivamente il 68% e il 95% del livello di confidenza.

# Capitolo 6

## Conclusioni

In questa tesi è stato ricavato un vincolo sul rapporto  $\eta = \frac{\Psi}{\Phi}$  tra i potenziali della metrica di FLRW perturbata linearmente nella gauge newtoniana conforme, che rappresenta uno dei modi per identificare e quantificare deviazioni dalla Relatività Generale (nella quale si assume  $\eta = 1$ ). Per determinare il risultato, abbiamo collegato i potenziali  $\Phi$  e  $\Psi$  ai profili di massa per l'ammasso di galassie MACS 1206 a  $z = 0.44$ , ottenuti da [67] e [10] attraverso rispettivamente il lensing gravitazionale, che abbiamo visto essere sensibile alla somma dei potenziali, e la dinamica delle galassie nell'ammasso, che dipende invece solo dalla perturbazione nella componente temporale  $\Phi$ .

Abbiamo inoltre proposto una nuova derivazione del potenziale di lensing  $\frac{1}{2}(\Phi + \Psi)$  attraverso l'indice di rifrazione efficace, riadattando il conto effettuato da Faber in [24] a questo caso specifico.

Il valore di  $\eta(r)$  emerso dalla nostra analisi nell'intervallo  $[0.5 Mpc, 1.96 Mpc]$  è in accordo con la Relatività Generale entro il 68% del livello di confidenza; in corrispondenza del raggio  $r_{200} = 1.96 Mpc$  abbiamo trovato

$$\eta(r_{200}) = 1.23^{+0.41}_{-0.38} \text{ (68\% C.L.) } \quad ^{+0.77}_{-0.58} \text{ (96\% C.L.)}.$$

Abbiamo esteso il nostro conto alla regione più interna dell'ammasso, osservando come in questo caso il vincolo sul parametro si indebolisca notevolmente e il valore di

riferimento di  $\eta$  diventi più alto rispetto al caso precedente. Ciò avviene principalmente per il fatto che MACS 1206 è globalmente rilassato, mentre non si hanno indicazioni certe che la condizione di rilassamento valga anche limitatamente alla zona centrale. Si è dunque potuto stabilire come la qualità dei vincoli derivabili con il procedimento mostrato in questo lavoro sia dipendente dal grado di rilassamento di un ammasso. Confrontando quanto ottenuto con i precedenti risultati di Planck Collaboration [50], abbiamo evidenziato le potenzialità del nostro metodo, constatandone l'efficacia sebbene esso derivi dallo studio di un solo ammasso a redshift fissato ( $z \simeq 0.44$ ). Si potrebbe dunque estendere l'analisi agli altri ammassi del progetto CLASH, per avere una descrizione più completa del comportamento di  $\eta$  in differenti casi ed indicazioni sulla sua evoluzione temporale. Un confronto con la misura di Planck mostra che i due valori sono tra loro compatibili entro l'errore, pertanto non possiamo evidenziare una dipendenza dal tempo solo con queste informazioni.

Come già puntualizzato, la proprietà di un ammasso di galassie di essere dinamicamente rilassato rappresenta un requisito essenziale nella determinazione del vincolo per  $\eta$ ; è proprio grazie alla condizione di rilassamento che abbiamo potuto assumere simmetria sferica nella nostra analisi, sia nella ricostruzione dei profili che nella determinazione di  $\eta$ . Il progetto CLASH ha studiato ben 20 ammassi con tale caratteristica, offrendo dunque un terreno fertile per sviluppare la ricerca proposta in questa tesi ed ottenere risultati sempre più precisi. Inoltre, nei prossimi anni, i dati che avremo a disposizione aumenteranno considerevolmente grazie ai nuovi progetti in fase di preparazione, che consentiranno di collezionare una vasta quantità di informazioni su galassie e ammassi di galassie, sia per quanto riguarda il lensing che la dinamica. Così, accanto all'analisi sofisticata che CLASH permette di effettuare sui singoli ammassi, sarà possibile realizzare un'indagine statistica, utilizzando dati meno dettagliati per ciascun ammasso (il tempo di osservazione di ogni ammasso sarà molto breve, paragonato alle Surveys di CLASH), ma su un numero molto maggiore di campioni. Ad esempio, nel 2020 verrà lanciato il satellite Euclid<sup>1</sup> dell'ESA, che analizzerà oltre  $10^9$  galassie fino a redshift  $z \sim 2$  per un totale di 6 anni di osservazioni, fornendo dati sulla distorsione causata dal lensing gravitazionale e sulle oscillazioni acustiche dei barioni.

---

<sup>1</sup><http://sci.esa.int/euclid>

Secondo le previsioni, Euclid raccoglierà informazioni sul lensing per circa  $2 \times 10^6$  ammassi di galassie, dei quali un quinto a  $z > 1$  (Sartoris et al., 2015 [61]). Per soli 5000 di questi verrà determinato il profilo di massa singolarmente, con una precisione attesa del 20%, ma potremo comunque sfruttare Euclid per effettuare un'analisi più complessa; ad esempio si potrebbe combinare il segnale di lensing di molti ammassi, suddividendo i dati in intervalli di redshift e massa, per ottenere un profilo di massa da "stacking", anziché per il singolo ammasso.

Un ulteriore avanzamento in questi studi sarà possibile il telescopio spaziale WFIRST della NASA (Wilde-Field Infrared Survey Telescope)<sup>2</sup> che, se approvato, dovrebbe entrare in funzione intorno alla metà della prossima decade. Con un campo di vista 100 volte quello di Hubble, WFIRST effettuerà analisi spettroscopiche, di weak lensing e di microlensing, analizzando una vasta area di cielo nel vicino-infrarosso. Verrà realizzato un catalogo di galassie con densità superficiale attesa di  $\sim 75$  galassie per arcominuto quadro, dal quale sarà possibile ricostruire i profili di massa dal lensing per migliaia di ammassi.

In aggiunta alle osservazioni da satellite, una grossa fetta di dati giungerà dalle osservazioni spettroscopiche effettuate da terra. Lo spettrografo 4MOST<sup>3</sup>, in grado di studiare fino a 2400 galassie simultaneamente in 4 gradi quadrati di cielo, verrà montato sul telescopio VISTA e misurerà, a partire dal 2021, il redshift e la dispersione delle velocità per le galassie degli ammassi nell'emisfero sud che saranno identificati nella survey in banda X che effettuerà il satellite eROSITA<sup>4</sup>, il quale entrerà in funzione dal 2017; 4MOST@VISTA sfrutterà anche i dati collezionati da Euclid per la sua analisi. MOONS@VLT<sup>5</sup>, un nuovo spettrografo multi-oggetto del complesso VLT che comincerà le osservazioni nel 2019, opererà nella stessa porzione dello spettro investigata da Euclid, ma lavorando con una risoluzione spettrale maggiore rispetto a quella del satellite ESA. Allo stesso modo, WEAVE@WHT<sup>6</sup> porterà a termine una dettagliata analisi spettroscopica che consentirà di determinare la dispersione delle velocità per

---

<sup>2</sup><http://wfirst.gsfc.nasa.gov>

<sup>3</sup><https://www.4most.eu>

<sup>4</sup><http://www.mpe.mpg.de/eROSITA>

<sup>5</sup><http://www.roe.ac.uk/ciras/MOONS/VLT-MOONS.html>

<sup>6</sup><http://www.ing.iac.es/weave>

oltre  $10^4$  galassie in 10 grandi ammassi con redshift compreso tra 0.1 e 0.2 e di studiare le regioni centrali di 25 ammassi a  $z < 0.5$ .

Infine, il lavoro effettuato in questa tesi, non è che un punto di partenza per una ricerca molto più vasta: il nostro risultato può servire come base per ottenere restrizioni su specifici modelli di modifica della gravità. Sarebbe infatti possibile collegare i parametri caratteristici delle teorie ai potenziali  $\Phi$  e  $\Psi$ , e dunque tradurre il vincolo imposto su  $\eta$  a vincoli su tali parametri.

Come più volte accennato, un buon modello di modifica della gravità deve ridursi alla teoria della relatività generale per scale inferiori al  $Mpc$  e riprodurre la stessa storia di espansione del modello cosmologico standard. Una classe di teorie che soddisfano queste condizioni è chiamata  $f(R)$ , e rappresenta un primo possibile passo in avanti per la ricerca proposta.

Sostanzialmente, i modelli  $f(R)$  si basano su una modifica dell'azione di Hilbert-Einstein introducendo una funzione dello scalare di curvatura  $R$ :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R + f(R)}{16\pi G} + \mathcal{L}_m \right]. \quad (6.1)$$

Variando l'azione rispetto alla metrica  $g_{\mu\nu}$  possiamo ottenere le *equazioni di Einstein modificate*:

$$(1 + f_R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + f(R)) + (g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla_\nu - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R = \frac{(8\pi G)^2}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (6.2)$$

La quantità  $f_R = \frac{df(R)}{dR}$  viene chiamata *scalarone* e gioca il ruolo di un campo scalare che può essere interpretato come il parametro libero della teoria. Attraverso le equazioni (6.2) potremmo legare i potenziali della metrica perturbata di FLRW allo scalarone (guardare, ad esempio, Pogosian & Silvestri, 2013 [53]) e quindi ottenere un vincolo sul valore di  $f_R$  attraverso il risultato che abbiamo ottenuto per  $\eta$ .

Ovviamente, la relazione tra  $\Phi$ ,  $\Psi$  e  $f_R$  dipende dalla forma scelta per la funzione  $f(R)$ ; un modello molto interessante su cui focalizzarci è il *modello di Hu e Sawicki*

(Hu & Sawicki, 2007 [33]):

$$f(R) = -m^2 \frac{c_1(R/m^2)^n}{c_2(R/m^2)^n + 1},$$

con  $n > 0$ ,  $m$ ,  $c_1$  e  $c_2$  sono costanti. In [33] si evidenzia come un valore per  $|f_R| \sim 10^{-6}$  possa portare ad un valore di  $\eta = \frac{\Psi}{\Phi} \sim \frac{1}{2}$  per perturbazioni di ampiezza superiore alla lunghezza Compton associata al campo scalare  $\lambda_C = h/m_{f_R}c$ . Questo ci suggerisce come la misura di  $\eta$  potrebbe essere usata non solo per determinare il valore  $f_R$ , ma anche per stimare la massa dello scalarone.

Il piccolo input che abbiamo voluto fornire come conclusione mostra le grandi potenzialità del lavoro che abbiamo effettuato nella tesi; siamo dunque ora pronti per estendere la nostra analisi, nel tentativo di ottenere una più profonda conoscenza di come la gravità si comporti nell'Universo a larga scala.

# Appendice A

## Richiami di Relatività - notazioni e principi

In questa appendice verranno definiti alcuni concetti fondamentali di Relatività Generale e gli strumenti matematici per poterli sviluppare; utilizzeremo unità naturali per cui  $c = 1$  e la convenzione di Einstein sugli indici sommati:

$$V_{\mu}W^{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 V_{\mu}W^{\mu}$$

Già con la teoria della relatività ristretta la concezione di spazio e tempo come entità disgiunte viene rimpiazzata dall'idea di un'unica struttura quadridimensionale, lo *spaziotempo*, i cui punti, o eventi, rappresentano un dato fenomeno fisico che avviene in una certa posizione e in un certo istante rispetto ad un sistema di riferimento (inerziale). Per meglio dire, ciascun punto è descritto da quattro coordinate, 1 temporale e 3 spaziali, e queste dipendono dal sistema in cui si sta effettuando l'osservazione.

Nella Relatività Generale lo spaziotempo viene rappresentato tramite una *varietà differenziabile*  $(M, g)$  sulla quale è definita una metrica  $g^1$ . La varietà differenziabile altro non è che la generalizzazione del concetto di curva ad uno spazio n-dimensionale:

---

<sup>1</sup>vedi par. (A.3)

essa viene localmente collegata allo spazio euclideo attraverso funzioni invertibili differenziabili, e dunque si possono estendere sulla varietà tutti i concetti di calcolo differenziale definiti nell'euclideo. In particolare è possibile costruire dei *campi vettoriali* come funzioni dei punti  $x \in M$ , alla base della matematica tensoriale che vogliamo implementare.

Fisicamente, un campo gravitazionale è visto come una modifica geometrica alla struttura della varietà (e quindi, come vedremo, produce un cambiamento nella metrica); la presenza di massa, o equivalentemente di energia, deforma uno spaziotempo piatto, o spaziotempo di Minkowski, inducendo una curvatura su di esso. Ciò implica che le equazioni della relatività speciale vadano riadattate in questa nuova ottica: ci accorgemo di come la richiesta che le leggi fisiche abbiano la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento porti inevitabilmente all'utilizzo di un formalismo matematico più complesso, ma in grado di riformulare tali leggi in maniera compatta ed efficiente.

Consideriamo un punto  $x \in M$  ed una funzione  $V^\mu(x)$  definita in un aperto  $U$ . Se effettuando una trasformazione di coordinate in un altro aperto  $U'$  tale che  $U \cap U' \neq \emptyset$  si ha:

$$V'^\mu(x') = V^\nu(x) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}.$$

$V^\mu$  prende il nome di vettore *controvariante*. Se invece abbiamo una quantità  $W_\mu(x)$  che trasforma come

$$W'_\mu(x') = W_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu},$$

essa è chiamata *vettore covariante*. Dunque la differenza tra indici alti e bassi contiene informazioni non banali.

Possiamo allora definire *Tensore di rango*  $\binom{n}{m}$  un oggetto avente  $n$  indici controvarianti e  $m$  indici covarianti, caratterizzato dalla legge di trasformazione

$$T'_{\nu_1 \dots \nu_m}{}^{\mu_1 \dots \mu_n} = T_{\rho_1 \dots \rho_m}{}^{\sigma_1 \dots \sigma_n} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_m}}{\partial x'^{\nu_m}} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\sigma_n}}. \quad (\text{A.1})$$

Il nostro intento sarà quello di scrivere tutte le equazioni in termini di oggetti tensoriali; infatti un tensore rimane tale in qualsiasi sistema di riferimento si stia effettuando la

misura. Inoltre, se un tensore si annulla in un certo aperto  $U$ , l'eq. (A.1) ci garantisce che l'identità sia preservata in un altro aperto  $U'$ . Dunque, se riusciamo a porre le leggi fisiche in una forma del tipo

$$AT_{v_1 \dots v_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} + BG_{v_1 \dots v_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} = 0,$$

con  $A$  e  $B$  scalari, esse saranno invarianti in tutti i sistemi di riferimento.

## A.1 Derivata Covariante e Trasporto Parallelo

Si consideri una curva  $\gamma(\lambda)$  definita nella varietà tra i punti  $P$  e  $Q$ , dove  $\lambda \in [p, q] \subset \mathbb{R}$  è un parametro che descrive la curva tale per cui  $\gamma(p) = P$  e  $\gamma(q) = Q$ .

Dato un punto  $x(\lambda) \in \gamma$ , localmente individuato dalle coordinate  $x^\mu(\lambda)$ , definiamo il *vettore tangente* a  $\gamma$  nel punto  $x$  la quantità

$$t(x) \equiv t^\mu \partial_\mu(x) = \frac{d}{d\lambda} x.$$

Supponiamo ora di avere un altro campo vettoriale  $V = V^\mu \partial_\mu$ ; introduciamo la *derivata covariante* di  $V$  lungo la curva  $\gamma(\lambda)$

$$t^\nu \nabla_\nu V^\mu = t^\nu \partial_\nu V^\mu + t^\nu \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\rho \quad (\text{A.2})$$

che, sostituendo la definizione di vettore tangente, diventa

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu} V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} V^\rho = \frac{D}{d\lambda} V^\mu, \quad (\text{A.3})$$

dove  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$  sono detti simboli di Christoffel o *Connessione Affine*. Essi sono legati alla struttura geometrica della varietà, vedremo infatti nella sezione (A.3) come sia possibile scriverli in funzione del tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ . La derivata covariante rappresenta quindi una derivata "generalizzata" su spazi curvi, e ovviamente si riduce a quella normale in uno spaziotempo di Minkowski.

Un campo vettoriale  $V$  si dice *Trasportato Parallelamente* lungo una curva  $\gamma(\lambda)$  se,

essendo  $\frac{d}{d\lambda}$  il vettore tangente alla curva, vale la relazione:

$$\frac{D}{d\lambda}V^\mu = f(x)V^\mu, \quad (\text{A.4})$$

cioè se la sua derivata covariante lungo la curva sia proporzionale al vettore stesso a meno di una funzione arbitraria  $f(x)$ .

## A.2 Il principio di equivalenza

L'idea fisica alla base della teoria della Relatività Generale può essere espressa nel *principio di equivalenza*; ne esistono due formulazioni, entrambe dovute ad Einstein.

La **formulazione debole** assume l'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale  $m_i = m_g$ . Ciò implica che un osservatore in un sistema di riferimento soggetto a forze esterne e contemporaneamente alla gravità non riesca a distinguere quale delle forze sia effettivamente quella gravitazionale.

La **formulazione forte** afferma che in presenza di un campo gravitazionale qualsiasi è sempre possibile trovare un sistema di riferimento che sia localmente inerziale; per meglio dire, dato un punto dello spaziotempo è sempre possibile costruire un intorno in cui gli effetti della gravità siano nulli.

È abbastanza ovvio che il principio forte implichi quello debole, poiché l'annullamento del campo gravitazionale può aver luogo solo se ammettiamo che  $m_i = m_g$ . Per meglio capire il significato di queste assunzioni, consideriamo un osservatore che sia all'interno di una cabina in caduta libera sotto l'azione di un campo costante  $g$ ; scriviamo l'equazione del moto per l'osservatore, vista da un sistema di riferimento esterno alla cabina:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg,$$

avendo imposto la validità della formulazione debole. Se ora effettuiamo una trasformazione di coordinate  $x(t) \rightarrow x'(t) = x(t) - \frac{1}{2}gt^2$ , è come se fossimo passati nel sistema di riferimento proprio dell'osservatore. L'equazione del moto diventa

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 0.$$

Ovvero l'osservatore in caduta libera nel campo gravitazionale non percepisce alcuna forza: la fisica descritta dal suo punto di vista è quella in un sistema di riferimento inerziale. In realtà questo discorso può essere fatto *localmente*, dal momento che un campo gravitazionale in generale non è costante, ma cambia in ogni punto dello spaziotempo, quindi la trasformazione di coordinate sarà valida solo in una certa regione infinitesima.

La gravità dunque acquisisce una connotazione puramente geometrica: "frantuma" un unico sistema inerziale in un insieme infinito di sistemi localmente inerziali distinti tra loro. Gli effetti del campo gravitazionale vengono identificati dalle trasformazioni di coordinate per passare da un sistema ad un altro, e queste non saranno banali, ma conterranno informazioni su come è deformato lo spaziotempo.

### A.2.1 Equazione delle geodetiche e parametrizzazione affine

Vogliamo ora porci la domanda: che tipo di traiettoria descrive un corpo in caduta libera in un generico campo gravitazionale? Si consideri allora una particella in un sistema localmente inerziale individuato dal set di coordinate  $\xi^\alpha = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ .

Per quanto discusso nel paragrafo precedente, l'equazione del moto risulta

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \tag{A.5}$$

dove abbiamo definito  $d\tau$  il *tempo proprio* per un osservatore solidale con il corpo dalla relazione  $d\tau^2 \equiv -ds^2 = -\eta_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta$  (con  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$  matrice diagonale 4x4 il cui significato sarà chiarito in seguito). Supponiamo di passare ad un altro sistema di coordinate  $x^\mu$  generico; siamo interessati ad osservare il moto della particella

da questo nuovo punto di vista. Riscriviamo allora l'eq. (A.5) in funzione delle  $x^\mu$ :

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Se moltiplichiamo ambo i membri per  $\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}$ , sfruttando il fatto che  $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\beta$ , l'ultima equazione assume la forma:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (\text{A.7})$$

che è nota come *equazione delle geodetiche*, avendo introdotto la connessione affine definita nell'eq. (A.2) come:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

La relazione (A.7) può essere ricollegata al concetto di trasporto parallelo se teniamo conto che  $t^\beta = \frac{dx^\beta}{d\tau}$  è il vettore tangente alla curva parametrizzata da  $\tau$

$$\frac{d}{d\tau} t^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} t^\nu = 0, \quad (\text{A.8})$$

che corrisponde all'eq.(A.4) per il vettore tangente  $t^\beta$  con  $f(x) = 0$ .

In base a questo ragionamento, possiamo dare la seguente definizione formale di geodetica:

*È chiamata Geodetica una curva C definita sulla varietà tale che il vettore tangente è trasportato parallelamente a se stesso lungo C*

Il parametro  $\tau$  tale per cui  $f(x) = 0$  è detto *parametro affine*.

A seconda della tipologia del vettore tangente, è possibile identificare tre differenti classi di geodetiche:

1. *Timelike* ( $t^\mu t_\mu < 0$ ): descrivono la traiettoria di un corpo massivo in caduta libera in un campo gravitazionale
2. *Nulle* ( $t^\mu t_\mu = 0$ ): rappresentano il percorso nello spaziotempo per una particella con massa a riposo nulla sotto l'azione della gravità
3. *Spacelike* ( $t^\mu t_\mu > 0$ ): descrivono un insieme di eventi che appaiono simultanei ad un osservatore appropriato

### A.3 la metrica

Si consideri l'intervallo invariante  $ds^2 \equiv -d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  nel sistema localmente inerziale. Anche questo può essere espresso in un sistema di coordinate arbitrario:

$$\begin{aligned}
 ds'^2 \equiv ds^2 &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta} dx'^\mu dx'^\nu = \\
 &= g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu,
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

dove si è definito il *tensore metrico*

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \cdot \eta_{\alpha\beta}$$

L'eq. (A.9) rappresenta un modo per esprimere la distanza infinitesima in una generica varietà quadridimensionale, l'analogo del quadrintervallo nello spaziotempo di Minkowski; questa volta però  $g \neq \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$  e le sue componenti saranno funzioni dei punti in  $M$ :  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ . La metrica è dunque un tensore simmetrico di rango  $\binom{0}{2}$  che definisce le caratteristiche geometriche della varietà, ovvero stabilisce la "forma" dello spaziotempo (in gergo si dice che  $g$  *irrigidisce* la varietà); può essere rappresentato come una matrice 4x4 (simmetrica) non singolare per ogni sistema di coordinate

locali. Il fatto che il determinante sia diverso da zero implica le seguenti proprietà:

1. La *segnatura* (cioè il numero di autovalori negativi, positivi o nulli della matrice) non cambia nella varietà. Questo vuol dire che la segnatura di  $\eta_{\mu\nu}$  nel sistema localmente inerziale  $(-, +, +, +)$ <sup>2</sup> rimane valida per qualsiasi  $g_{\mu\nu}(x)$ . Una varietà con segnatura di questo tipo è detta *Lorentziana* o *Pseudoreimanniana*, mentre una varietà con metrica  $(+, +, +, +)$  è detta *Reimanniana*. Questo discorso vale qualsiasi sia la dimensione dello spazio.

2. È possibile definire una metrica inversa  $g^{\nu\alpha}$  tale che  $g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha}$

3. La metrica consente di costruire un *prodotto scalare non degenere* tra due vettori nella varietà:  $S \equiv V \cdot W = g_{\mu\nu}V^{\mu}W^{\nu}$

La contrazione del tensore metrico con un vettore produce un tensore di rango  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , che per definizione è un covettore (analogamente contraendo la metrica inversa con un covettore si ottiene un vettore). In altre parole la metrica *alza o abbassa* gli indici.

Rivolgiamo ora la nostra attenzione all'elemento di distanza (A.9); possiamo usarlo per ottenere una derivazione concettualmente più interessante dell'equazione delle geodetiche introdotta nel precedente paragrafo, dalla quale emergerà una relazione tra  $g_{\mu\nu}$  e  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ . Si consideri l'azione per una particella di massa  $m$  in caduta libera in un campo gravitazionale tra i punti  $A$  e  $B$ :

$$S = - \int_A^B m(c^2)d\tau = - \int_A^B m\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}. \quad (\text{A.10})$$

Definiamo inoltre la *lunghezza della curva* di estremi  $A$  e  $B$

$$s = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}. \quad (\text{A.11})$$

<sup>2</sup>NOTA: alcuni testi sfruttano la convenzione per cui la metrica di Minkowski ha segnatura  $(-, +, +, +)$

Supponiamo ora che  $\chi \in [\chi_A, \chi_B]$  parametrizzi la curva  $x^\mu(\chi)$ . Possiamo riscrivere gli integrali (A.10) e (A.11) in funzione di  $\chi$ :

$$S = - \int_{\chi_A}^{\chi_B} m \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\chi} \frac{dx^\nu}{d\chi}} d\chi; \quad (\text{A.12})$$

$$s = \int_{\chi_A}^{\chi_B} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\chi} \frac{dx^\nu}{d\chi}} d\chi. \quad (\text{A.13})$$

Effettuiamo una variazione delle coordinate  $\delta x^\mu$  in modo tale da lasciare fissi gli estremi e imponiamo che  $\delta S = \delta s = 0$ . Le equazioni di Eulero-Lagrange che risultano dal calcolo sono le stesse nei due casi e, poiché la particella presa in considerazione ha massa a riposo non nulla, possono essere riparametrizzate in termini di  $\tau$ , o equivalentemente di  $s$ , che sappiamo essere parametri affini per le geodetiche timelike. In questo modo si ottiene:

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} \left[ \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \right] \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0, \quad (\text{A.14})$$

che coincide con l'eq. (A.7) se assumiamo che

$$\Gamma^\mu_{\gamma\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} [\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}].$$

Questa relazione, che può essere ottenuta in maniera più formale attraverso altre derivazioni (si veda ad esempio [69] Weinberg, p. 73), fornisce un legame tra la connessione e la metrica, e quindi collega il moto dei corpi in un campo gravitazionale alla struttura dello spaziotempo. Spesso  $\Gamma^\mu_{\gamma\beta}$  sono indicati come simboli di Christoffel del secondo tipo, mentre  $g_{\alpha\mu} \Gamma^\mu_{\gamma\beta} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta}$  sono detti simboli di Christoffel del primo tipo. Soffermiamoci un istante per riflettere su quello che abbiamo ricavato: il calcolo variazionale ci ha permesso di riottenere l'equazione delle geodetiche imponendo che la variazione dell'azione (o della lunghezza  $s$ ) si annulli al primo ordine. Questo implica che le geodetiche *estremizzano* l'azione, o equivalentemente estremizzano la distanza nella varietà tra i punti  $A$  e  $B$ . Se lo spazio è di tipo Riemanniano, allora il concetto di

geodetica si riduce alla traiettoria più breve possibile tra i due estremi fissati. Da notare che nel caso di geodetiche nulle per definizione  $ds^2 = 0$ , quindi  $s$  e di conseguenza il tempo proprio  $\tau$  non possono essere usati per parametrizzare la curva. In questa situazione si può dimostrare che  $\sigma = \xi^0$  è parametro affine; l'equazione (A.7) diventa

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\sigma^2} + \Gamma^\beta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0, \quad (\text{A.15})$$

con la condizione aggiuntiva

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0. \quad (\text{A.16})$$

# Bibliografia

- [1] Abell G. O., 1958, *ApJS*, 3, 211
- [2] Allen S. W., Evrard A. E., Mantz A. B., 2011. arXiv:1103.4829v2
- [3] Bardeen J. M., 1980, *Phys. Rev. D.*, 22, 1882
- [4] Bartelmann M., Weiss A., 1994, *A&A*, 287, 1
- [5] Bartelmann M., Narayan R. 1995a, *ApJ*, 451, 60
- [6] Bartelmann M., arXiv:1010.3829v1
- [7] Binney J., Tremaine S. *Galactic Dynamics*, 1987, Princeton University Press.
- [8] Birkinshaw M., Lancaster K. *The Sunayev-Zel'dovich Effect in Cosmology and Cluster Physics*, *Lect. Notes Phys* 740, 255-285 (2008)
- [9] Biviano A. et al., 2006. arXiv:astro-ph/0605.151v1
- [10] Biviano A. et al., 2013. arXiv:1307.5867v2
- [11] Bondi H., Gold T., 1948, *MNRAS*, 108, 252
- [12] Borgani S., Guzzo L., *X-ray clusters of galaxies as tracers of structure in the Universe*, *Nature* 409, 39-45
- [13] Borgani S., Kravtsov A., arXiv:0906.4370v1
- [14] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973

- 
- [15] Cavaliere AG, Gursky H., Tucker WH., 1971. *Nature* 231:437-438
- [16] Carlstrom J. E., Holder G. P., Reese E. D. 2002. arXiv:astro-ph/0208192v1
- [17] Cavaliere A., Gursky H., & Tucker W.H., *Nature* 231, 437 (1971)
- [18] Coles P., Lucchin F., *Cosmology - The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, 2002 Wiley & Sons
- [19] Diaferio A., Geller J. M., 1997. *ApJ* 481, 633
- [20] Diaferio, 1999, *MNRAS* 309, 610
- [21] Dolag K., Gaensler B. M., Beck A. M. and Beck M. C., arXiv:1412.4829v2
- [22] Ebeling H., Edge A. C., Henry J. P. 2001, *MNRAS*, 328, 1039
- [23] Ebeling H., Ma C. J., Kneib J.-P., et al., 2009, *MNRAS*, 405, 2161
- [24] Faber T., Visser M., *Galactic Halos and Gravastars: static spherically symmetric spacetimes in modern general relativity and astrophysics*, 2006
- [25] Fedeli 2011. arXiv:1111.5780
- [26] Forman W., Kellogg E., Gursky H., Tananbaum H., Giacconi R., 1972. *ApJ* 178:309-316
- [27] Fort B., Prieur J. L., Mathez G., Mellier Y., Soucail G., 1988, *A& A*, 200, L17
- [28] Giotri R., Vargas dos Santos M., et al. *From cosmic deceleration to acceleration: new constraint from SN Ia and BAO/CMB*, March 2012. arXiv:1203.3213v1
- [29] Girardi M., et al., 2015. arXiv:1503.05607v2
- [30] Gonzales A. H., Zaritsky D., Zabludoff A. I., 2007, *ApJ*, 666, 147
- [31] Grossman, S. A., Narayan R. 1988 *Arcs from gravitational lensing*, *Ap.J.*, 324, L37

- 
- [32] Heymans C., Grocutt E., Heavens A., et al. 2013, MNRAS 432, 2433, arXiv:1303.1808
- [33] Hu W., Sawicki I., May 2007. arXiv:0705.1158v1
- [34] Kaiser N., Squires G., 1993 ApJ, 404:441-450
- [35] Kellogg E., Gursky H., Tananbaum H., et al., 1972, ApJ, 174, L65
- [36] Kilbinger M., Fu L., Heymans C. et al. 2013, MNRAS 430, 2200, arXiv:1212.3338
- [37] Kompaneets A. S., 1956. Zh.E.F.T., 31, 876
- [38] Kovner I. 1989a Ap.J. 337:621
- [39] Kovner I. 1989b Ap.J.Lett. 341:L1
- [40] Kravtsov A., Borgani S., 2012. arXiv:1205.5556
- [41] Lemze D., Postman M., Genel S., et al., 2013 ApJ, 776, 91
- [42] Lin Y.-T., Mohr J. J., Stanford S. A., 2003, ApJ, 591, 749
- [43] Lin Y.-T., Mohr J. J., Stanford S. A., 2004b, ApJ, 610, 745
- [44] Mo H., van den Bosch F., White S., *Galaxy Formation and Evolution*, 2010, Cambridge
- [45] Narayan R., Bartelmann M., *Lectures on Gravitational Lensing*. arXiv:astro-ph/9606001v2
- [46] Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M., 1997, ApJ, 490, 493
- [47] Partridge R., Peebles P. J. E. 1967, ApJ 147, 868
- [48] *Planck 2013 results*, 2013. arXiv:1303.5076
- [49] *Planck 2015 results*, 2015. arXiv:1502.01589

- [50] *Planck 2015 results: dark energy and modified gravity*, 2015. arXiv:1502.01590v1
- [51] Perlmutter S., Aldering G., Goldhaber G., et al. 1999, ApJ, 517, 565
- [52] Plionis M., López-Cruz O., Hughes D., *A Pan-Chromatic View of Clusters of Galaxies and the Large-Scale Structure*, Springer, 2008.
- [53] Pogosian L., Silvestri A., 2010. arXiv:0709.0296v3
- [54] Postman M., et al. 2012. arXiv:1106.3328v3
- [55] Press W. H., Schechter P., 1974, *Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation*
- [56] Reiss Adam G et al. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, *The Astronomical Journal* 116(3): 1009-1038. arXiv:astroph805201.
- [57] Rosati P., et al., 2014: *CLASH-VLT: A VIMOS Large Program to Map the Dark Matter Mass Distribution in Galaxy Clusters and Probe Distant Lensed Galaxies*, ESO Messenger, 158, 48.
- [58] Samushia L., Reid B. A., White M., et al. 2014, MNRAS, 439, 3504. arXiv:1312.4899
- [59] Sarazin C. L., *Gas Dynamics in Clusters of Galaxies*, Lect. Notes Phys. 740, 1-30 (2008)
- [60] Sartoris B., et al., March 2014. arXiv:1401.5800
- [61] Sartoris B., et al., 2015. arXiv:1505.02165
- [62] Schneider P., Ehlers J., and Falco E. E. *Gravitational Lenses*. Springer, 1992
- [63] Shapiro I., Phys. Rev. Lett. 13, 789, *Fourth Test of General Relativity*, December 1964

- 
- [64] Spergel D. N. et al., *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implication for Cosmology*, June 2007, ApJS 170(2): 337-408. arXiv:astro-ph/0603449
- [65] Subramanian K., Cowling S. A. 1986 MNRAS 219:333;
- [66] Suto Y., Sasaku S., Nobuyoshi M. 1998. arXiv:astro-ph/9807112v1
- [67] Umetsu K. et al., June 2012. arXiv:1204.3630v2
- [68] van der Marel R. P., Magorrian J., Carlberg R. G., et al. 2000, AJ, 119, 2038
- [69] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology - principles and applications of the general theory of relativity*, Massachusetts Institute of Technology, 1972 Wiley & Sons, Inc.
- [70] Zitrin et al., 2011a. arXiv:1211.2797
- [71] Zitrin et al., 2012. arXiv:1107.2649v3