



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRIESTE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Tesi di Laurea Specialistica in Fisica

**Metodi idrodinamici Lagrangiani
in simulazioni cosmologiche**

LAUREANDO
Giulio D'Odorico

RELATORE
Prof. Stefano Borgani

CORRELATORE
Dott. Giuseppe Murante

a.a. 2008/2009

Indice

Notazioni e convenzioni	iii
1. Introduzione	1
1.1. L'approccio numerico alla cosmologia	1
1.2. Schema della tesi	5
2. Rassegna dei principali metodi numerici	7
2.1. Basi di Teoria Cinetica e Fluidodinamica	7
2.2. Discontinuità e shock	12
2.3. Metodi numerici per sistemi non collisionali a N corpi	14
2.3.1. Somma diretta (metodo <i>Particle-Particle</i>)	15
2.3.2. Metodi PM (Particle-Mesh)	15
2.3.3. Algoritmi ad albero (Tree Algorithms)	16
2.3.4. Metodi ibridi (TreePM/ P^3M)	17
2.4. Metodi Euleriani e Lagrangiani per la fluidodinamica	18
2.5. Il metodo SPH	19
2.5.1. Basi del metodo	19
2.5.2. Equazioni dell'SPH	21
2.5.3. Conservazioni	23
2.5.4. Scelta del kernel	24
2.5.5. Risoluzione adattiva	25
2.5.6. Viscosità artificiale	27
2.5.7. Derivazione da un principio variazionale	29
2.5.8. Formulazione dell'SPH in GADGET	30
2.6. Il codice di simulazione GADGET	32
3. Metodi idrodinamici Lagrangiani: SPH e GPH	34
3.1. Principali problemi dell'SPH	34
3.1.1. Il problema del mixing	35
3.1.2. Le instabilità idrodinamiche	37
3.2. Il metodo GPH	42
3.2.1. Motivazioni	42
3.2.2. Riemann solver & metodo di Godunov	43
3.2.3. Implementazione del GPH e confronto con l'SPH	46
3.3. Il metodo di Inutsuka	48
3.3.1. Descrizione generale del metodo	48

3.3.2. Problemi	51
4. Risultati	53
4.1. Test di Sod (Shock Tube)	53
4.1.1. Descrizione del test	53
4.1.2. Risultati	56
4.1.3. Discussione	72
4.2. Test di Sedov (Blast Wave)	75
4.2.1. Descrizione del test	75
4.2.2. Risultati	76
4.2.3. Discussione	84
4.3. Blob Test	89
4.3.1. Descrizione e risultati	89
4.3.2. Discussione	94
Conclusioni	98
A. Riassunto delle equazioni principali di SPH e GPH	103
A.1. Equazioni dell'SPH	103
A.2. Equazioni del GPH	104
B. SPH: Formulazione con moltiplicatori Lagrangiani	106

Notazioni e convenzioni

Riassumiamo qui le principali convenzioni e notazioni utilizzate nel corso di questo lavoro di Tesi, anche se verranno richiamate nel testo man mano che saranno introdotte.

- In tutte le equazioni dell'SPH e del GPH useremo i, j, \dots come indici di particella. Alcuni autori [6] usano invece gli indici a, b, \dots il che sarebbe più chiaro, poichè non possono essere confusi con le componenti dei vettori. Sfortunatamente però è la prima notazione ad essere maggiormente impiegata in letteratura, e pertanto anche noi ci atterremo a questa convenzione.
- La derivata Lagrangiana verrà indicata inizialmente come D/Dt , e in seguito, per semplicità, semplicemente come d/dt .
- In prossimità di un'onda d'urto, useremo gli indici 1 e 2 per indicare rispettivamente i valori prima e dopo lo shock.
- Per una generica quantità termodinamica J , in presenza di una discontinuità, useremo la notazione $[J] \equiv J_1 - J_2$ per indicare la differenza subito prima e subito dopo la discontinuità.
- Per una generica quantità σ_i , e per *kernel* W , nelle equazioni dell'SPH, useremo le abbreviazioni seguenti:

- $\sigma_{ij} \equiv \sigma_i - \sigma_j$
- $\bar{\sigma}_{ij} \equiv \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2}$
- $W_{ij}(h_i) \equiv W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) \equiv W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_i)$
- $\bar{W}_{ij} = \frac{1}{2} [W(r_{ij}, h_i) + W(r_{ij}, h_j)]$

- Dove non diversamente specificato, le somme andranno sempre intese da 1 a N , con N numero di particelle su cui si somma.

1. Introduzione

1.1. L'approccio numerico alla cosmologia

Negli ultimi anni, l'astrofisica computazionale ha subito un notevole sviluppo, ed ha guidato il progresso di molte linee di ricerca sia in astrofisica teorica che in cosmologia. Essa ricopre oggi un ruolo importante in studi che vanno dai processi di formazione di stelle e pianeti fino alla formazione di strutture cosmiche, quali galassie e ammassi di galassie. Accanto poi a questi studi, potremmo dire di carattere generale, le simulazioni hanno permesso di approfondire e meglio comprendere aspetti specifici o processi astrofisici singoli come esplosioni di supernovae, jet o instabilità gravitazionali/magnetorotazionali in dischi di accrescimento (ovvero strutture formate da materiale diffuso in moto orbitale attorno a un corpo centrale), tutti fenomeni che giocano un ruolo importante in molte aree dell'astrofisica (vedi [21]).

La tecnologia e lo sviluppo di supercomputer paralleli sempre più veloci nella gestione dei dati e più capienti nella loro immagazzinazione, ha certo permesso di affinare sempre più le tecniche numeriche utilizzate, aumentandole in risoluzione, sia spaziale che temporale che di massa; ma di sicuro un ruolo molto importante è stato rivestito dal miglioramento degli algoritmi numerici destinati a simulare i vari sistemi astrofisici da studiare. L'introduzione di codici sempre più sofisticati e raffinati ha infatti permesso, oltre che di poter riprodurre un sempre più vasto spettro di fenomeni fisici addizionali, anche di migliorare i risultati e la portata delle simulazioni. Un esempio particolare è fornito dalle moderne simulazioni degli ammassi di galassie, che riescono ad essere sensibili ormai ad un vasto range di scale caratteristiche, dalla decina di Mpc (scala delle fluttuazioni di densità cosmologiche a partire dalle quali queste strutture si formano) alle scale dell'ordine del kpc, e contemporaneamente a seguire in maniera sempre più accurata la loro evoluzione in funzione del redshift, come illustra ad esempio la Figura 1.1, che commenteremo più avanti.

La cosmologia è fra le discipline che più hanno beneficiato dello sviluppo delle tecniche numeriche, e non c'è dubbio che un miglioramento futuro di queste ultime porterà parallelamente ad una maggiore comprensione di molti aspetti della prima. Il panorama cosmologico è mutato molto negli ultimi decenni, rendendo la cosmologia una disciplina autonoma e variegata. Una delle sfide più ambiziose della cosmologia moderna è ad esempio la descrizione dei processi di formazione di galassie e ammassi di galassie, a partire dalle condizioni iniziali che sono state generate ai primi

istanti dell’Universo, problema che fino a non molto tempo fa era di ardua soluzione a causa della grande incertezza nella determinazione dei parametri cosmologici. Oggi le osservazioni sempre più accurate [61] delle anisotropie nel fondo cosmico di microonde (*cosmic microwave background*, CMB), assieme ad altre fonti indipendenti, quali ad esempio la determinazione della relazione distanza-luminosità per supernove di tipo Ia (le *candele standard* astrofisiche), la determinazione dello spettro di potenza della distribuzione di galassie, e l’evoluzione delle proprietà degli ammassi di galassie [62, 63], ha permesso di porre dei vincoli molto stringenti sui valori dei parametri cosmologici. Ne risulta uno scenario [66, 67, 69, 68, 18] in cui l’Universo è dominato per il 75% circa da una componente di “Energia Oscura”, responsabile dell’accelerazione osservata di recente nell’espansione dell’Universo, per circa il 20% da una componente di “Materia Oscura” non barionica, e solo per il 5% circa da materia barionica, cioè la materia “ordinaria”, che entra nel Modello Standard delle particelle elementari, ed è osservabile grazie alle proprie interazioni elettromagnetiche [64].

La componente di materia oscura è quella che domina nelle instabilità gravitazionali, secondo il modello oggi accettato di formazione delle strutture cosmiche, il cosiddetto modello *bottom-up*, in cui cioè si ha prima formazione di strutture alle scale più piccole, che poi unendosi danno luogo a strutture alle grandi scale, come gli ammassi di galassie. In tale modello la componente di materia oscura si disaccoppia per prima dalle altre, formando le buche di potenziale che permetteranno ai barioni di formare le strutture osservabili [69, 66, 67].

Come esempio, la Figura 1.1 riporta i risultati di una simulazione della formazione di un ammasso di galassie in contesto cosmologico [19]. Vengono visualizzate le distribuzioni della materia oscura (pannelli superiori), del gas (pannelli centrali) e delle stelle (pannelli inferiori), e la loro evoluzione fino al tempo presente entro la regione di formazione dell’ammasso. Queste mappe illustrano molto bene il processo gerarchico di formazione delle strutture cosmiche. In esse si vede come la distribuzione del gas (barionico) tenda a tracciare quella della materia oscura. Inizialmente è già presente un gran numero di aloni di materia oscura, disposti lungo i nodi di una complessa rete di filamenti. Man mano che il sistema evolve, sempre più massa continua ad accrescere in questi filamenti, e gli aloni di materia oscura si spostano lungo essi, fondendosi alla fine in corrispondenza delle intersezioni fra i vari filamenti. In quei siti si creano aloni sempre più grandi, ed è lì che gli ammassi di galassie alla fine si formano.

La determinazione precisa dello scenario cosmologico, dei suoi parametri e delle sue componenti, fa sì che siano ben note le condizioni al contorno per la dinamica delle instabilità gravitazionali, le quali evolvendo guidano l’evoluzione parallela della componente barionica e portano alla formazione delle strutture cosmiche nell’Universo vicino. Tale evoluzione segue inizialmente un regime lineare, che consente l’utilizzo di approcci analitici più o meno diretti (quali il *criterio di Jeans*), dopodichè si entra in regime nonlineare, che necessita di metodi numerici per essere seguito accuratamente. L’approccio numerico alla cosmologia presenta aspetti abbastanza complessi, per via delle molteplici scale coinvolte; tuttavia la dinamica delle instabilità gravitazionali è ben riprodotta (come riferimento generale si consulti [70]), principalmente facendo ricorso a metodi ad N corpi, che risolvono l’equazione di Boltzmann associata ad una componente non collisionale, e che descriveremo meglio nel Capitolo 2.

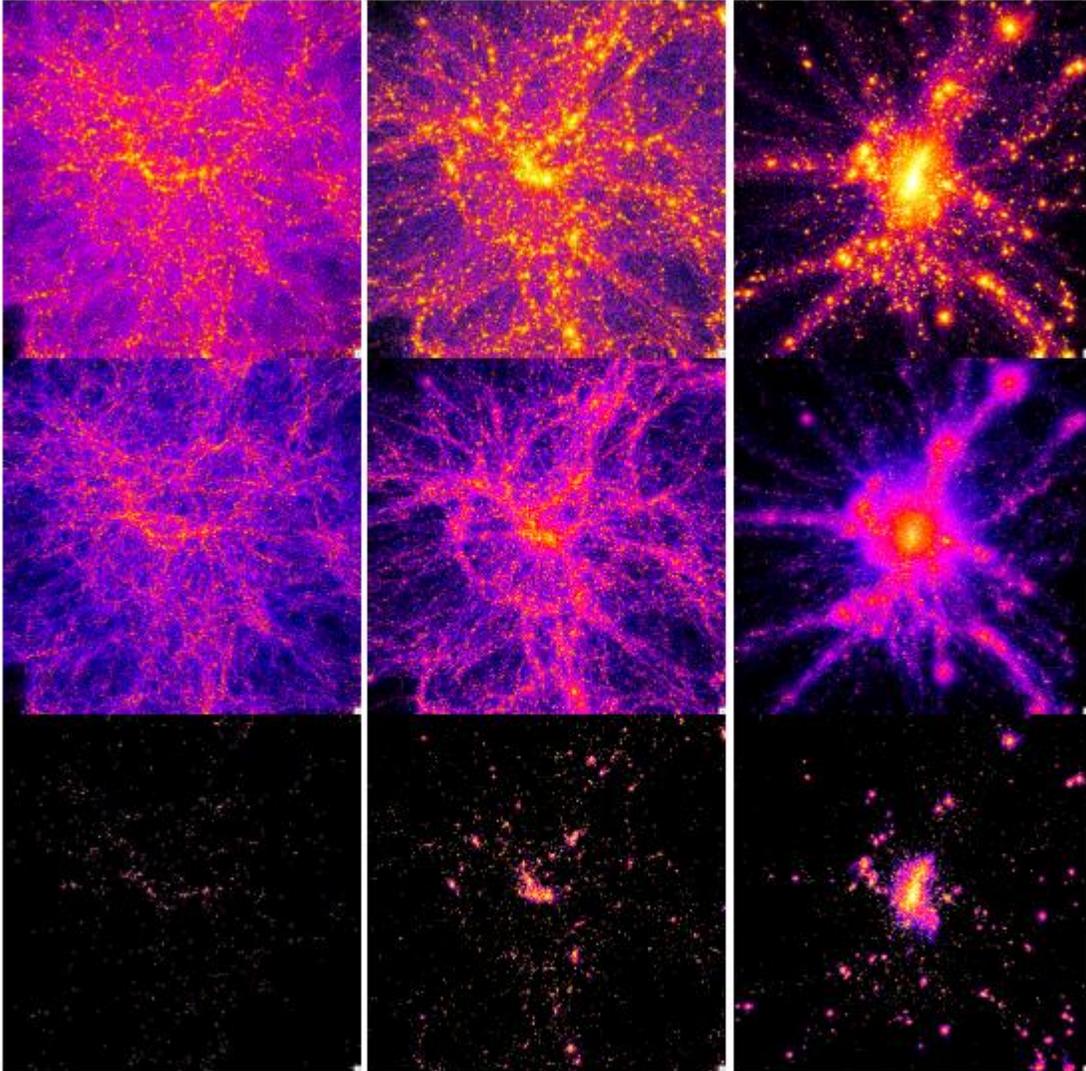


Figura 1.1.: La formazione di un ammasso di galassie in contesto cosmologico, simulata mediante il codice idrodinamico Tree-SPH implementato in GADGET [5]. I pannelli superiori, centrali ed inferiori riportano le mappe di densità di materia oscura, distribuzione del gas e distribuzione stellare rispettivamente. Da sinistra a destra sono visualizzati i fotogrammi a redshift $z = 4, 2$ e 0 . Ogni pannello copre una scala comovente di circa $24h^{-1}Mpc$ (Figura estratta da [19]).

Diverso è il discorso relativo alla componente barionica che accresce ed evolve entro le buche di potenziale formate dall'instabilità gravitazionale dominata dalla componente di materia oscura non barionica. Tale componente barionica ha una dinamica più complessa e difficile da seguire, essendo influenzata da fenomeni astrofisici che avvengono su scale inferiori rispetto a quelle tipicamente risolte nelle simulazioni di formazione di strutture (per questo sono dette solitamente scale *sotto-griglia*). Nelle simulazioni, infatti, si vorrebbe riprodurre un ampio intervallo di scale caratteristiche, da quelle cosmologiche, che vanno dalla decina al centinaio di Mpc, alle scale delle singole galassie, di una decina di kpc, fino alle scale inferiori al parsec. E' a queste ultime scale infatti che avvengono i fenomeni astrofisici, come esplosioni di supernove, jet da AGN (*Active Galactic Nuclei*), formazione stellare, che influenzano la dinamica delle galassie e quindi delle scale superiori. Visto il *range dinamico* estremamente grande, solitamente i fenomeni alle scale inferiori non vengono riprodotti direttamente; per essi si utilizzano dei modelli che riproducono opportunamente i risultati dei processi fisici *sotto-risoluzione*, così chiamati appunto perchè la risoluzione delle simulazioni non consente di raggiungere le scale del parsec. Questi processi astrofisici non risolti direttamente influenzano la componente barionica e le sue proprietà osservative, e questo crea delle difficoltà nel riprodurre correttamente l'evoluzione di tale componente.

Inoltre, l'evoluzione della componente barionica viene trattata mediante l'idrodinamica, cioè considerando il plasma barionico come un fluido, il che è possibile quando il cammino libero medio delle particelle è molto inferiore alle scale complessive del sistema. Questo, se da un lato semplifica la trattazione del problema, pone comunque dei problemi più difficili rispetto allo studio della componente non collisionale. La fluidodinamica dà luogo ad uno spettro più ampio e complesso di fenomeni fisici, e risulta più arduo in sé riprodurre correttamente questi fenomeni a livello numerico, anche senza la complicazione di dover considerare della fisica addizionale alle scale sotto-griglia. Avremo modo di esaminare alcuni di questi effetti nel seguito. Per tali motivi, un miglioramento nella descrizione dell'evoluzione della componente barionica dell'Universo è strettamente legato ai miglioramenti nei metodi di simulazione basati sull'idrodinamica.

I metodi numerici idrodinamici si dividono principalmente in due categorie, quelli Euleriani, che discretizzano il volume di simulazione, e quelli Lagrangiani, che discretizzano la massa, simulando cioè il fluido come un insieme di particelle. Nel corso degli anni, vari miglioramenti sono stati apportati ad entrambi gli schemi, ed esistono ad oggi diversi codici che li implementano. Noi ci concentreremo principalmente sui metodi Lagrangiani, e in particolare sull'SPH (acronimo di *Smoothed Particle Hydrodynamics*), che sarà introdotto nel Capitolo 2, assieme al codice a cui faremo riferimento nelle simulazioni, che è GADGET, un codice sviluppato da Volker Springel [54, 5] e liberamente disponibile in rete¹. Ciò che conta è che non esiste un metodo, ad oggi, che si distingua particolarmente rispetto agli altri: tutti quelli maggiormente utilizzati hanno i propri pregi e difetti. Ad esempio, uno schema Lagrangiano è intrinsecamente adattivo, nel senso che le zone ad elevata densità vengono riprodotte con un numero maggiore di particelle, e quindi con una maggiore risoluzione, mentre analogamente la risoluzione è minore nelle zone a bassa densità, in cui vi sono poche particelle. Nonostante questo, però, uno schema siffatto presenta difficoltà nel calcolo dei flussi delle quantità termodinamiche fra le "particelle" del sistema. Queste infatti non rappresentano le reali particelle di cui il sistema è composto, quanto le risultanti di

¹<http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/>

un “coarse-graining” del fluido che viene simulato, e quindi dovrebbero poter ammettere flussi di alcune quantità fisiche (come entropia, energia termica) fra di loro. Viceversa uno schema Euleriano incorpora in modo naturale tali flussi, ma non risulta automaticamente adattivo, e può essere reso tale solo utilizzando tecniche adattive (AMR, *Adaptive Mesh Refinement*) in cui la griglia viene raffinata nelle zone ad alta densità. Vedremo che, trascurando perfino le interazioni gravitazionali, i vari codici esistenti presentano ancora problemi aperti che coinvolgono il modo in cui essi riproducono fenomeni fisici di vitale importanza, come gli shock, i flussi di massa, energia, entropia, il modo in cui vengono trattati forti gradienti di densità o energia termica. Tutti questi fenomeni sono di straordinario interesse, poichè una loro modellizzazione numerica troppo approssimata può portare a risultati apparentemente contrastanti (vedremo degli esempi nel Capitolo 3), o a invalidare (cioè a rendere non fisici) i risultati di una simulazione.

La presente Tesi si inserisce proprio in questo punto, prendendo in esame lo schema idrodinamico Lagrangiano per eccellenza, ovvero l’SPH, e sottoponendolo ad un esame critico volto a determinare la sua capacità o incapacità di riprodurre fenomeni come quelli prima citati. Esso verrà quindi confrontato con una sua modifica (quella che nel seguito chiameremo GPH, da *Godunov-type Particle Hydrodynamics*), che incorpora nell’SPH un metodo, il Riemann solver, per calcolare i flussi delle varie quantità termodinamiche fra le coppie di particelle, e che sembra in parte mantenerne i pregi risolvendo alcuni dei suoi difetti principali.

1.2. Schema della tesi

La presente Tesi è organizzata come segue.

Nel Capitolo 2, dopo aver richiamato brevemente le basi principali della teoria cinetica e della fluidodinamica che ci serviranno nel seguito, faremo una breve rassegna dei metodi numerici ad N corpi impiegati nelle simulazioni di sistemi noncollisionali, per poi passare a descrivere gli approcci idrodinamici focalizzandoci in particolare su quelli Lagrangiani. Questi ultimi si contrappongono ai metodi Euleriani, come abbiamo già accennato pocanzi, e ne delinearemo le differenze essenziali prima di esporre il metodo idrodinamico Lagrangiano SPH, che sarà il principale oggetto di questa Tesi. Esamineremo le tre diverse formulazioni standard che si possono ottenere per questo metodo, assieme alle sue principali caratteristiche. Una di esse è ad esempio la viscosità artificiale, che è necessaria per catturare gli shock e riprodurre dei risultati fisicamente corretti, ma che si rivelerà fonte di problemi abbastanza sottili e complessi. Infine descriveremo le basi del codice di simulazione GADGET, che sarà quello usato nelle nostre simulazioni.

Nel Capitolo 3 passeremo in rassegna i principali problemi del metodo SPH. In primis l’assenza di mixing in entropia: le particelle nell’SPH non scambiano entropia fra di loro, e questo fa sì che alcune situazioni fisiche siano mal riprodotte. In seguito esamineremo un test [14] che confronta le capacità dei metodi Lagrangiani ed Euleriani più diffusi di riprodurre le instabilità idrodinamiche (che definiremo). Pur avendo anche i metodi Euleriani svariati problemi (come violazione dell’invarianza Galileiana, problemi di adattività), i metodi Lagrangiani, ovvero l’SPH per quanto ci riguarda, falliscono nel trattamento di queste instabilità, e il problema è strettamente legato ai termini di viscosità artificiale che sono presenti in esso, e all’assenza di mixing già citata. Per indagare una possibile soluzione a questi problemi, esporremo quindi una modifica dell’SPH

che va sotto il nome di GPH, da *Godunov-type Particle Hydrodynamics*, che incorpora il cosiddetto “metodo di Godunov”, ovvero un metodo per calcolare i flussi delle quantità termodinamiche fra le varie particelle, che definiremo. L’aspetto più importante di questa modifica è l’introduzione di un Riemann-Solver (vedi sezione 3.2.2), un algoritmo che permette di calcolare numericamente tali flussi, e che è quindi in grado di incorporare automaticamente un grado significativo di mixing, e di operare correttamente senza alcun bisogno di termini di viscosità artificiale. Dopo aver discusso l’implementazione di questo metodo nel codice di simulazione GADGET, passeremo ad accennare ad una possibile modifica dell’SPH stesso basata su un metodo introdotto originariamente da Inutsuka [8, 9], che permette di ricavare una nuova formulazione (la quarta qui presentata) anch’essa ipoteticamente in grado di risolvere molti dei problemi dell’SPH standard.

Il Capitolo 4 rappresenta il vero contributo originale di questa Tesi, ed espone i risultati di tre serie di simulazioni idrodinamiche eseguite con il codice GADGET-3 per tre diversi test: il test di Sod, il test di Sedov e il Blob test di Agertz *et al* [14]. Il contributo originale di questa parte deriva dall’aver implementato il GPH in GADGET e averlo confrontato con la versione standard di GADGET-SPH nei tre casi menzionati. Descriveremo per prima cosa le caratteristiche dei test, esponendo poi i risultati ottenuti ed analizzandoli criticamente. Tali risultati ci mostreranno quanto, se da un lato l’assenza di mixing nell’SPH è evidente e problematica, dall’altro lato è altrettanto evidente la sua presenza nel GPH. Tale mixing tuttavia, pur risolvendo svariati problemi (ad esempio esso cattura altrettanto bene gli shock, senza bisogno di viscosità artificiale), ne solleva a sua volta di ulteriori, ad esempio per quanto riguarda le instabilità idrodinamiche, che sembrano soppresse da una dose eccessiva di mixing nel GPH. L’ultimo test in particolare offrirà un’applicazione delle conclusioni tratte dai primi due ad un caso più complesso (e realistico).

Chiudono infine la Tesi una breve sezione contenente le Conclusioni principali di questo lavoro assieme alle possibili linee di sviluppo futuro, ed alcune Appendici, una con un riassunto delle equazioni principali dell’SPH e del GPH, ed un’altra con la derivazione dettagliata della formulazione con moltiplicatori Lagrangiani dell’SPH.

2. Rassegna dei principali metodi numerici

In questo Capitolo esporremo brevemente gli elementi di fluidodinamica che ci serviranno nel seguito, per poi passare ad una rassegna concisa dei principali metodi numerici per problemi a N corpi; ci concentreremo quindi sul metodo SPH, principale argomento di questa tesi. Infine diremo due parole sul codice GADGET, usato nelle simulazioni. Referenze generali per questa parte sono [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

2.1. Basi di Teoria Cinetica e Fluidodinamica

Se consideriamo un gas diluito di N molecole, sappiamo che la condizione per applicare la teoria cinetica classica con buona approssimazione è che (supponendo che la temperatura non sia eccessivamente bassa) la densità sia sufficientemente bassa affinché i pacchetti d'onda delle molecole siano localizzati su scale molto più piccole delle distanze intermolecolari, o, detto in altri termini, che la lunghezza d'onda media di DeBroglie delle molecole sia molto inferiore alla distanza fra le stesse [1]; ad esempio, il plasma ionizzato presente entro un ammasso di galassie (*mezzo intracluster*) ha una densità atomica dell'ordine di $n \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$, ed essendo composto perlopiù da atomi leggeri (per due terzi idrogeno), possiamo modellarlo come un gas diluito di particelle puntiformi classiche, trascurando perciò le statistiche quantistiche (i.e. principio di esclusione).

Le proprietà di un insieme di particelle classiche sono descritte dalla funzione di distribuzione di particella singola $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, definita nello spazio delle fasi del sistema in modo tale che

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p = \left(\begin{array}{l} \text{numero di molecole che al tempo } t \\ \text{giacciono in un elemento di volume } d^3r \\ \text{attorno a } \mathbf{r} \text{ e } d^3p \text{ attorno a } \mathbf{p} \end{array} \right).$$

Essa soddisfa l'equazione di Boltzmann [1, 18], che nel caso non relativistico risulta essere

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (2.1)$$

Il termine collisionale $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$ rappresenta la variazione della funzione di distribuzione in presenza di urti elastici fra le varie molecole. Non ci serve nel seguito specificarne la forma esplicita (può essere trovata ricavando la cosiddetta equazione del trasporto di Boltzmann). Ricordiamo solo che un'osservabile $\Omega(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ (come energia, impulso, numero di costituenti) che sia conservata durante le collisioni soddisfa la relazione

$$\int d^3v \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = 0. \quad (2.2)$$

Se siamo interessati al comportamento macroscopico del sistema, dobbiamo considerare una scala spaziale molto maggiore della separazione media fra i costituenti del sistema; nel caso del mezzo intracluster, se ci riferiamo a un ammasso di galassie (ordine tipico di 1 Mpc), il cammino libero medio delle particelle che lo compongono è molto minore delle scale “macroscopiche” a cui siamo interessati, e pertanto la condizione è soddisfatta. In tal caso il sistema può essere approssimato come continuo (cioè un fluido), e caratterizzato dal campo di densità

$$\rho(\mathbf{x}, t) \equiv mn(\mathbf{x}, t) \equiv m \int d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (2.3)$$

In quest'approssimazione, una generica osservabile macroscopica Ω per essere ben definita deve variare lentamente su distanze dell'ordine del cammino libero medio λ delle molecole del sistema, cioè in altre parole deve valere la seguente disuguaglianza:

$$|\nabla\Omega| \lambda \ll |\Omega|. \quad (2.4)$$

La descrizione idrodinamica si ottiene poi mediando le varie quantità osservabili sulle velocità dei costituenti, ottenendo così le varie quantità macroscopiche definite nello spazio delle configurazioni tramite la relazione

$$\langle \chi(\mathbf{x}, t) \rangle \equiv \frac{\int d^3v \chi f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\int d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)} = \frac{1}{n} \int d^3v \chi f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (2.5)$$

Nel caso in cui le forze esterne derivino da un potenziale scalare (gravitazionale, per quel che ci interessa) $\Phi(\mathbf{x}, t)$, moltiplicando l'equazione di Boltzmann per χ , integrando sulla velocità e usando il fatto che χ sia una quantità conservata nelle collisioni, troviamo:

$$\frac{\partial n \langle \chi \rangle}{\partial t} + \frac{\partial n \langle \chi \mathbf{v} \rangle}{\partial \mathbf{x}} + n \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left\langle \frac{d\chi}{d\mathbf{v}} \right\rangle = 0. \quad (2.6)$$

Dall'equazione precedente, usando la conservazione di massa, momento ed energia, possiamo ricavare le equazioni di base della fluidodinamica. Riportiamo qui di seguito i risultati, rimandando alla letteratura per una loro derivazione rigorosa [2, 3, 1].

Conservazione della Massa

Ponendo $\chi = m$, la massa media delle particelle, in eq. (2.6) otteniamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.7)$$

in cui ricordiamo che $\rho = nm$, e abbiamo definito la velocità media (macroscopica) come

$$\mathbf{u} \equiv \frac{\int d^3v f \mathbf{v}}{\int d^3v f}. \quad (2.8)$$

Quest'equazione è l'equazione di continuità del fluido, e (se posta in forma integrale) ci dice che la variazione di massa all'interno di un certo volume è bilanciata dal flusso di massa attraverso la superficie che delimita il volume stesso. Possiamo riscriverla nella notazione fluidodinamica standard:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.9)$$

dove $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ è la derivata convettiva¹ (o Lagrangiana) e rappresenta la variazione lungo una linea di flusso.

Conservazione del Momento

Ponendo $\chi = m\mathbf{v}$ in eq. (2.6) otteniamo:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle v_i v_j \rangle}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0, \quad (2.10)$$

che, definendo il tensore di pressione (o degli sforzi) $p_{ij} \equiv \rho (\langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle)$, può essere riscritta così:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + p_{ik}) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0. \quad (2.11)$$

Questa è l'equazione di Eulero, e rappresenta essenzialmente la seconda legge di Newton per un fluido avente tensore di pressione p_{ij} . Per tenere conto anche di possibile viscosità nel sistema, è utile scrivere la velocità come $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, dove \mathbf{w} è la velocità dovuta a scostamenti dalla media, e definire le quantità

$$P \equiv \frac{\rho}{3} \langle |\mathbf{w}|^2 \rangle; \quad \pi_{ik} \equiv \rho \left\langle \frac{|\mathbf{w}|^2}{3} \delta_{ik} - w_i w_k \right\rangle. \quad (2.12)$$

In tal modo, usando l'equazione di continuità (2.9), si trova:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho \nabla \Phi - \nabla P + \nabla \cdot \pi, \quad (2.13)$$

in cui $(\nabla \cdot \pi)_i \equiv \partial \pi_{ik} / \partial x_k$.

Per un fluido perfetto, caratterizzato dal fatto che la pressione è indipendente dalla direzione (caso isotropo), si ha $p_{ij} = P \delta_{ij}$ (che nel caso di un liquido altro non è che la ben nota legge di Pascal).

¹In letteratura si definisce derivata convettiva alternativamente o tutta la D/Dt oppure solo il secondo pezzo $\mathbf{u} \cdot \nabla$

Conservazione dell'Energia

Poniamo $\chi = \frac{1}{2}mv^2$ in eq. (2.6), e definiamo le quantità

$$\rho\epsilon \equiv \rho \left\langle \frac{w^2}{2} \right\rangle = \frac{3P}{2} \quad (\text{energia interna specifica}), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\rho}{2} \langle \mathbf{w}w^2 \rangle \quad (\text{flusso di conduzione del calore}). \quad (2.15)$$

Dall'equazione di conservazione (2.6) otteniamo allora la legge di conservazione dell'energia totale

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\epsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2}\rho u_k u^2 + u_i (P\delta_{ik} - \pi_{ik}) + \rho\epsilon u_k + F_k \right) = -\rho u_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad (2.16)$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{\partial \rho\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho\epsilon u_k}{\partial x_k} = -P \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_k} + \Psi, \quad (2.17)$$

dove Ψ è il tasso di dissipazione viscosa (*rate of viscous dissipation*) definito da

$$\Psi = \pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \pi_{ik} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.18)$$

(cfr. [1]) Usando l'eq. di continuità otteniamo la forma equivalente

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = P \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{F} + \Psi. \quad (2.19)$$

Quest'equazione esprime essenzialmente il primo principio della termodinamica. Infatti, se ci restringiamo a processi adiabatici per semplicità, per cui non c'è scambio di calore (il secondo e terzo termine del membro di destra sono nulli), nel primo principio, $dU = -PdV$, dobbiamo sostituire a U l'energia per unità di massa ϵ e a V il volume per unità di massa $1/\rho$, da cui $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$, e usando l'equazione di continuità (2.6) si ottiene esattamente (2.19).

Mettendo assieme i risultati ottenuti con i tre momenti dell'equazione di Boltzmann, abbiamo il set completo di equazioni di Navier-Stokes:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.20)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\rho \nabla \Phi - \nabla P + \nabla \cdot \pi \quad (2.21)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \epsilon = -P \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{F} + \Psi \quad (2.22)$$

in cui ricordiamo le definizioni

$$\rho = m \int d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \langle \mathbf{v} \rangle, \\
\epsilon &= \frac{3P}{2\rho} = \frac{1}{2} \langle w^2 \rangle, \\
\pi_{ik} &= \rho \left\langle \frac{w^2}{3} \delta_{ik} - w_i w_k \right\rangle, \\
F_k &= \frac{1}{2} \rho \langle w_k w^2 \rangle, \\
\Psi &= \pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Notiamo che finora abbiamo supposto che tutte le forze esterne derivino dal potenziale scalare Φ , cioè sostanzialmente siano gravitazionali, ma potremmo anche permettere forze di altro tipo (e.g. campi magnetici galattici) sostituendo il termine $\nabla\Phi$ con una generica forza \mathbf{f} .

Per chiudere il sistema di equazioni (2.20)-(2.22), abbiamo bisogno di un'equazione di stato che esprima la pressione in funzione della densità. Per un fluido politropico questa è

$$P = (\gamma - 1) \rho \epsilon, \quad (2.23)$$

dove γ è l'esponente adiabatico ($\gamma = 5/3$ per un gas perfetto monoatomico). In queste notazioni la velocità del suono (locale) di un'onda di pressione è

$$c^2 = \gamma P / \rho. \quad (2.24)$$

Va notato che nelle simulazioni cosmologiche di solito si ignora il tensore di viscosità (come vedremo è necessario introdurre un altro tipo di viscosità, detta “viscosità artificiale”, che è però di tipo diverso) e i termini di flusso termico, considerando il sistema simulato come un gas (o fluido) perfetto. Ciò è dovuto al fatto che nel mezzo intracluster, ad esempio, questi termini sono fortemente soppressi, e perciò l'errore commesso nel trascurarli non è rilevante, in genere. Inoltre si possono modellizzare effetti di riscaldamento o raffreddamento non idrodinamici aggiungendo all'equazione dell'energia (2.22) un termine, \mathcal{L} , che ne tenga conto. Si tratta essenzialmente di una funzione che serve a modellizzare fenomeni come raffreddamento radiativo, o *feedback* da AGN (*Active Galactic Nuclei*) o supernove.

Le equazioni nella forma convenzionalmente usata sono perciò:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.25)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \Phi - \frac{\nabla P}{\rho} \quad (2.26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \epsilon = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathcal{L}(\epsilon, \rho)}{\rho}. \quad (2.27)$$

2.2. Discontinuità e shock

L'idrodinamica ha come caratteristica peculiare il fatto di ammettere soluzioni discontinue, tali cioè che su certe superfici (chiamate superfici di discontinuità) tutte le quantità fisiche sono discontinue. Queste discontinuità possono essere di due tipi (vedi più avanti): “tangenziali”, oppure onde d’urto (shock). Il primo tipo si ha ad esempio quando due fluidi diversi giacciono uno accanto all’altro, senza flusso di materia attraverso la superficie di separazione; si tratta però di un fenomeno in genere molto instabile, quindi di breve durata. Nel secondo tipo, invece, è presente un flusso di materia (nonchè di impulso ed energia) attraverso la superficie; queste discontinuità si formano in modo del tutto naturale quando sono presenti perturbazioni di ampiezza finita. Infatti, finchè le perturbazioni di un sistema fluido sono molto piccole (infinitesime), esse danno origine ad onde sonore [3, 2]; ma quando la loro ampiezza non è infinitesima, considerando ad esempio il caso di un’onda di densità semplice in un mezzo omogeneo, si sviluppa una differenza di velocità non trascurabile fra gli elementi di fluido nella cresta dell’onda e quelli nella pancia: in particolare la velocità di propagazione cresce al crescere della densità, e perciò la cresta raggiungerà la valle in un tempo finito formando una superficie di discontinuità.

Gli shock sono molto importanti in astrofisica, in quanto, oltre ad essere molto frequenti, permettono di studiare le proprietà termodinamiche del mezzo coinvolto.

Per il momento vediamo in breve le principali proprietà delle discontinuità *matematiche*, dopodichè diremo due parole sulla loro interpretazione *fisica*.

Superfici di discontinuità - condizioni di Rankine-Hugoniot

Poniamoci nel sistema di riferimento istantaneamente a riposo rispetto alla superficie di discontinuità, per un sistema stazionario. Se consideriamo per semplicità il caso in cui tutte le quantità dipendono solo dalla coordinata x perpendicolare alla superficie (simmetria planare), e indichiamo con J un generico flusso, dalle equazioni fluidodinamiche abbiamo che:

$$\frac{dJ}{dx} = 0 = \int_{-\eta}^{+\eta} dx \frac{dJ}{dx} = J_2 - J_1,$$

in cui l’integrale è esteso ad un intervallo infinitesimo di lunghezza 2η comprendente la superficie. Pertanto possiamo avere discontinuità, a patto che i flussi siano continui (è solo l’equazione di continuità detta con parole diverse). Introducendo la notazione $[J] \equiv J_2 - J_1$, troviamo, più esplicitamente, dalla continuità del flusso di massa:

$$[\rho u_x] = 0, \tag{2.28}$$

di energia:

$$\left[\rho u_x \left(\epsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right] = 0, \tag{2.29}$$

di impulso:

$$[P + \rho u_x^2] = 0 \tag{2.30}$$

per la componente perpendicolare, e:

$$[\rho u_x u_y] = 0, \quad [\rho u_x u_z] = 0 \quad (2.31)$$

per le componenti parallele.

Da queste equazioni possiamo subito leggere ciò che avevamo già anticipato, e cioè che ci sono due tipi di discontinuità. Nella prima il flusso di massa è nullo: $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = 0$, ed essendo ρ_1 e ρ_2 non nulli ne segue $u_1 = u_2 = 0$; le condizioni (2.29) e (2.31) sono automaticamente soddisfatte, e usando la (2.30) troviamo

$$u_{1x} = u_{2x} = 0, \quad [P] = 0 \quad (2.32)$$

mentre u_y , u_z , ρ e qualunque quantità termodinamica tranne P possono essere discontinue. Una sottoclasse di queste discontinuità tangenziali è data dalle discontinuità di contatto, in cui le velocità sono continue ma la densità no.

Per le altre discontinuità, le onde d'urto, si ha flusso di massa diverso da zero, dunque u_{1x} , u_{2x} sono non nulle e, dalla (2.31), le velocità tangenziali sono continue; le eq. (2.28)-(2.31) pertanto divengono

$$[\rho u_x] = 0, \quad (2.33)$$

$$\left[\epsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{u_x^2}{2} \right] = 0, \quad (2.34)$$

$$[P + \rho u_x^2] = 0. \quad (2.35)$$

Queste sono le condizioni idrodinamiche che devono essere soddisfatte in presenza dello shock; esse sono chiamate condizioni di Rankine-Hugoniot (RH).

Onde d'urto: proprietà & interpretazione fisica

Usiamo l'indice 1 per le quantità prima dello shock (il verso è dato dalla velocità di propagazione di quest'ultimo) e 2 per quelle subito dopo. Nel sistema di riposo dello shock, esso si vede venire incontro il fluido con velocità u_1 ; definiamo il numero di Mach dello shock come il rapporto $M_1 \equiv u_1/c_1$, dove c_1 è la velocità del suono prima dello shock. Si trova [3] che valgono le seguenti identità:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{(\gamma - 1) M_1^2 + 2}, \quad (2.36)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad (2.37)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)((\gamma - 1) M_1^2 + 2)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}; \quad (2.38)$$

e il numero di Mach dopo lo shock è

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}. \quad (2.39)$$

Al contrario delle discontinuità tangenziali, gli shock piani sono essenzialmente stabili. Oltre a questo, in corrispondenza dello shock si ha produzione di entropia:

$$s_2 > s_1$$

Dalle equazioni precedenti vediamo che uno shock, per quanto forte, mentre comprime il gas in maniera modesta (il fattore di compressione dipende da γ), può riscaldarlo moltissimo, dato che $T_2/T_1 \propto M_1^2$; perciò lo shock converte l'energia cinetica in energia interna, e infatti la velocità delle particelle dopo lo shock è inferiore a prima. Questo è il motivo peraltro per cui uno shock è *sempre supersonico* ($M_1 > 1$): se fosse $M_1 < 1$ troveremmo $u_1 < u_2$ e $T_1 > T_2$, cioè trasformeremmo parte dell'energia interna del fluido in energia cinetica senza altri effetti, e ciò contraddirebbe il II Principio della Termodinamica. E' anche facile vedere che si ha sempre $\rho_1 < \rho_2$, $u_1 > u_2$, $P_1 < P_2$, $T_1 < T_2$, e $M_2 < 1$.

Dato che le onde d'urto trasformano l'energia cinetica in energia termica con forte produzione di entropia, e che il meccanismo per fare questo è dato dalle collisioni molecolari, lo shock fisicamente avrà uno spessore non nullo e dell'ordine del libero cammino medio di una particella (deve essere spesso abbastanza da permettere a ciascuna molecola di subire un numero sufficiente di collisioni). Questi tipi di shock vengono detti *collisionali*. Quando non intervengono tanto le collisioni dirette, quanto ad esempio interazioni con campi elettromagnetici (disordinati), come in ambiente astrofisico in cui la materia è per buona parte ionizzata e le collisioni dirette sono rare per via della bassa densità del mezzo intracluster, lo shock invece è detto *non collisionale*: in questo caso lo spessore dello shock diventa comparabile con il raggio di Larmor del protone, perchè è su questa distanza che il protone viene deflesso da un campo magnetico tipico (considerando il cammino libero medio solamente troveremmo uno spessore macroscopico inaccettabile per lo shock). L'esempio più noto di shock non collisionale è quello che avviene fra il vento solare e la magnetosfera terrestre.

2.3. Metodi numerici per sistemi non collisionali a N corpi

I metodi numerici usati in astrofisica e in cosmologia possono essere di vari tipi (vedi [4]). In questa sezione presentiamo una breve rassegna dei principali metodi a N corpi, per poi passare agli approcci fluidodinamici veri e propri nelle prossime. Questo sarà utile per chiarire meglio il funzionamento del codice GADGET, di cui parleremo nell'ultima sezione, che è stato usato per le simulazioni e incorpora diversi di questi metodi. Anche se poi ci limiteremo alla parte fluidodinamica, trascurando la cosmologia, nel descrivere questi metodi teniamo sinteticamente conto anche di quest'ultima.

Un fluido non collisionale di particelle non-relativistiche (come la dark matter) di massa m , variabili (posizione e momento) dinamiche² \mathbf{x} , \mathbf{p} può essere descritto mediante una funzione di distribuzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ che segua l'equazione non-collisionale di Boltzmann-Vlasov:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f - m (\nabla \Phi) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (2.40)$$

²In ambiente cosmologico queste vengono sostituite da variabili *comoventi*, ma noi non ci addenteremo in questo contesto.

accoppiata all'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G [\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)], \quad (2.41)$$

dove Φ è il potenziale gravitazionale e $\bar{\rho}(t)$ la background density, mentre $\rho(\mathbf{x}, t)$ è la densità ricavata dalla f .

Il modo più diretto per risolvere questo set di equazioni è di campionare lo spazio delle fasi mediante un numero finito N di particelle traccianti (problema ad N corpi), e cercare di risolvere le equazioni del moto delle particelle, che in questo caso sono date da:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m\nabla\Phi \quad e \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}. \quad (2.42)$$

Due sono i principali approcci in questa direzione: risolvere direttamente le traiettorie delle particelle traccianti, o risolvere l'equazione di Poisson. Vediamone in breve qualche implementazione diretta.

2.3.1. Somma diretta (metodo *Particle-Particle*)

Questo è certo il metodo più diretto (detto anche metodo PP, Particle-Particle), quello cioè di sommare i contributi delle singole particelle al potenziale gravitazionale:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \sum_j \frac{m_j}{(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.43)$$

In tale equazione, il parametro ϵ è il “softening” gravitazionale; esso è stato introdotto perchè, in assenza di tale parametro, l'interazione fra due particelle che si trovino sufficientemente vicine diviene molto forte, e questo può causare *scattering*, ovvero una forma di diffusione che non dovrebbe essere presente se ad esempio si considerano delle particelle di materia oscura. Come conseguenza di questa correzione, inoltre, il parametro di “softening” riduce il rilassamento spurio del sistema che avviene quando il numero di particelle nella simulazione non è abbastanza grande per riprodurre bene il fluido, cosa che è in un certo senso inevitabile dato che il numero di particelle di dark matter simulate è ordini di grandezza inferiore a quello di un sistema reale.

La somma diretta è la tecnica più accurata e precisa, tuttavia richiede un tempo di calcolo che va come N^2 , dove N è il numero di particelle, e perciò diviene poco gestibile per simulazioni di grandi dimensioni. Un modo con cui quest'ultimo problema può essere risolto, è dato da alcuni hardware sviluppati per calcolare termini di tipo $1/r$; in questo modo il calcolo viene svolto a livello di *hardware*, non di software, ed è molto più veloce. Esempi possono essere il cosiddetto “GRAPE” (*GRAvity PipE*), un hardware appositamente disegnato per questo tipo di conti [23] che riduce considerevolmente il tempo di calcolo, oppure la GPU (*Graphic Processing Unit*), inizialmente introdotta per accelerare l’“image processing” sulle moderne schede grafiche.

2.3.2. Metodi PM (Particle-Mesh)

Questo metodo discretizza il campo di forze calcolandolo su un reticolo, usando un approccio di campo medio. In pratica si costruisce un reticolo (*mesh*) e si assegna ad ogni suo punto un valore

di densità e potenziale gravitazionale, dopodichè si calcolano i corrispondenti valori alle posizioni delle particelle per interpolazione. Tipicamente, l’algoritmo PM si divide nei seguenti passaggi.

Prima di tutto, si assegnano le densità ρ_m per ogni cella della griglia \mathbf{x}_m : se questa possiede M punti, su un volume (cubico) unitario, e le particelle hanno masse m_i e sono distribuite sulle posizioni \mathbf{x}_i , l’assegnazione avviene facendo uno “smoothing” delle particelle su n celle:

$$\rho_m = \frac{M}{n} \sum_i m_i W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m) \quad (2.44)$$

dove W è una funzione interpolante (kernel), normalizzata in modo da preservare la massa totale, la cui forma particolare determina i diversi schemi PM possibili.

Secondariamente, si trasforma il potenziale gravitazionale nello spazio di Fourier mediante una Fast Fourier Transform³ (FFT), e si risolve l’equazione di Poisson usando la funzione di Green relativa al Laplaciano, che in questo caso ha la forma $g(\mathbf{x}) = -G/|\mathbf{x}|$; una convoluzione in spazio reale diventa una semplice moltiplicazione in spazio di Fourier, e perciò si trova:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \rightarrow \hat{\Phi}(\mathbf{k}) = \hat{g}(\mathbf{k}) \hat{\rho}(\mathbf{k}), \quad (2.45)$$

e $\hat{g}(\mathbf{k})$ dev’essere calcolata una sola volta all’inizio della simulazione. Il vantaggio di questo metodo è che la FFT richiede poco tempo di calcolo.

Fatto questo si calcola la forza in ciascun punto della griglia nello spazio di Fourier, $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) = -i\mathbf{k}\hat{\Phi}(\mathbf{k})$, e si antitrasforma per trovare $\mathbf{F}(\mathbf{x}_m)$ in spazio reale. Dopodichè si calcola la forza per ogni particella con lo stesso schema di interpolazione usato per la densità:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) = \sum_m W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m) \mathbf{F}(\mathbf{x}_m). \quad (2.46)$$

Avendo ora le forze agenti sulle singole particelle, si è in grado di far evolvere il sistema di uno step temporale, e ripetere l’operazione.

Il vantaggio principale di un metodo PM è la rapidità, dato che il numero di operazioni necessarie è dell’ordine di $N + M \log M$ (N è il numero di particelle e M quello dei punti del reticolo); lo svantaggio è invece che la risoluzione è determinata da M , che in genere è limitato dalla memoria disponibile, dato che non è possibile risolvere strutture con dimensioni inferiori a quella delle celle della griglia. Questo problema può essere aggirato usando tecniche adattive (e.g. l’AMR, *Adaptive Mesh Refinement*), che permettono alla spaziatura della griglia utilizzata di variare adattandosi alla densità delle varie zone.

2.3.3. Algoritmi ad albero (Tree Algorithms)

Il problema ad N corpi (N-body) può essere risolto usando il metodo dell’espansione gerarchica di multipolo, incorporata nei cosiddetti algoritmi ad albero. Questo metodo raggruppa le particelle distanti in celle più grandi, trattando il loro contributo gravitazionale come una singola

³Una Fast Fourier Transform è un’implementazione numerica della trasformata di Fourier, ottimizzata in modo da richiedere un basso tempo di calcolo (questo è il motivo dell’aggettivo “Fast”).

componente. Questo fa sì che non si debbano valutare tutte le coppie di forze fra le particelle (che richiede un ordine di N operazioni *per particella*), dal momento che i gruppi di particelle lontane sono trattati come “macroparticelle” e perciò sono richieste al codice meno operazioni da eseguire. Si può dimostrare che questo metodo riduce la complessità computazionale a $N \log(N)$.

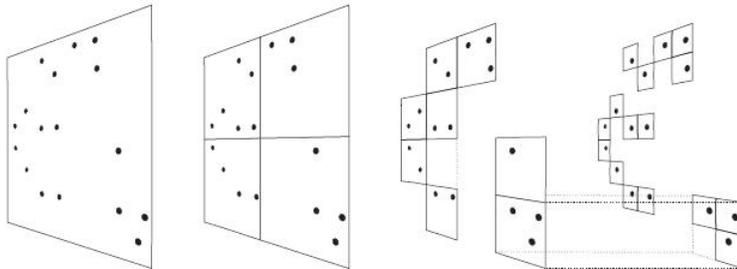


Figura 2.1.: Illustrazione schematica della procedura utilizzata da un algoritmo ad albero (qui un oct-tree, vedi [24]) in 2D. Il quadrato che contiene le particelle è suddiviso in sottoquadrati e il tutto è iterato fino ad avere esattamente una particella per ogni celletta (tratto da [4]).

In pratica il metodo si basa su una suddivisione ricorsiva dello spazio (vedi Fig. 2.1). Il cubo che contiene le particelle (“root node”, nodo radice) è suddiviso in quattro sotto-cubi (rami, o nodi), e la procedura viene iterata finché non si arriva ad avere una sola particella per ogni cella (foglie). A questo punto, partendo dal nodo radice, si decide ricorsivamente se la “multipole expansion” del nodo in cui ci si trova fornisce un’ approssimazione accurata della forza gravitazionale: se la risposta è negativa, si passa al nodo successivo e si ripete l’operazione. Di norma l’espansione è appropriata per nodi che siano sufficientemente piccoli e distanti, e si fissa inizialmente un angolo di riferimento (un valore tipico è di mezzo grado) tale che l’arco sotteso dallo stesso sia la soglia per decidere se un gruppo di particelle è sufficientemente “piccolo” e lontano da poter essere trattato come un unico oggetto.

2.3.4. Metodi ibridi (TreePM/ P^3M)

Consistono in una combinazione dei metodi precedenti. I principali sono il TreePM, che unisce il metodo PM a un algoritmo ad albero, e il metodo P^3M (Particle-Particle Particle-Mesh) che unisce i metodi PP & PM.

Nei metodi TreePM, il potenziale viene diviso in spazio di Fourier in una componente *short-range* e una *long-range*, $\hat{\Phi}(\mathbf{k}) = \hat{\Phi}_{long}(\mathbf{k}) + \hat{\Phi}_{short}(\mathbf{k})$, dopodiché la componente a corto raggio può essere calcolata usando un algoritmo ad albero (a parte eventuali cut-off introdotti), mentre la componente a lungo raggio può essere calcolata usando metodi PM. I metodi P^3M possono essere visti come un caso particolare dei TreePM, in cui le forze calcolate dall’algoritmo ad albero sono rimpiazzate dalle somme dirette.

2.4. Metodi Euleriani e Lagrangiani per la fluidodinamica

Esistono due classi di metodi per trattare le equazioni fluidodinamiche: i metodi Euleriani e i metodi Lagrangiani. Nel primo caso si considerano dei volumi di fluido fissi nello spazio, di cui si studia la variazione nello spazio e nel tempo; nel secondo caso invece si considerano degli elementi di fluido studiandone la variazione lungo le loro traiettorie. La differenza può essere intuita considerando ad esempio l'equazione di continuità (2.9): in essa la derivata Lagrangiana D/Dt si può vedere proprio come la variazione lungo una traiettoria dell'elemento di fluido considerato, mentre la scrittura $\partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ si può interpretare proprio come una variazione "intrinseca" per un elemento fisso spazialmente più un contributo (dal gradiente) che descrive la variazione dell'ambiente circostante.

Dal punto di vista numerico la differenza principale fra i due approcci consiste nel fatto che, mentre l'approccio Euleriano discretizza lo spazio, introducendo ad esempio una griglia fissa sui cui punti vengono assegnati i valori delle quantità che descrivono l'evoluzione del fluido, un approccio Lagrangiano discretizza la massa, mediante un "coarse-graining" che risulta equivalente a simulare il fluido mediante un insieme finito di particelle.

Entrambi gli approcci hanno i propri vantaggi e svantaggi. Dei vantaggi/svantaggi dei metodi Lagrangiani avremo modo di parlare in dettaglio. Per quanto riguarda gli Euleriani, diciamo che il principale vantaggio è che essi sono naturalmente portati a trattare correttamente gli shock senza bisogno di termini artificiali correttivi; per contro il fatto di assegnare le quantità da studiare su una griglia fissa fa sì che anche la risoluzione sia fissata dal passo reticolare, e possa perciò risultare bassa nelle zone ad alta densità. Ad ogni modo esistono dei metodi Euleriani adattivi che in parte aggirano questo problema, anche se al costo di ulteriori complicazioni di natura numerica.

Vediamo *molto* brevemente come si configura un metodo numerico Euleriano.

Schema dei metodi Euleriani

Come abbiamo detto la caratteristica principale di questi metodi è quella di associare le grandezze fisiche (e.g. velocità, pressione, energia interna) a variabili di campo che vengono discretizzate su un reticolo spaziale fisso, o al limite con spaziatura variabile se vogliamo una griglia adattiva. Per una generica variabile (campo) scalare $\varphi(x, t)$ allora l'evoluzione sarà calcolata secondo i seguenti punti:

- Si espande il campo a un istante successivo:

$$\varphi(x, t + dt) = \varphi(x, t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt^2 + \mathcal{O}(dt^3).$$

- Si inserisce l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{F}$$

(dove \mathbf{F} è il flusso) nella precedente, in modo da eliminare le derivate temporali.

- Si discretizza l'equazione precedente e la si risolve su una griglia.

Come vedremo nel Capitolo 3 i metodi Euleriani incorporano in maniera naturale i flussi delle varie quantità simulate (attraverso gli elementi di volume di riferimento), in particolare i flussi di entropia che invece sono un problema noto dei metodi Lagrangiani.

2.5. Il metodo SPH

I metodi Lagrangiani standard usati in cosmologia numerica sono tutti varianti dell'SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*), che ora andiamo a descrivere [6, 7].

2.5.1. Basi del metodo

Come abbiamo visto le equazioni fluidodinamiche hanno la forma generale

$$\frac{DA}{Dt} = f(A, \nabla A, \mathbf{r}), \quad (2.47)$$

in cui ricordiamo che

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

è la solita derivata Lagrangiana (le cui “caratteristiche” sono le traiettorie delle particelle). Il cuore dell'SPH sta nell'interpolazione di una generica quantità fluidodinamica A , come densità, pressione o energia, mediante un “kernel integrale” (smoothing kernel) W da cui si ottengono delle nuove quantità mediate

$$\langle A \rangle_h(\mathbf{r}) = \int A(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d^3r', \quad (2.48)$$

in cui la “smoothing length” h determina la larghezza tipica di smoothing del kernel. Essa rappresenta essenzialmente la “risoluzione” che si utilizza, dal momento che tutte le scale inferiori vengono mediate. Ovviamente le quantità originarie devono essere recuperate nel limite di una regione di smoothing infinitamente piccola, il che significa che si deve avere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle A \rangle_h(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}), \quad (2.49)$$

che assieme alla condizione di normalizzazione

$$\int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d^3r' = 1, \quad (2.50)$$

ci dice che il kernel tende a una delta di Dirac per $h \rightarrow 0$, ovvero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.51)$$

Inoltre, solitamente il kernel è una funzione pari della posizione:

$$W(\mathbf{x}, h) = W(-\mathbf{x}, h) \quad (2.52)$$

(questa proprietà consente di conservare in maniera naturale il momento angolare totale, vedi paragrafo 2.5.3).

Per poter applicare l'interpolazione ad un algoritmo numerico, discretizziamo il fluido dividendolo in un set di piccoli elementi⁴, in cui ogni elemento i abbia massa m_i , densità ρ_i e posizione \mathbf{r}_i . Il valore di A per l'elemento i verrà indicato con A_i . Allora, scrivendo l'interpolazione integrale come

$$\int \frac{A(\mathbf{r}')}{\rho(\mathbf{r}')} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \rho(\mathbf{r}') d^3r', \quad (2.53)$$

essa può essere discretizzata rimpiazzando l'elemento di massa $\rho(\mathbf{r}') d^3r'$ con m_j e l'integrale con una somma su j , in tal modo ottenendo

$$A_s(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (2.54)$$

La somma nell'equazione precedente *formalmente* è estesa a tutte le particelle. Tuttavia tale prescrizione sarebbe inutile, oltre che inefficiente, in una simulazione numerica, in primis perchè le interazioni fra le particelle decadono con la distanza e di conseguenza il kernel deve tendere a zero all'infinito, il che significa che i contributi delle particelle lontane diventano sempre più trascurabili (normalmente i contributi più importanti provengono dalla regione compresa entro un raggio di $2h$), e secondariamente perchè una simile somma sarebbe computazionalmente ingestibile: per questo motivo i kernel che si usano nelle simulazioni attuali sono a supporto compatto, perciò identicamente nulli fuori da un certo raggio, e quindi la somma si riduce automaticamente ad una somma sui primi vicini (avremo modo di parlare più estensivamente della scelta del kernel nel seguito).

La formula precedente dà per la densità (omettiamo il pedice s per brevità):

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_j m_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (2.55)$$

Se h è costante, integrando questa equazione si ritrova la conservazione esatta della massa, cioè

$$\sum_j m_j = M_{tot} = \int \rho(\mathbf{r}) d^3r; \quad (2.56)$$

se invece h non è costante, l'integrale non è più esattamente M_{tot} . Se infatti *sommiamo* tutte le densità calcolate nell'SPH con h variabile, per ogni particella, il risultato non è più esattamente la massa totale diviso il volume totale. Tuttavia ciò *non* significa che non vi sia più conservazione della massa: la massa totale è comunque conservata poichè le masse associate alle particelle sono fissate.

Il prossimo passo per tradurre le equazioni fluidodinamiche nell'SPH è di far evolvere le quantità mediate, e trovare le corrispondenti equazioni approssimate. Questo è un punto importante: l'approccio standard è di far evolvere le quantità mediate, mentre la cosa più corretta da fare sarebbe

⁴Tali "elementi" sono di solito chiamati particelle, anche se non rappresentano in realtà le particelle effettive di cui il fluido è composto, quanto piuttosto una loro realizzazione MonteCarlo

di mediare *le equazioni del moto*, e da lì ricavare l'evoluzione delle quantità mediate: questo è l'approccio di Inutsuka di cui parleremo nel capitolo 3, e che fornisce delle equazioni SPH leggermente diverse da quelle qui presentate. Per ora tuttavia ci limitiamo ad illustrare l'approccio standard.

Per far questo abbiamo bisogno delle derivate (spaziali) delle quantità interpolate. In generale esse saranno date da

$$\begin{aligned}\langle \nabla A(\mathbf{r}) \rangle &\equiv \int d^3r' W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \nabla' A(\mathbf{r}') \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{termine di} \\ \text{superficie} \end{array} \right) - \int d^3r' A(\mathbf{r}') \nabla' W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \\ &= \int d^3r' A(\mathbf{r}') \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h),\end{aligned}$$

in cui supponiamo che $fW \rightarrow 0$ sul contorno dell'integrale in modo da azzerare il termine di superficie, e abbiamo usato la simmetria del kernel per cambiare il gradiente ($\nabla' \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}$). Discretizzando otteniamo

$$\nabla A_s(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (2.57)$$

Questa forma del gradiente, tuttavia, ha il difetto di non annullarsi quando A è costante. Per supplire a questo inconveniente si può usare la seguente identità:

$$\nabla A = \frac{1}{\Phi} [\nabla(\Phi A) - A \nabla \Phi], \quad (2.58)$$

da cui si trova

$$(\nabla A)_i = \frac{1}{\Phi_i} \sum_j m_j \frac{\Phi_j}{\rho_j} (A_j - A_i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad (2.59)$$

dove $W_{ij} \equiv W(\mathbf{r}_{ij}, h) \equiv W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$. Diverse scelte di Φ corrispondono alle diverse versioni presenti in letteratura, le due principali sono $\Phi = 1$ e $\Phi = \rho$. Per l'equazione di continuità (2.9), ad esempio, queste due scelte danno rispettivamente

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (2.60)$$

e

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (2.61)$$

dove $\mathbf{v}_{ij} \equiv \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$, $\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i}$, e sia qui che nel seguito scriviamo per comodità la derivata Lagrangiana come d/dt .

2.5.2. Equazioni dell'SPH

Procedendo come sopra, una discretizzazione semplice dell'equazione di Eulero (2.26) dà⁵

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij} \quad (2.62)$$

⁵Qui e nel seguito cambiamo leggermente notazione, ponendo $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ e $\epsilon = u$

Purtroppo questa forma non conserva il momento. Per vederlo, consideriamo la forza che la particella j esercita sulla particella i ,

$$\mathbf{F}_{ji} = \left(m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_j = -\frac{m_i m_j}{\rho_i \rho_j} P_j \nabla_i W_{ij} \quad (2.63)$$

e analogamente quella che la particella i esercita sulla j , cioè

$$\mathbf{F}_{ij} = \left(m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} \right)_i = -\frac{m_j m_i}{\rho_j \rho_i} P_i \nabla_j W_{ji} = \frac{m_i m_j}{\rho_i \rho_j} P_i \nabla_i W_{ij}, \quad (2.64)$$

in cui si è usato il fatto che $\nabla_i W_{ij} = -\nabla_j W_{ji}$. Dato che in generale $P_i \neq P_j$, si ha che $\mathbf{F}_{ji} \neq -\mathbf{F}_{ij}$, cioè la terza legge di Newton è violata e il momento non è conservato. Per ovviare a questa difficoltà, usiamo l'identità

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + P \frac{\nabla \rho}{\rho^2} \quad (2.65)$$

nell'equazione di Eulero e poi discretizziamo usando l'eq. (2.57), trovando

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \nabla_i W_{ij} - \sum_j \frac{m_j P_j}{\rho_j \rho_j} \nabla_i W_{ij} = -\sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij}. \quad (2.66)$$

Essendo ora i termini di pressione perfettamente simmetrici in $i \leftrightarrow j$, troviamo $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ e la conservazione del momento è rispettata⁶.

Dall'equazione dell'energia (2.27) ricaviamo allo stesso modo

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{d}{dt} \left(\sum_j m_j W_{ij} \right) = \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (2.67)$$

Anche qui si possono derivare equazioni alternative, ad esempio usando la relazione

$$-\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot \left(\frac{P\mathbf{v}}{\rho} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right), \quad (2.68)$$

che ci dà

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j \frac{P_j}{\rho_j^2} m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (2.69)$$

da cui prendendo la media aritmetica con l'eq. (2.67) si trova una forma analoga a quella della velocità. Oppure si può usare l'energia "totale" (per unità di massa) $\varepsilon_i = u_i + \frac{1}{2}v_i^2$. Corrispondentemente si avrà

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (P\mathbf{v}) = -\frac{P}{\rho^2} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right), \quad (2.70)$$

⁶Nei conti precedenti abbiamo mantenuto h costante.

da cui

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = -\frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j \mathbf{v}_j \cdot \nabla_i W_{ij} - \mathbf{v}_i \cdot \sum_j \frac{m_j P_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij} = -\sum_j m_j \left(\frac{P_i \mathbf{v}_j}{\rho_i^2} + \frac{P_j \mathbf{v}_i}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (2.71)$$

Le equazioni di fatto implementate contengono un ulteriore termine Π_{ij} , aggiunto a mano al membro di destra, detto di “viscosità artificiale” (AV, *artificial viscosity*), la cui forma e funzione esamineremo in seguito (assieme al motivo per cui viene introdotto, che vedremo coinvolge uno dei problemi più profondi dell’SPH). Nei conti che abbiamo fatto finora abbiamo sempre supposto h costante. Come vedremo, il caso h variabile non comporta grosse modifiche.

Ricapitolando, il set di equazioni per l’SPH che si trova è il seguente:

$$\rho_i = \sum_j m_j W(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (2.72)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (2.73)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (2.74)$$

Il sistema è naturalmente chiuso da un’equazione di stato, come l’eq. (2.23) (non considereremo casi più generali). Questa è la “versione 1” dell’SPH, nel seguito denotata semplicemente SPH-1. Notiamo che per ottenere le eq. (2.73) e (2.74) abbiamo usato una media aritmetica; usando una media geometrica possiamo trovare un’altra versione equivalente (“versione 2”, o SPH-2) delle stesse:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -2 \sum_j m_j \left(\frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (2.75)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m_j \left(\frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (2.76)$$

2.5.3. Conservazioni

La formulazione appena vista (eq. (2.72) - (2.74)) incorpora automaticamente le conservazioni delle quantità fisiche principali, ovvero impulso, momento angolare ed energia totali. Per quanto riguarda l’impulso, abbiamo già visto che prese due particelle i e j , si ha $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$; da questo discende facilmente che

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ji} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji} + \sum_{j,i} \mathbf{F}_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij}) = 0. \quad (2.77)$$

Analogamente è la prova per il momento angolare. Abbiamo

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \left(m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right) = \mathbf{r}_i \times \sum_j \mathbf{F}_{ji} \quad (2.78)$$

da cui

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{M}_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji} = 0, \quad (2.79)$$

che dà zero dato che la forza fra due particelle agisce lungo la congiungente.

Infine, per l'energia totale si ha

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_i \left(m_i u_i + \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum_i m_i \left[\frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} - \mathbf{v}_i \cdot \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} \right] = \\ &= - \underbrace{\sum_{i,j} m_i m_j \left(\frac{P_i \mathbf{v}_j}{\rho_i^2} + \frac{P_j \mathbf{v}_i}{\rho_j^2} \right)}_{(simmetrico)} \cdot \underbrace{\nabla_i W_{ij}}_{(antisimmetrico)} = 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

2.5.4. Scelta del kernel

Abbiamo visto che il kernel integrale usato nell'SPH soddisfa le proprietà (2.50)-(2.52). Prima di passare brevemente in rassegna le forme funzionali principali per il W , possiamo esaminarne qualche altra proprietà generale.

Innanzitutto, richiediamo che esso sia a supporto compatto (cioè non nullo solo entro un dominio chiuso e limitato). Questo perchè, specie in simulazioni che coinvolgano un elevato *range dinamico*, una somma che si estenda su tutte le particelle diventa numericamente intrattabile (cioè il codice dà degli errori, e la simulazione si blocca), aggiungendo in termini di complessità computazionale un fattore N^2 , dove N è il numero di particelle, che renderebbe il metodo del tutto inefficiente; naturalmente esistono kernel a supporto non compatto (e.g. gaussiani): quello che si fa in questi casi è di azzerarli oltre un certo raggio, tipicamente scelto in modo tale che il peso delle code che vengono trascurate non sia rilevante.

Secondariamente, dal fatto che i gradienti delle quantità idrodinamiche sono calcolati come gradienti del kernel segue che W dev'essere differenziabile (almeno) tante volte quante lo sono i vari termini presenti nelle equazioni: ad esempio, ∇W deve esistere per un fluido con una pressione non nulla, e $\nabla^2 W$ deve esistere se vogliamo introdurre termini diffusivi, di conduzione del calore o simili. In generale si richiede che il kernel sia (almeno) \mathcal{C}^2 . Oltre a questo, si può dimostrare che la condizione che le quantità *discretizzate* tendano alle quantità originarie nel limite continuo

$$A_s(\mathbf{r}) \rightarrow A(\mathbf{r})$$

è rispettata se il kernel ha la forma seguente (in 3D):

$$W(\mathbf{r}, h) = \frac{1}{h^3} K\left(\frac{\mathbf{r}}{h}\right), \quad (2.81)$$

dove K è una funzione misurabile (Boreliana) che soddisfa le seguenti proprietà:

$$\int K(\mathbf{u}) d^3u = 1 \quad e \quad \int |K(\mathbf{u}) \mathbf{u}| d^3u < \infty, \quad (2.82)$$

$$|\mathbf{u}^2 K(\mathbf{u})| \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad |\mathbf{u}^2| \rightarrow \infty. \quad (2.83)$$

I kernel che si trovano principalmente in letteratura sono di due tipi: kernel gaussiani (non molto utilizzati, e che come vedremo in seguito hanno alcuni problemi), e kernel *spline*. Nel seguito ci limitiamo al caso di 3 dimensioni spaziali.

Un kernel gaussiano, per le condizioni appena viste, è vincolato ad avere la seguente forma:

$$W(\mathbf{x}, h) = \frac{1}{(h\sqrt{\pi})^3} \exp\left(-\frac{x^2}{h^2}\right). \quad (2.84)$$

Normalmente esso viene implementato azzerando le code oltre 3σ (in tal modo l'errore che si commette è inferiore all'1%).

I kernel oggi più usati sono i kernel spline: un kernel spline di ordine n è una funzione continua a tratti con supporto compatto avente derivate fino alla $(n-2)$ -esima continue (cioè, di classe \mathcal{C}^2). Un esempio è fornito dagli M_n spline [25], che possono essere definiti in maniera compatta in forma integrale (in 1D):

$$M_n(x, h) = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin kh/2}{kh/2}\right)^n \cos(kx) dk, \quad (2.85)$$

dove \mathcal{N} è un'opportuna normalizzazione. L' M_4 spline, o spline cubico, ad esempio (che è il più utilizzato) in spazio reale ha la forma (in 3D)

$$M_4(q) = \frac{1}{4\pi h^3} \begin{cases} (2-q)^2 - 4(1-q)^3 & \text{se } 0 \leq q \leq 1 \\ (2-q)^3 & \text{se } 1 \leq q \leq 2 \\ 0 & \text{se } q > 2 \end{cases} \quad (2.86)$$

in cui $q \equiv |\mathbf{x}/h|$.

2.5.5. Risoluzione adattiva

Il parametro h che entra nel kernel, come è già stato accennato, rappresenta la "risoluzione" con cui le quantità idrodinamiche sono stimate nell'SPH, nel senso che tutto ciò che avviene su scale $\ell \ll h$ viene mediato nella convoluzione con il kernel. Non c'è però nessuna ragione teorica per imporre che esso sia costante nello spazio o nel tempo; anzi, permettere che vari per adattarsi alle zone sovra- o sotto-dense appare più naturale in un approccio Lagrangiano.

Nei primi approcci [30] ogni particella aveva lo stesso h , pari allo scarto quadratico medio nella posizione: $\sqrt{\langle \mathbf{r}^2 \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle^2}$, dove ad esempio

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \frac{\sum_b m_b \mathbf{r}_b^2}{\sum_b m_b}; \quad (2.87)$$

questa scelta non ottimale è stata sostituita dalla proposta di far variare la lunghezza di smoothing in funzione della densità locale. Una prescrizione possibile è [6]:

$$h_i = \sigma \left(\frac{m_i}{\rho_i} \right)^{1/3}, \quad (2.88)$$

in cui $\sigma \sim 1$ è un parametro da aggiustare numericamente. In alcuni problemi potrebbe essere necessario limitare i valori che h può assumere; ad esempio, quando ρ_i diviene molto piccolo è preferibile porre un limite superiore ad h_i onde evitare forti interazioni fra regioni a molto alta e molto bassa densità. In questo caso, un modo semplice può essere quello di operare la sostituzione $\rho_i \rightarrow A + \rho_i$ nell'eq. (2.88), e aggiustare opportunamente la costante A . In seguito il valore di h può essere determinato dal codice ad ogni time-step usando il valore corrente della densità.

Le modifiche da apportare alle equazioni nel caso di h variabile sono semplici: la densità verrà calcolata come

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}(h_i), \quad (2.89)$$

in cui ricordiamo che $W_{ij}(h_i) \equiv W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) \equiv W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_i)$, mentre nelle equazioni per velocità ed energia (2.73)-(2.76) si potrà o sostituire il kernel W con la semisomma

$$\bar{W}_{ij} = \frac{1}{2} [W(r_{ij}, h_i) + W(r_{ij}, h_j)], \quad (2.90)$$

o alternativamente valutare il kernel in $\bar{h}_{ij} \equiv (h_i + h_j)/2$. Adottando ad esempio quest'ultima prescrizione, le equazioni (2.73)-(2.76) dell'SPH, versioni 1 e 2, con kernel adattivo diventano:

SPH-1:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, \bar{h}_{ij}) \quad (2.91)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, \bar{h}_{ij}) \quad (2.92)$$

SPH-2:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -2 \sum_j m_j \left(\frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, \bar{h}_{ij}) \quad (2.93)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m_j \left(\frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, \bar{h}_{ij}) \quad (2.94)$$

2.5.6. Viscosità artificiale

La viscosità artificiale viene introdotta essenzialmente per trattare gli shock. Come abbiamo visto, gli shock sono zone di discontinuità dal punto di vista matematico, mentre nella realtà si tratta di zone di brusca variazione delle quantità termodinamiche, il cui spessore è dell'ordine di qualche cammino libero medio; le tipiche risoluzioni che si ottengono nelle simulazioni numeriche sono però più grandi di un fattore 10^4 , e questo significa che nessuno dei metodi correnti riproduce lo spessore di un fronte di shock in maniera sufficientemente accurata. Accanto a questo c'è anche un problema “di principio”, e cioè che nel derivare le equazioni dell'SPH si è sempre fatto ricorso a assunzioni di differenziabilità delle quantità coinvolte, e questo farebbe uscire di scena qualsivoglia tipo di discontinuità. Per ovviare a questo problema, una soluzione possibile (un'altra è quella di usare opportuni Riemann-solver, come nel GPH che esamineremo più avanti) è quella di introdurre una forma di dissipazione che “diffonda” le discontinuità sulla scala di smoothing in modo che esse possano essere regolarmente risolte dall'SPH.

Negli anni sono state proposte varie forme per la viscosità artificiale. La più comunemente usata ad oggi è [6, 26, 27]

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} -\nu \left(\frac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2 + \epsilon \bar{h}_{ij}^2} \right) & \text{se } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \text{se } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (2.95)$$

in cui $\epsilon \sim 0.01$ è un fattore numerico piccolo che serve a evitare una singolarità per $r_{ij} = 0$, e in cui per una generica quantità σ_i usiamo le abbreviazioni: $\sigma_{ij} = \sigma_i - \sigma_j$, e $\bar{\sigma}_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j) / 2$. La condizione che $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0$ significa che le particelle si stanno avvicinando, e solo in questo caso la viscosità artificiale si “accende”. Il termine ν è la somma di due contributi:

$$\nu = \frac{\bar{h}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} \left(\alpha \bar{c}_{ij} - \beta \frac{\bar{h}_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2 + \epsilon \bar{h}_{ij}^2} \right) \quad (2.96)$$

(c è la velocità del suono, $c = (\gamma p / \rho)^{1/2}$) in cui α e β sono parametri numerici⁷. Il primo termine può essere ricondotto a una viscosità “continua” passando al limite continuo delle quantità discrete. Infatti, si può dimostrare che la componente lungo la direzione x dell'equazione dell'accelerazione ha un contributo viscoso dovuto al primo termine dato da

$$f_x = \sum_j m_j \frac{\alpha \bar{c}_{ij} \bar{h}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} \frac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2 + \epsilon \bar{h}_{ij}^2} (x_i - x_j) F_{ij}; \quad (2.97)$$

se trascuriamo il termine $\epsilon \bar{h}_{ij}^2$, e consideriamo α , c , h , ρ costanti, mettendoci in 2D per semplicità si può dimostrare [6] che nel limite continuo si ritrova

$$f_x = \alpha h c \left(\frac{3}{8} \partial_{xy} v_x + \frac{1}{8} \partial_{yy} v_x + \frac{1}{4} \partial_{xy} v_y \right), \quad (2.98)$$

⁷I valori comunemente usati sono $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, vedi [6]. Tali valori sono determinati numericamente in modo da ottenere il risultato voluto.

da cui confrontando con l'equazione di Navier-Stokes troviamo accordo per un coefficiente di *shear viscosity* pari a $\eta = \rho \alpha h c / 8$ e di *bulk viscosity* pari a $\zeta = 5\eta/3$, e analogamente per 3 dimensioni.

Il secondo termine, detto di von Neumann-Richtmayer in (2.96), invece, storicamente [6, 27] è stato aggiunto in seguito, quando ci si è accorti che usando solo il primo si ottenevano alcuni problemi per shock di forte intensità, come quelli che avvengono in ambiente astrofisico, in cui il numero di Mach di un fronte può essere estremamente elevato. Si trovò infatti che, per simulazioni con diverse nubi di gas in collisione, le particelle di una nube potevano passare attraverso quelle dell'altra nube; normalmente quest'effetto è limitato a poche distanze interparticellari e non è un grosso problema, tuttavia non dovrebbe occorrere affatto, e perciò, per prevenirlo, è stato introdotto l'altro termine.

Possiamo rapidamente controllare che questa viscosità, pur essendo "artificiale", si comporta in maniera tutto sommato naturale dal punto di vista fisico (pur non avendo le medesime proprietà di una viscosità fisica, vedi per esempio Agertz *et al* [14], e referenze ivi citate). Prendendo il prodotto scalare di \mathbf{v}_i con l'equazione di accelerazione (2.91), moltiplicando per m_i e sommando su i , si trova

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_j m_j \Pi_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (2.99)$$

Riferendoci alla forma esplicita di Π_{ij} , il contributo di dissipazione viscosa della particella i proveniente da j è ($F_{ij} \leq 0$)

$$- \left(\frac{\alpha \bar{h}_{ij} \bar{c}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} \right) \frac{F_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})^2}{r_{ij}^2 + \eta^2} \geq 0.$$

Perciò la dissipazione incrementa l'energia termica come dovrebbe. Per vedere l'entropia, dalla prima legge della termodinamica

$$T \frac{ds}{dt} = du - \frac{P}{\rho^2} d\rho$$

si ottiene

$$T_i \frac{ds_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \Pi_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (2.100)$$

Pertanto la variazione in entropia di ciascuna particella dovuta alla viscosità artificiale è non negativa.

Nonostante i suoi meriti nel riprodurre gli shock, la dissipazione artificiale può essere troppo alta in altre zone, aumentando il numero di Reynolds del fluido e ad esempio diffondendo troppo le instabilità di contatto (come le instabilità di Kelvin-Helmholtz, che vedremo). Per curare questo difetto, Balsara [28] propose di ridurre la viscosità artificiale moltiplicando Π_{ij} per $\bar{\xi}_{ij} = \frac{1}{2} (\xi_i + \xi_j)$ dove

$$\xi_i = \frac{|\langle \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle_i|}{|\langle \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle_i| + |\langle \nabla \times \mathbf{v} \rangle_i| + \varepsilon^i / h_i}$$

($\varepsilon \ll 1$ serve ad evitare divergenze numeriche). Questo fattore agisce di fatto come uno "switch", annullandosi quando la vorticità diventa grande e tendendo a 1 per flussi altamente compressivi⁸.

⁸Per una variante di questo fattore, consultare [29].

2.5.7. Derivazione da un principio variazionale

Le equazioni dell'SPH possono anche essere derivate da un principio d'azione: questo peraltro permette di ottenere una terza formulazione accanto alle due già viste⁹, e servirà da base per ricavare la formulazione con moltiplicatori Lagrangiani che viene usata in GADGET. Il fatto poi che le equazioni siano deducibili da una Lagrangiana, lo si capisce anche dal fatto che le equazioni dell'SPH, come abbiamo visto nella sezione 2.5.3, sono conservative. Rovesciando l'argomento, questo fatto ci garantisce che anche la nuova formulazione che ricaveremo in questa sezione, proprio per il fatto di discendere da un principio d'azione, sarà conservativa¹⁰.

La Lagrangiana di partenza è quella di un fluido perfetto:

$$L = \int \rho \left(\frac{v^2}{2} - u(\rho, s) \right) d^3r, \quad (2.101)$$

dove v e u sono come al solito la velocità e l'energia interna specifica dell'elemento di fluido, ed s è l'entropia specifica (ed eventualmente si può aggiungere un termine $-\Phi$ se si ha un potenziale esterno). La discretizzazione SPH rende la Lagrangiana della forma:

$$L_{SPH} = \sum_j m_j \left(\frac{v_j^2}{2} - u(\rho_j, s_j) \right). \quad (2.102)$$

A questo punto, possiamo ottenere le equazioni dell'SPH dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0. \quad (2.103)$$

Assumiamo per semplicità che $\mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \approx \dot{\mathbf{r}}_i$ (la differenza è qui del second'ordine in h , vedi [6]); troviamo così:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (2.104)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = -m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) - m_i \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_j), \quad (2.105)$$

dove abbiamo assunto la consueta relazione barotropica $\frac{du}{dt} = \frac{P}{\rho^2}$. Mettendo assieme i risultati delle equazioni (2.104) e (2.105), si ottiene la forma finale delle equazioni:

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left[\frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) + \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_j) \right] \quad (2.106)$$

⁹Peraltro, questa è la formulazione che, una volta incorporato il metodo di Godunov che descriveremo nel prossimo capitolo, ci darà i risultati migliori nei test.

¹⁰L'unico punto delicato di quest'argomento, e che tratteremo nel prossimo paragrafo, sta nella conservazione *anche* dell'entropia. Infatti, per essere certi di avere delle equazioni che conservino entropia *ed* energia contemporaneamente e per costruzione, dovremo ricorrere alla tecnica usata per ricavare la formulazione entropy-conserving dell'SPH, che come vedremo è stata introdotta proprio per superare questa difficoltà.

e analogamente per l'energia interna:

$$\frac{du_i}{dt} = - \sum_j m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{r}_i) \cdot \left[\frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) + \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_j) \right]. \quad (2.107)$$

Questa versione è diversa da quelle trovate precedentemente. Nel seguito ci riferiremo a questa formulazione dell'SPH come alla versione 3, o più semplicemente, SPH-3.

2.5.8. Formulazione dell'SPH in GADGET

L'aggiunta del vincolo che l'entropia sia esplicitamente conservata in assenza di fenomeni dissipativi (compresi quelli artificiali) permette di ottenere delle equazioni molto simili a quelle dell'SPH-3.

L'entropia specifica s di un elemento di fluido può essere caratterizzata implicitamente ricorrendo alla "funzione entropica" (*entropic function*) $A(s)$, definita dalla relazione:

$$P = A(s) \rho^\gamma, \quad (2.108)$$

il che significa che l'energia interna diviene

$$u = \frac{A}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1}. \quad (2.109)$$

Dall'equazione dell'energia dell'SPH-1 (2.92) ricaviamo l'evoluzione dell'entropia discretizzata

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\rho_i^{\gamma-1}} \sum_j m_j \Pi_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i \bar{W}_{ij} \quad (2.110)$$

(ricordiamo che $\bar{W}_{ij} \equiv [W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) + W(\mathbf{r}_{ij}, h_j)]$). Quest'equazione ci mostra che l'entropia è generata *solo* dalla viscosità artificiale in presenza di shock¹¹. Nella formulazione entropica, o *entropy-conserving* dell'SPH (come in GADGET) è questa equazione ad essere integrata al posto di quella dell'energia.

La formulazione standard dell'SPH permette di conservare in maniera esatta alternativamente l'entropia o l'energia, ma dà problemi se vogliamo conservare esattamente entrambe [17, 31].

Tuttavia, è possibile derivare una formulazione dell'SPH che conservi esplicitamente sia l'energia che l'entropia, per costruzione, imponendo opportuni vincoli. In GADGET viene implementata questa formulazione che ora ricaveremo, per di più *entropy-conserving*, cioè come già specificato viene integrata l'equazione dell'entropia (2.110) anzichè quella dell'energia.

Consideriamo la Lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \frac{1}{\gamma - 1} \sum_i m_i A_i \rho_i^{\gamma-1} \quad (2.111)$$

come funzione delle coordinate generalizzate $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, h_1, \dots, h_N)$, N è il numero di particelle, e \mathbf{r}_i e h_j sono coordinate indipendenti. Supponiamo per ora le A_i costanti (flusso adiabatico).

¹¹Trascuriamo qui le sorgenti *esterne* di entropia.

Imponiamo che le lunghezze di smoothing siano scelte in modo da contenere una certa massa totale fissata nel volume entro il quale si media, cioè $(4\pi/3)h_i^3\rho_i = M_{sph} = \bar{m}N_{sph}$, dove \bar{m} è la massa media di una particella e N_{sph} il tipico numero di vicini sui quali si media. Otteniamo in questo modo N vincoli della forma:

$$\phi_i(\mathbf{q}) \equiv \left(\frac{4\pi}{3}\right)h_i^3\rho_i - M_{sph} = 0, \quad (2.112)$$

che possiamo trattare mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: le equazioni di Eulero-Lagrange diventano quindi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}, \quad (2.113)$$

in cui abbiamo introdotto gli N moltiplicatori lagrangiani λ_i . Dalle N equazioni per $q_i = h_i$ si ricava la forma dei moltiplicatori (vedi Appendice B):

$$\lambda_i = \frac{3}{4\pi} \frac{m_i P_i}{h_i^3 \rho_i^2} \left[1 + \frac{3\rho_i}{h_i} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1} \right]^{-1}. \quad (2.114)$$

Usando ora questo risultato nelle equazioni per $\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i$, si ha

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \left[1 + \frac{h_j}{3\rho_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial h_j} \right]^{-1} \nabla_i \rho_j, \quad (2.115)$$

da cui, essendo

$$\nabla_i \rho_j = m_i \nabla_i W_{ij}(h_j) + \delta_{ij} \sum_k m_k \nabla_i W_{ki}(h_i), \quad (2.116)$$

si trova infine l'equazione del moto

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left\{ f_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + f_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right\} \quad (2.117)$$

dove le f_i sono definite come

$$f_i \equiv \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1}. \quad (2.118)$$

Dalle proprietà di (anti)simmetria dell'eq. (2.117) possiamo mostrare ripetendo i passaggi del paragrafo 2.5.3 che l'energia totale è conservata automaticamente, assieme all'entropia (e all'impulso e al momento angolare). Pertanto questa formulazione permette di avere entrambe le conservazioni, a patto ovviamente che la smoothing length sia aggiustata localmente per garantire la validità del vincolo (2.112), come avviene ad esempio in GADGET, che ora passiamo a illustrare.

2.6. Il codice di simulazione GADGET

GADGET¹² è un codice per simulazioni cosmologiche, liberamente reperibile in rete¹³ [49], disegnato appositamente per essere gestito da supercomputer massicciamente paralleli. Esso viene utilizzato per simulazioni di fluidi auto-gravitanti e liberi di interagire con materia non-collisionale in un contesto cosmologico. Oltre alla fluidodinamica e alla gravità, GADGET permette di implementare molti processi fisici addizionali, come raffreddamento radiativo, processi di formazione stellare per fluidi multifase, campi magnetici, effetti di ionizzazione da background UV. In questa sede non ci interesseremo a tali processi, così come non considereremo neanche la gravità. Il nostro compito sarà di studiare una modifica dello schema fluidodinamico implementato in GADGET.

Vi sono diversi articoli di rassegna che coprono in maniera esauriente i vari aspetti del codice [5, 54]. A noi basterà delinearne gli aspetti fondamentali a capire come esso opera.

Il codice tratta essenzialmente due componenti: una componente non collisionale, quale può essere la materia oscura, o le stelle di una galassia, ed una componente barionica, ovvero un gas ideale composto perlopiù da idrogeno e in parte elio. Queste due componenti sono gravitazionalmente accoppiate, e l'interazione gravitazionale viene trattata con un metodo ad N corpi (a scelta un puro Tree o un TreePM), si veda la sezione 2.3. In più, le interazioni idrodinamiche della componente barionica vengono trattate con il metodo SPH, in particolare la sua versione entropy-conserving con smoothing length variabile (aggiornata ad ogni step attraverso la densità in modo da avere un numero costante di particelle entro la sfera di smoothing), descritta nella sezione 2.5.8. In tal modo esso evolve l'equazione dell'entropia (2.110) anziché quella dell'energia.

L'integrazione numerica viene fatta con un *leapfrog simplettico*¹⁴, uno schema [52] che deve il suo nome al modo in cui aggiorna ad ogni step posizione e velocità [50, 51]. Il motivo per cui non viene usato direttamente un Runge-Kutta è che le approssimazioni numeriche che esso introdurrebbe genererebbero delle perturbazioni non-Hamiltoniane in grado di cambiare il comportamento del sistema sul lungo termine, mentre in un approccio simplettico questo non succede (per costruzione).

Infine, la parallelizzazione in GADGET viene fatta mediante una decomposizione in domini (domain decomposition) del volume della simulazione, che utilizza una *Curva di Peano-Hilbert*, ovvero una curva definita ricorsivamente e perciò molto semplice da far tracciare a un programma, e che è in grado di riempire lo spazio quanto densamente si vuole, per la suddivisione e l'assegnazione dei domini ai vari processori (nodi). La Figura 2.2 mostra come tale curva viene costruita ricorsivamente.

¹²Acronimo di *Galaxies with Dark matter and Gas intEract*

¹³<http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/>

¹⁴Uno schema di integrazione è chiamato *simplettico* quando preserva la struttura Hamiltoniana di un sistema formulando ogni step dell'integrazione temporale come una trasformazione canonica. Il nome è dovuto al fatto che la 2-forma simplettica rimane invariata in tale schema.

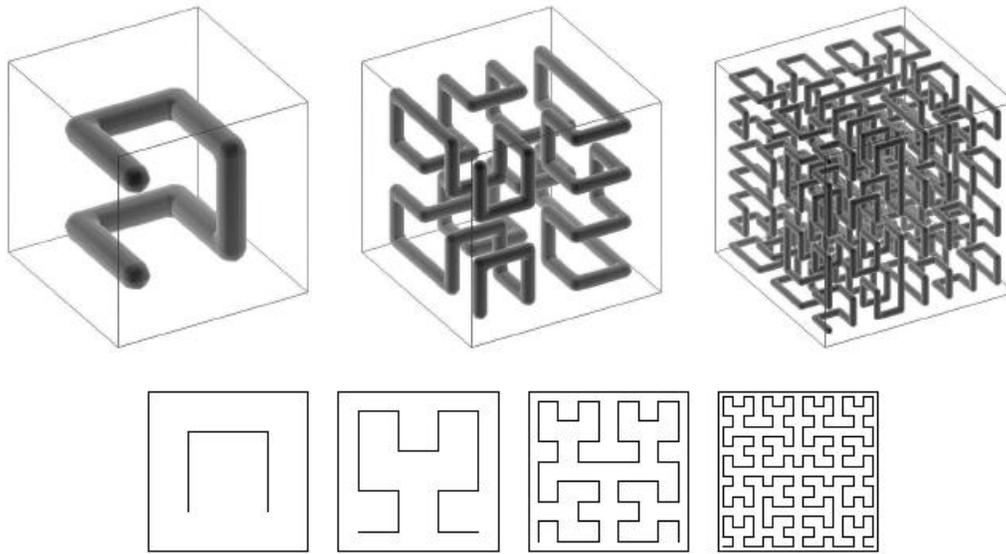


Figura 2.2.: Costruzione ricorsiva di una curva di Peano-Hilbert in 2 o 3 dimensioni. (Figura estratta da [5])

In sostanza ad ogni processore viene assegnata una certa frazione del volume totale della simulazione, esso svolge i calcoli per le particelle presenti in quella regione, poi si fa comunicare dagli altri processori le quantità relative alle particelle delle regioni vicine che interagiscono con quelle della sua regione, e comunica a sua volta le proprie quantità agli altri processori che svolgono lo stesso procedimento. Infine tutti quanti si ricomunicano i risultati, e al time-step successivo si ripete la medesima procedura.

Esistono tre versioni del codice, ovvero: GADGET, GADGET-2 e GADGET-3. Mentre fra il primo e il secondo vi sono molte differenze (per esempio il primo non utilizzava ancora la formulazione entropy-conserving, nè implementava un metodo TreePM), fra il secondo e il terzo esse riguardano più che altro il modo in cui avviene la parallelizzazione e l'assegnazione dei domini ai processori. Nelle simulazioni abbiamo usato sempre GADGET-3.

3. Metodi idrodinamici Lagrangiani: SPH e GPH

La prima parte del presente Capitolo è dedicata ad un'analisi dei problemi principali dell'SPH. Inizieremo discutendo l'assenza in quest'ultimo di mixing in entropia, per poi passare alle difficoltà che esso presenta nel riprodurre le instabilità idrodinamiche, come evidenziato dal “Blob Test” di Agertz *et al* [14]. Tale difficoltà come vedremo risulta legata sia alla presenza di una viscosità artificiale, sia a problemi nel trattare gradienti elevati di densità ed entropia [13]. Passeremo quindi a descrivere il metodo GPH (*Godunov-type Particle Hydrodynamics*), che potrebbe risolvere alcuni dei problemi menzionati, modificando l'SPH in modo da incorporare un “Riemann solver”, che definiremo, ma che in sostanza può essere pensato come un metodo per incorporare i flussi delle principali quantità termodinamiche fra le coppie di particelle. Infine passeremo a descrivere brevemente un approccio alternativo all'SPH, il metodo di Inutsuka.

Le referenze principali seguite in questo capitolo sono [14, 10, 12, 9, 8, 13, 15].

3.1. Principali problemi dell'SPH

L'SPH nella sua formulazione standard presenta vari problemi principalmente nella corretta integrazione di instabilità e discontinuità e nell'assenza, o scarsa presenza, di mixing in corrispondenza di tali discontinuità.

Nel caso di zone in cui si ha produzione di entropia, si ha mixing quando i moti (turbolenti o non) delle varie parti del sistema fanno sì che i vari elementi di fluido ad entropie specifiche diverse muovendosi in giro si “rimescolino” fra loro, causando una diffusione dell'entropia anche alle altre particelle e un suo conseguente innalzamento (in casi reali si ha un flusso di calore proporzionale al gradiente di entropia). Ora, non è scontato che un metodo numerico idrodinamico riproduca questo effetto: nell'SPH entropy-conserving implementato in GADGET, ad esempio, il vincolo della conservazione forza tale mixing ad essere nullo. Di fatto, mentre in un metodo euleriano i volumi di riferimento sono fissi e questo permette un flusso di materia attraverso essi e quindi consente di riprodurre il mixing, in un metodo lagrangiano i volumi di riferimento sono in qualche modo “agganciati” alle particelle e questo non consente di avere mixing al loro interno. L'assenza

di mixing comporta che molte parti del fluido che nella realtà subiscono un incremento di entropia dovuto alle altre parti, all'interno di una simulazione rimangono a bassa entropia; un esempio tipico è un ammasso di galassie, che ha una zona centrale altamente turbolenta: senza adeguato mixing una simulazione riproduce un profilo di entropia più basso di quello reale e perciò dà risultati erronei (vedi sotto). Inoltre, per restare in ambito idrodinamico, abbiamo visto che attraverso un'onda d'urto si ha forte flusso di materia ed entropia, e questo comporta le ben note difficoltà dei metodi puramente Lagrangiani (come l'SPH) nel catturare gli shock.

Questo è uno dei motivi per cui è stata introdotta la viscosità artificiale; tuttavia è bene ricordare che, per quanti problemi essa possa risolvere, si tratta di un termine introdotto ad hoc, la cui forma è stata modellata sui risultati che si volevano ottenere. Inoltre, essa presenta problemi nel trattamento delle instabilità, perchè come vedremo smorza termini che sarebbero necessari a riprodurle.

3.1.1. Il problema del mixing

Un esempio illuminante riguardo l'assenza di mixing nell'SPH proviene dal Santa Barbara Cluster Comparison [16]. Quest'ultimo è un banco di prova, ormai divenuto standard, per paragonare i risultati delle simulazioni di uno stesso ambiente cosmologico idealizzato, fatte con diversi codici e differenti schemi idrodinamici. In esso viene simulata la formazione di un ammasso di galassie avente massa $M \simeq 10^{15} M_{\odot}$ in un Universo a "cold dark matter" (CDM) piatto, con $\Omega_M = 1$. Senza entrare nei dettagli, si tratta di uno scenario cosmologico che oggi sappiamo essere irrealistico, tuttavia è sufficiente a riprodurre un problema astrofisico rilevante, mediante il quale porre a confronto i diversi codici che rappresentano l'intero spettro dei metodi numerici oggi in uso.

Uno dei risultati che emergono chiaramente da questo progetto, è la discrepanza dei codici Lagrangiani ed Euleriani nel riprodurre parte dei profili della struttura dei barioni intra-cluster più interna dell'ammasso. Nella Figura 3.1 sono riportati i diversi profili di entropia ottenuti dai vari codici.

Si vede che i codici Euleriani esibiscono un andamento piatto (un *core*) nel loro profilo per bassi valori del raggio: la dimensione del "core" tende ad aumentare al diminuire della risoluzione, tuttavia per alcuni codici (ad esempio quello che nella Figura 3.1 viene chiamato "bryan") la dimensione è significativamente più grande della risoluzione, e quindi dovrebbe essere attendibile; nei codici Lagrangiani (SPH) invece questo "plateau" non si evidenzia. Dal momento che questo modello è stato simulato in condizioni non-radiative (assenza di *radiative cooling*), questo significa che nelle simulazioni Euleriane è stata generata (per esempio attraverso shock) o trasportata più entropia al centro dell'ammasso: l'assenza di mixing in entropia nell'SPH congela questo meccanismo e perciò tale incremento non si produce¹.

¹Questo però non necessariamente significa che i codici Euleriani siano migliori: essi esibiscono altri tipi di problemi cui accenneremo più avanti.

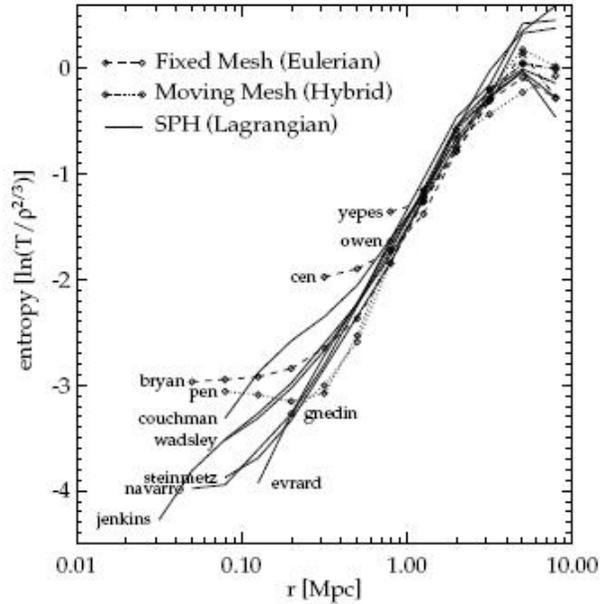


Figura 3.1.: Profili radiali di entropia del Santa Barbara Cluster per diversi codici (Euleriani, Lagrangiani e ibridi), vedi [16] per dettagli. Si vede chiaramente che i codici Euleriani mostrano un *core* nel profilo in prossimità del centro del cluster, con una dimensione determinata dalla risoluzione del codice (Figura estratta da [15]).

Strettamente correlato al mixing è il problema della turbolenza e dei processi diffusivi [15]. Sappiamo che i fluidi astrofisici hanno dei numeri di Reynolds² tipicamente molto grandi: in un ammasso di galassie si possono raggiungere anche valori dell'ordine di 10^{26} [32]. Ciò significa che un sistema del genere è molto turbolento; inoltre un'analisi dei vari processi fisici in un ammasso di galassie porta a concludere che la diffusione turbolenta potrebbe essere il meccanismo dominante di trasporto del calore [33]. In presenza di turbolenza si ha un flusso di energia fra le diverse scale del sistema: in media tale flusso avviene come cascata turbolenta dalle scale più grandi a quelle più piccole. Strutture su piccola scala quali i vortici hanno un effetto macroscopico, e ciò fa sì che i fenomeni che avvengono alle scale non risolte in una simulazione numerica (*Subgrid Scales*, SGS) influenzino anche le scale superiori alla risoluzione. Se pensiamo all'SPH, esso rappresenta le particelle come un "coarse-graining" di un volume di fluido, il che dà risultati corretti nel limite di elementi di fluido infinitamente piccoli e privi di struttura interna, ma nel caso approssimato i contributi da moti e gradienti delle scale non risolte, che riprodurrebbero effetti di dissipazione e mixing di energia termica, vengono mediati, e quest'effetto di "fine mixing" attenuato. Questo è particolarmente problematico nel caso turbolento. In questo caso infatti la cascata turbolenta di energia, dalle scale più grandi di quest'ultima scala di dissipazione alle più piccole, si accumula alle piccole scale senza essere dissipata, come invece dovrebbe, a causa proprio di quest'effetto di soppressione dei contributi dissipativi delle scale non risolte. Questo causa nell'SPH un "piling-up"

²Il numero di Reynolds è definito come $R = vL/\nu$, in cui v è la velocità caratteristica alle scale di lunghezza L e ν è la viscosità

dell'energia, ovvero un accumulo eccessivo della stessa alle piccole scale, fonte di problemi numerici in questo metodo.

3.1.2. Le instabilità idrodinamiche

Le instabilità idrodinamiche giocano un ruolo fondamentale nella formazione di strutture astrofisiche, dalla formazione del disco protoplanetario di una stella al moto delle galassie nell'ICM. Esse sono principalmente di due tipi [34] (ce ne sono anche altri meno frequenti, che qui non considereremo):

1. Instabilità di Kelvin-Helmholtz (KH o KHI³): avvengono quando si ha una velocità di taglio all'interfaccia fra due fluidi;
2. Instabilità di Rayleigh-Taylor (RT o RTI): occorrono quando un fluido più denso è accelerato da uno meno denso.

Esiste un test molto interessante per investigare il modo in cui diversi codici gestiscono i vari effetti che sono importanti per sistemi multifase, come gli effetti di ram-pressure dovuti a shock, con conseguente *stripping* o frammentazione del gas coinvolto che si manifestano attraverso appunto instabilità di tipo KH ed RT. Questo è il cosiddetto “Blob test” [14]: si tratta in sostanza di simulare una nube sferica di gas sottoposta ad un vento supersonico (con conseguente formazione di shock) esterno; la nube è 10 volte più densa e 10 volte più fredda dell'ambiente esterno, in modo da essere in equilibrio di pressione con esso, ed è composta da idrogeno atomico con peso molecolare 1 e indice adiabatico $\gamma = 5/3$. La Figura 3.2 illustra schematicamente il “set-up” del blob test.

Fisicamente, ci aspettiamo che il riscaldamento della nube dovuto all'onda d'urto e gli effetti di Ram-pressure portino a una sua deformazione e all'instaurarsi di instabilità idrodinamiche che ne determinino alla fine la rottura: ci aspettiamo cioè che la bolla scompaia dopo un certo tempo caratteristico. Possiamo vedere più in dettaglio la fluidodinamica del processo. Usando le notazioni della sezione 2.2, possiamo approssimare l'accelerazione della nube considerandola proveniente dal trasferimento di impulso nel cilindro di gas di fronte ad essa:

$$a_{cl} \sim \dot{v}_1 \sim \frac{\rho_{ext} \pi R_{cl}^2 v_1^2}{M_{cl}}.$$

Integrando quest'equazione possiamo trovare l'evoluzione della velocità pre-shock. Da quest'ultima, assieme all'eq. (2.39) della sezione 2.2, possiamo ricavare l'andamento qualitativo della velocità post-shock, come mostrata in Figura 3.2; il suo andamento è cruciale per la stabilità della superficie della nube, e per la sua distruzione. Si trova che l'evoluzione della nube è caratterizzata da una scala temporale caratteristica, il cosiddetto *crushing-time* [14], definito come

$$\tau_{cr} = \frac{2R_{cl} (\rho_{cl}/\rho_{ext})^{\frac{1}{2}}}{v_1}; \quad (3.1)$$

³La “T” sta per *Instabilities*.

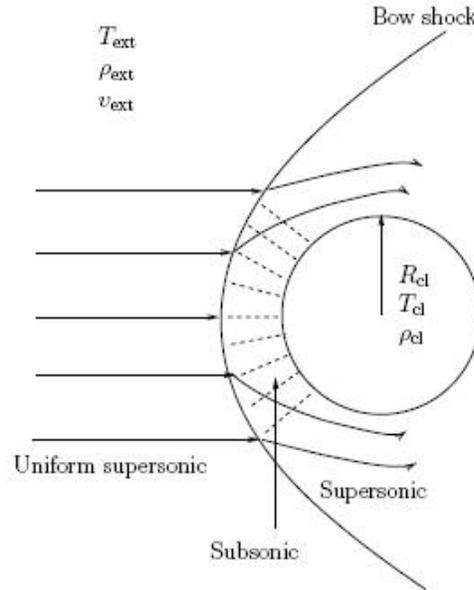


Figura 3.2.: Illustrazione del blob-test. L’ambiente esterno, inizialmente in equilibrio di pressione con la nube, viaggia a velocità supersonica creando un’onda d’urto di fronte a quest’ultima (tratto da Agertz *et al* [14]).

durante questo intervallo di tempo si forma lo shock, e il gas che ha subito shock fluisce attorno alla nube, secondo l’andamento mostrato in Figura 3.2. Dietro lo shock il flusso rimane sempre subsonico, e ci aspettiamo che lì sorgano delle instabilità (RT), mentre ci aspettiamo che si sviluppino dei moti turbolenti attorno alla bolla che diano luogo a trasporto di materia al di fuori di essa, assieme ad altre instabilità (KH). La nube nel frattempo sarà compressa lungo la direzione del moto per l’insorgere di un’onda d’urto interna ad essa; per il teorema di Bernoulli allora la pressione sarà minore sulle zone periferiche, il che causerà un flusso di materia verso la periferia e un *overspilling* che è un’altra fonte di perdita di massa del blob (indipendente dalle instabilità esterne).

Nel lavoro di Agertz *et al* [14] vengono confrontati i risultati della simulazione per diversi codici; a noi interessa solo confrontare il risultato che si ottiene con GADGET e quello che si trova con uno dei codici Euleriani standard, ENZO. Essi sono riportati in Figura 3.3.

Vediamo chiaramente che nel caso Euleriano, a differenza di quello Lagrangiano, si ha completa distruzione della nube dopo all’incirca un paio di crushing-times: ciò è consistente con i tempi scala delle instabilità, che raggiungono il pieno regime dopo poco meno di $2\tau_{cr}$. Studiando l’andamento della frazione di massa della nube, vediamo che i due codici essenzialmente concordano fino a $t = \tau_{cr}$, quando cioè il meccanismo principale di perdita di massa è il trasferimento di gas (mediato da vortici) nella zona a bassa pressione formatasi dietro la nube e ai bordi, attraverso il meccanismo di “overspilling” descritto sopra. Quando le instabilità iniziano (per prime le KHI) a dominare, i

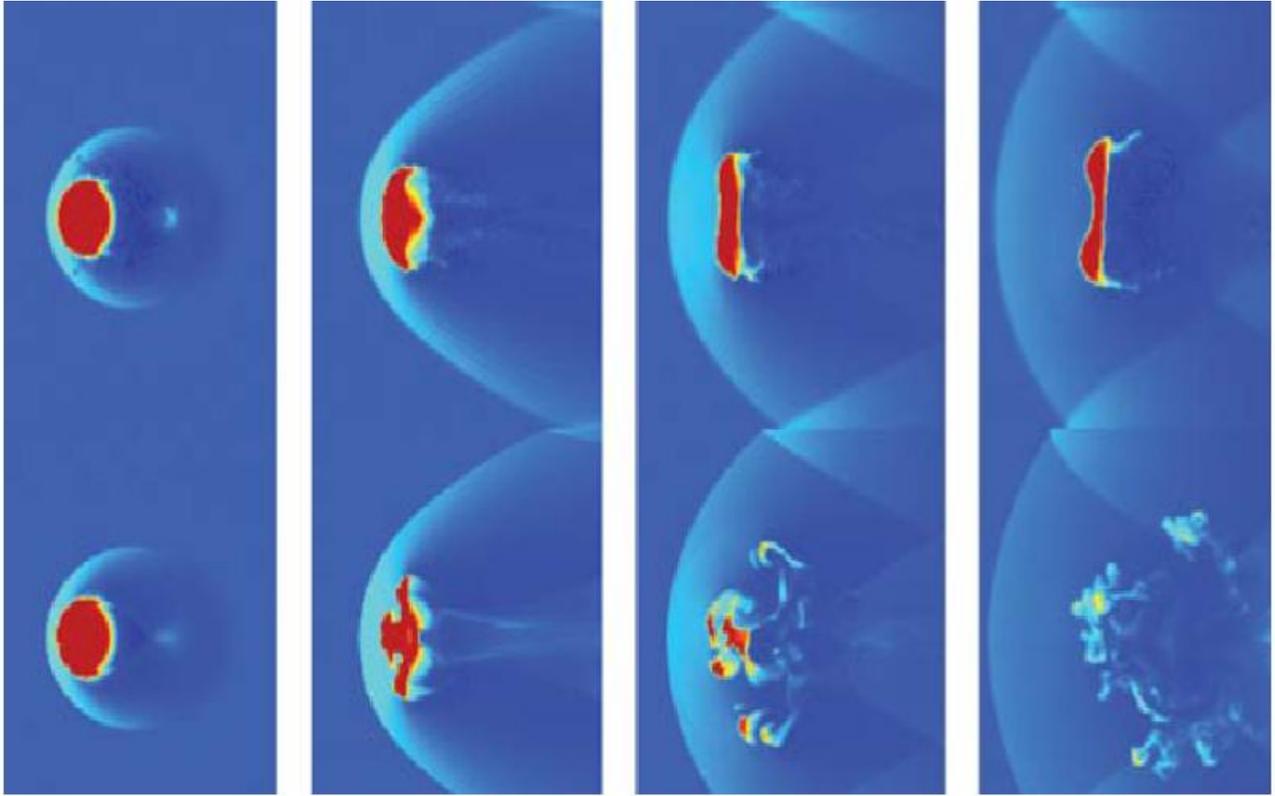


Figura 3.3.: Mappe di densità di una sezione centrale del gas, prese a $t = 0.25, 1.0, 1.75$ e 2.5 in unità di τ_{cr} . La riga sopra mostra i risultati di GADGET-2, mentre quella sotto i risultati per ENZO (tratto da Agertz *et al* 2007, [14]).

risultati dei due metodi rapidamente divergono. Queste conclusioni inoltre sono indipendenti dalla risoluzione e dalla scelta delle condizioni iniziali, perciò possiamo concludere che dipendono dalle caratteristiche intrinseche dei due codici. In particolare, possiamo vedere che l'SPH presenta due grossi problemi: uno legato alla viscosità artificiale, che ostacola principalmente la formazione delle RTI, e uno legato al calcolo dei gradienti in presenza di discontinuità, che impedisce l'instaurarsi delle KHI.

Per quanto concerne il primo punto, notiamo innanzi tutto che l'inserimento stesso di una viscosità artificiale, che nei codici a griglia è assente, introduce in linea di principio una discrepanza, in quanto in un caso stiamo risolvendo delle equazioni di Navier-Stokes, seppure con viscosità non fisica, mentre nell'altro abbiamo semplici equazioni di Eulero. Comunque, la viscosità ha principalmente due effetti:

- Smorzamento su piccola scala delle perturbazioni di velocità e delle velocità random;
- Diffusione della vorticità post-shock e attenuazione della turbolenza.

Il secondo effetto segue dal primo, ma può anche essere letto direttamente dall'equazione del trasporto della vorticità

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times \mathbf{v}) = \nabla P \times \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \omega, \quad (3.2)$$

dove $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ è la vorticità. Il secondo termine, proporzionale alla viscosità (in questo caso fisica, ma il discorso qualitativamente è lo stesso), è un termine di diffusione per ω : questo significa che la presenza di una viscosità è accompagnata da smorzamento della vorticità. Questo agisce *contro* l'instaurarsi delle RTI, in quanto la vorticità nel flusso post-shock ha un effetto destabilizzante sulla nube, assieme alle instabilità superficiali. La cosa problematica sembra essere che, da quanto emerge anche da altri studi [35], abbassare la viscosità artificiale non porta necessariamente a risultati migliori. Purtroppo sembra che la sua sola presenza sia già problematica, così come lo era la sua assenza, nell'SPH. Come vedremo, una via d'uscita potrebbe essere fornita dal metodo GPH che descriveremo.

E' tuttavia necessario puntualizzare che, anche se in questo test i metodi Euleriani sembrano comportarsi meglio di quelli Lagrangiani, ciò non significa che i primi siano necessariamente migliori dei secondi. In questa sezione ci concentriamo sui difetti dei codici Lagrangiani, ma è forse opportuno aprire qui una piccola parentesi per menzionare anche quelli dei codici Euleriani. Questi ultimi, come descritto in sezione 2.4, implementano le equazioni del moto introducendo esplicitamente il termine convettivo (o "avvettivo", *advection term*) $\mathbf{v} \cdot \nabla$. Infatti in essi la derivata temporale viene utilizzata in forma Euleriana, ovvero come $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$, essendo i volumi di riferimento fissi, mentre nei codici Lagrangiani viene implementata la derivata Lagrangiana $\frac{d}{dt}$, dal momento che i volumi di riferimento seguono le linee di flusso descritte dalle particelle. La presenza esplicita di questi termini avvettivi, se da un lato permette di riprodurre i flussi delle quantità termodinamiche fra gli elementi di fluido, ha come difetto quello di *rompere* l'invarianza Galileiana delle equazioni, quando discretizzate ed implementate nel codice. Il risultato della simulazione non è più invariante se al sistema viene applicata una velocità costante, ad esempio trasversalmente alla direzione del moto. Ovviamente questo è un effetto non fisico, che non dovrebbe come tale essere presente. Nei metodi Lagrangiani invece i termini avvettivi sono riprodotti *implicitamente*, e pertanto l'invarianza Galileiana è esplicitamente rispettata. Un altro problema dei codici Euleriani è legato alla risoluzione, ed è già stato menzionato in precedenza. Se modellizziamo il sistema con una griglia a passo reticolare spazialmente costante, la risoluzione delle varie zone sarà anch'essa costante, e dipendente dal valore del passo reticolare. Questo significa che le zone ad alta densità saranno riprodotte con una risoluzione minore di quanto sarebbe necessario (quindi in generale *peggio* delle altre). Una possibile via d'uscita da questo inconveniente è offerta dai metodi adattivi, che implementano una griglia a passo variabile, libera di adattarsi alla densità delle varie zone. Questo tuttavia può essere fatto al prezzo di complicazioni numeriche considerevoli: ad esempio un problema risiede nell'interazione fra le diverse scale che una griglia variabile introduce.

Tornando alle KHI, e al secondo grosso problema dell'SPH che menzionavamo pocanzi, un esame più ravvicinato di una simulazione dell'interfaccia fra due fluidi a $t = \tau_{cr}$ risulta essere assai illuminante.



Figura 3.4.: Zoom delle particelle dell’SPH all’interfaccia fra il gas della nube e quello esterno, a $t = \tau_{cr}$. Si vedono chiaramente delle fasce vuote dovute a un calcolo improprio della densità vicino alla discontinuità (tratto da [14]).

Dalla Figura 3.4 si vede che si formano delle fasce vuote fittizie, che creano un *gap* (non fisico) fra i due fluidi, fenomeno questo che era già stato discusso in letteratura, vedi [36, 37, 38, 39, 40, 41]; questo si può osservare anche nel blob test per l’SPH. Tale gap impedisce di fatto ogni contatto fra i due fluidi che possa innescare le KHI. Per capirne il motivo, dobbiamo pensare che il calcolo della forza nell’SPH formalmente assume che i gradienti di densità, come quelli di temperatura, siano piccoli entro la regione di smoothing. Quando una particella della regione calda a bassa densità raggiunge la regione fredda ad alta densità, trova improvvisamente molti vicini entro la propria sfera di smoothing, cosicché la sua densità viene sovrastimata. Questo causa, attraverso la conservazione del momento, una forza repulsiva fittizia sulla particella, che la fa “rimbalzare via” da quella zona.

Il problema riguardante le KHI coinvolge una classe di fenomeni piuttosto vasta, dal momento che esso riguarda direttamente il modo in cui l’SPH tratta le discontinuità. Abbiamo visto nel precedente capitolo che possiamo pensare alla viscosità artificiale come a un modo per trattare numericamente le discontinuità, in particolare per risolvere correttamente gli shock; tuttavia una sua diminuzione non porta a miglioramenti granchè significativi nella situazione riscontrata. Ciò avviene perchè in questo caso l’errore si manifesta nel calcolo della densità in presenza di gradienti del kernel molto grandi. Tale errore in realtà può essere legato a un analogo errore nel calcolo della pressione, che produce un contributo spurio e che crea una sorta di “tensione superficiale artificiale”, che impedisce ai due fluidi di essere realmente a contatto. Il riferimento alla tensione superficiale non è casuale, in quanto nella realtà essa è direttamente legata al salto in pressione all’interfaccia dalla condizione di Laplace-Young (vedi e.g. [42])

$$[P] = \tau\kappa, \quad (3.3)$$

in cui τ è la tensione superficiale e κ la curvatura dell’interfaccia⁴.

Come vedremo anche più avanti nei risultati delle simulazioni dello shock-tube, i calcoli errati del codice alla discontinuità si traducono in un andamento discontinuo della pressione in quel punto

⁴La notazione usata è quella introdotta in sezione 2.2.

(ciò che Price chiama “blip” in pressione [13]), che è il responsabile delle fasce vuote che si trovano nel test di KH e nel blob-test, e che si possono vedere in Figura 3.4.

Questa tensione superficiale artificiale può essere legata al problema del mixing, mediante il seguente argomento (dovuto a V. Springel, citato in Price '08 [13]). Immaginiamo una distribuzione bi-fase (cioè composta da due fluidi differenti) di particelle SPH, collocata in una scatola chiusa, e in cui le due fasi contengono particelle di differente entropia. Sfruttando la conservazione locale dell'entropia vista nella formulazione entropy-conserving nella sezione 2.4.7, non dovrebbe esserci differenza fra una configurazione in cui le due fasi siano separate in regioni spazialmente distinte, e una configurazione in cui le due siano completamente mescolate. Tuttavia, se la pressione è discontinua all'interfaccia, e sono presenti forze spurie, la configurazione non mescolata risulta energeticamente favorita, portando agli effetti visti. Price [13] nel suo articolo suggerisce di risolvere il problema affiancando alla viscosità artificiale una conduttività termica artificiale che aggiunga quel po' di mixing d'entropia all'interfaccia tale da eliminare o attenuare gli errori nel calcolo della pressione. Come vedremo nel prossimo paragrafo, un altro modo abbastanza naturale di introdurre del mixing intrinseco è il metodo Godunov-SPH, o GPH, che ha il pregio non solo di non aver bisogno di alcuna viscosità artificiale per riprodurre i risultati standard dell'SPH, ma nemmeno di una conducibilità termica artificiale per riprodurre il mixing⁵ in entropia o energia termica.

3.2. Il metodo GPH

3.2.1. Motivazioni

Abbiamo visto che le discontinuità fluidodinamiche come gli shock, fenomeni molto comuni in astrofisica, pongono seri problemi ai metodi numerici lagrangiani come l'SPH, richiedendo l'introduzione di una viscosità artificiale per essere correttamente riprodotti. Tuttavia, abbiamo visto anche che l'introduzione di quest'ultima non migliora (e in alcuni casi persino peggiora) alcuni problemi. Ad esempio, pur introducendo una forma di dissipazione che quindi genera entropia in presenza di onde d'urto, essa non fornisce tutto il mixing che sarebbe necessario per riprodurre fedelmente zone turbolente o ad alta produzione di entropia, come emerge dai risultati del Santa Barbara Cluster Comparison. In più, rimane il fatto che essa smorza alcune instabilità, e non permette di trattare correttamente forti gradienti di entropia.

In linea di principio, il metodo migliore per trattare le onde d'urto sarebbe usando direttamente le condizioni di Rankine-Hugoniot (2.33)-(2.35) in corrispondenza del fronte di shock, il che non richiederebbe alcuna viscosità artificiale. Tali equazioni sono facilmente risolvibili una volta date le condizioni iniziali (i dettagli della procedura sono ben noti in letteratura, vedi [43, 44]), e descrivono le varie quantità alla discontinuità esattamente. Tuttavia un'implementazione di questo schema non è fattibile per le seguenti ragioni:

⁵L'unico difetto che sembra emergere dai test è che la quantità di mixing è in un certo senso “eccessiva”. Tuttavia questo è un punto ancora aperto, che potrà essere chiarito solo a seguito di ulteriori studi e verifiche numeriche.

1. E' impossibile predire con certezza quando e dove uno shock occorrerà, poichè essi possono formarsi spontaneamente, e sarebbe quindi necessario un monitoraggio continuo durante tutto il tempo della simulazione;
2. La soluzione delle equazioni di Rankine-Hugoniot richiede la conoscenza anticipata delle condizioni al contorno, ovvero delle condizioni fisiche nella regione pre-shock; ma ciò è molto difficile da sapere *prima* di aver risolto lo shock.

Per questi motivi, occorre cercare un metodo computazionalmente più adeguato per trattare le onde d'urto, che sia implementabile nell'SPH, senza l'uso della viscosità artificiale e i problemi che questo comporta. Ad oggi, il metodo migliore che si conosca è il metodo di Godunov. Per capire come funziona, dobbiamo introdurre il concetto di Riemann-solver.

3.2.2. Riemann solver & metodo di Godunov

Un Riemann solver è un algoritmo o una procedura per la soluzione di un problema di Riemann.

Il problema di Riemann consiste nella determinazione delle quantità idrodinamiche di due fluidi posti inizialmente a contatto con condizioni iniziali diverse. Di per sè, la configurazione del problema è la stessa di uno shock-tube, che descriveremo nel paragrafo 4.1.1. Si considerino due gas, con diversa densità e pressione, posti a contatto e separati da una membrana, in modo che inizialmente non vi sia interazione fra i due. A $t = 0$ la membrana viene rimossa e le due fasi iniziano ad interagire. Il compito del Riemann solver è di calcolare le quantità evolute ad un certo tempo $t > 0$.

Nella Figura 3.5 è rappresentato schematicamente il problema di Riemann. E' utile esaminare i dettagli del problema perchè saranno ripresi nella discussione del test di Sod nel capitolo 4.

Se la pressione nella zona L è maggiore che nella zona R, quando i due fluidi sono messi a contatto il fluido in L inizierà a comprimere quello in R, invadendo la zona di destra. Entro opportune condizioni iniziali si formerà uno shock che si propaga verso destra, e conseguentemente nella zona a sinistra si formerà una regione in cui la densità del fluido L diminuisce, dando luogo a un'onda di rarefazione che si propaga verso sinistra alla velocità locale del suono. Dopo aver fatto evolvere il sistema per un certo tempo, si trovano 5 regioni distinte (cfr figura 5):

- **Regioni L & R:** in esse il fluido non è stato perturbato, e le quantità fisiche mantengono i valori iniziali.
- **Regione 2:** onda di rarefazione. La testa dell'onda si muove verso sinistra alla velocità del suono.
- **Regione 3:** contiene il fluido che inizialmente era in L e si è mosso a destra. E' delimitata dalla coda dell'onda di rarefazione, in cui si ha $v_2 = v_3$, e dalla discontinuità di contatto.

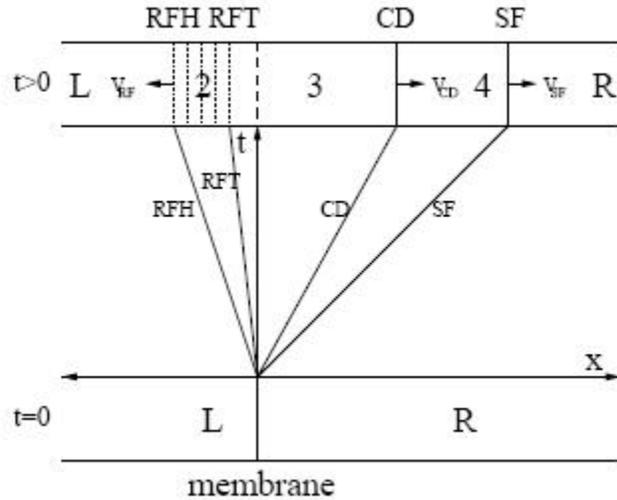


Figura 3.5.: Rappresentazione schematica del problema di Riemann. Il sistema, rappresentato nella striscia di sotto a $t = 0$, viene fatto evolvere, e sopra è mostrato a un certo tempo successivo. Notiamo che si formano varie zone: le zone L e R rimangono indisturbate; la zona 2 rappresenta un'onda di rarefazione, delimitata dai due fronti di testa (RFH, *Rarefaction Fan Head*) e coda (RFT, *Rarafaction Fan Tail*) dell'onda; la 3 è una regione riempita di gas da L; la 4 è una regione "shockata", delimitata dai due fronti CD (*Contact Discontinuity*, discontinuità di contatto) e SF (*Shock Front*, fronte di shock). (Tratto da [10])

- **Regione 4:** zona di fluido che ha subito lo shock, delimitata dalla discontinuità di contatto e dal fronte di shock. La velocità e la pressione delle regioni 3 e 4 sono le stesse ($v_3 = v_4 = v^*$, $P_3 = P_4 = P^*$), il che significa che non c'è flusso attraverso la CD, e quindi anche quest'ultima si muove a velocità v^* .

Definito il problema, si tratta di trovare la pressione e la velocità risultanti, P^* e v^* , usando le condizioni di Rankine-Hugoniot allo shock.

Esistono vari Riemann solvers numerici in letteratura (vedi [10], sezione 3.2.4 e referenze citate), tuttavia non ci interessa descriverli in dettaglio. Ci basterà vedere il principale, che sarà usato nel GPH, e un metodo alternativo, non iterativo.

Riemann solver iterativo

Questo Riemann solver è stato proposto da van Leer (1997, [45]), ed è più veloce di quello originariamente proposto da Godunov. I dettagli dei calcoli si possono trovare nella referenza citata.

Innanzitutto, la velocità di shock Lagrangiana è definita come:

$$W = \begin{cases} C \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P^*-P}{P} \right)^{1/2} & P^* \geq P \\ \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1-P^*/P}{1-(P^*/P)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (3.4)$$

dove $C = \sqrt{\gamma P \rho}$ è la *velocità Lagrangiana del suono*. I valori post-shock (cioè nella regione 4) sono indicati con un asterisco. Successivamente si calcola $Z \equiv \frac{dP^*}{dv^*}$, che risulta essere:

$$Z = \begin{cases} \frac{2W^2}{W^2+C^2} W & P^* \geq P \\ C \left(\frac{P^*}{P} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3.5)$$

P^* è poi trovato iterativamente mediante la relazione

$$P^{*(n+1)} = P^{*(n)} - \frac{Z_b^{(n)} Z_a^{(n)} (v_a^{*(n)} - v_b^{*(n)})}{Z_b^{(n)} + Z_a^{(n)}}, \quad (3.6)$$

in cui n è il numero dell'iterazione, ripetendo (3.6) finché lo scarto $|P^{*(n+1)} - P^{*(n)}|$ non è inferiore all'1.5%. Gli indici a e b denotano i due fluidi adiacenti, e ad ogni iterazione occorre aggiornare le velocità, secondo le equazioni:

$$v_a^{*(n)} = v_a + \frac{P^{*(n)} - P_a}{W_a}, \quad (3.7)$$

$$v_b^{*(n)} = v_b - \frac{P^{*(n)} - P_b}{W_b}. \quad (3.8)$$

Il valore iniziale per far partire l'iterazione è dato da

$$P^{*(1)} = \frac{C_a P_b + C_b P_a - C_a C_b (v_a - v_b)}{C_a + C_b}, \quad (3.9)$$

e la velocità finale, una volta ottenuta la convergenza dell'iterazione, può essere ricavata dalla relazione

$$v^* = \frac{Z_b v_b^* + Z_a v_a^*}{Z_b + Z_a}. \quad (3.10)$$

Per ridurre le oscillazioni numeriche, P^* è iterata solo se il valore iniziale differisce per più dell'1% da P_a e P_b ; inoltre, per evitare soluzioni negative non fisiche per la pressione, viene usata una "pressure protection", ovvero si pone $P_i^{*(n)} = \max \{ P_i^{*(n)}, P_{min} \}$ dove P_{min} è una costante fissata all'inizio della simulazione.

Riemann solver isoterma

Si tratta di un metodo alternativo proposto da Balsara (1994, [46]), non-iterativo (e più veloce di uno iterativo), che può essere usato per gas isoterma.

La velocità post-shock è data da

$$v^* = v_L - \frac{P^* - c_s^2 \rho_L}{\sqrt{P^* \rho_L}} \quad (3.11)$$

$$= v_R + \frac{P^* - c_s^2 \rho_R}{\sqrt{P^* \rho_R}}, \quad (3.12)$$

da cui eliminando v^* si trova un'equazione quadratica per $\sqrt{P^*}$, la cui soluzione positiva ci dà la pressione risultante, e usando (3.11) o (3.12) si ricava v^* .

Il metodo di Godunov ora consiste nel calcolare i flussi delle varie quantità fluidodinamiche rimpiazzando i termini di pressione e velocità con le risultanti di un Riemann solver applicato al problema di Riemann definito da due elementi di fluido adiacenti. Vediamo come questo viene implementato numericamente in un codice Lagrangiano in cui gli elementi di fluido sono descritti da particelle, come l'SPH.

3.2.3. Implementazione del GPH e confronto con l'SPH

Il termine GPH, che sta per “Godunov-type Particle Hydrodynamics”, descrive un metodo ibrido che combina l'SPH con un Riemann solver. In sostanza si considera il problema di Riemann definito dalle varie coppie di particelle, considerando che la dinamica di ognuna di esse è determinata dalla distribuzione di pressione delle circostanti, e mediante un Riemann solver iterativo si trovano P^* e v^* che vengono sostituiti nelle equazioni dell'SPH. Le equazioni del GPH, per le tre versioni dell'SPH che abbiamo considerato, sono pertanto le seguenti:

CASO 1 (cfr. (2.91), (2.92)) :

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j P^* \left(\frac{1}{\rho_i^2} + \frac{1}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h_{ij}) \quad (3.13)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j P^* \left(\frac{1}{\rho_i^2} + \frac{1}{\rho_j^2} \right) \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h_{ij}) \quad (3.14)$$

CASO 2 (cfr. (2.93), (2.94)):

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -2 \sum_j m_j \frac{P^*}{\rho_i \rho_j} \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h_{ij}) \quad (3.15)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m_j \frac{P^*}{\rho_i \rho_j} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h_{ij}) \quad (3.16)$$

CASO 3 (cfr. (2.106), (2.107)):

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j P^* \left[\frac{1}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) + \frac{1}{\rho_j^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} W(\mathbf{r}_{ij}, h_j) \right] \quad (3.17)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m_j P^* (\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{r}}_i^*) \cdot \left[\frac{1}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) + \frac{1}{\rho_j^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} W(\mathbf{r}_{ij}, h_j) \right] \quad (3.18)$$

In questa Tesi in particolare ci concentreremo sui casi 1 e 3 (chiamati nel seguito GPH1 e GPH3). Naturalmente, anche se la modifica a prima vista sembra banale, non bisogna dimenticare che va aggiunta la presenza implicita del Riemann solver, che calcola di volta in volta i flussi risultanti fra le coppie di particelle. Notiamo inoltre che la viscosità artificiale è scomparsa dalle equazioni, poichè il GPH non ne ha bisogno. Infatti il Riemann solver ha già implementate dentro di sè le condizioni di Rankine-Hugoniot, che assicurano un corretto trattamento degli shock.

Si può avere un'idea approssimata della differenza fra GPH ed SPH nel seguente modo [12]. Il GPH usa, per ogni coppia di particelle a, b , anzichè i valori P_a e P_b (a $t = t_0$), la quantità evoluta P^* (a $t = t_0 + \Delta t$). Se la variazione della pressione può essere considerata lineare (da \mathbf{r}_a a \mathbf{r}_b), P^* può essere espressa come la combinazione lineare $C_1 P_a + (1 - C_1) P_b$ ⁶. Poniamo ora $P_{a,b} = P_0 + \delta P_{a,b}$, $\rho_{a,b} = \rho_0 + \delta \rho_{a,b}$ e linearizziamo le equazioni del moto. Abbiamo allora per il GPH:

$$P^* \left(\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{\rho_b^2} \right) \simeq 2 \frac{P_0}{\rho_0^2} + 2C_1 \frac{\delta P_a}{\rho_0^2} + 2(1 - C_1) \frac{\delta P_b}{\rho_0^2} - 2 \frac{P_0}{\rho_0^3} (\delta \rho_a + \delta \rho_b), \quad (3.19)$$

mentre per l'SPH:

$$\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \simeq 2 \frac{P_0}{\rho_0^2} + \frac{\delta P_a + \delta P_b}{\rho_0^2} - 2 \frac{P_0}{\rho_0^3} (\delta \rho_a + \delta \rho_b). \quad (3.20)$$

Sottraendo le due ultime equazioni troviamo la differenza cercata:

$$\Delta_{GPH,SPH} = (2C_1 - 1) \frac{\delta P_a - \delta P_b}{\rho_0^2}. \quad (3.21)$$

Vediamo quindi che le equazioni del moto sono uguali nei due casi speciali in cui $C_1 = \frac{1}{2}$, cioè quando P^* è semplicemente la media aritmetica di P_a e P_b , oppure $P_a = P_b$. In tutti gli altri casi la dinamica è diversa nelle due formulazioni.

C'è un ultimo particolare molto importante. Dall'eq. (3.18) vediamo che nella formulazione 3 compare il termine $(\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{r}}_i^*)$. Si tratta di un termine di mixing intrinseco, dovuto al calcolo del Riemann-solver dei flussi fra le coppie di particelle. Tale termine è assente nelle versioni 1 e 2, e infatti vedremo dalle simulazioni dello shock tube che al GPH-1 manca il mixing necessario a smorzare i forti gradienti di entropia ed eliminare i problemi nel calcolo della pressione (vedi più avanti, da questo punto di vista esso si comporta come l'SPH), cosa non più vera per il GPH-3.

⁶ C_1 rappresenta la velocità del suono prima dello shock, ma ciò è irrilevante per il presente argomento, e può essere pensata semplicemente come una costante.

3.3. Il metodo di Inutsuka

Passiamo a descrivere brevemente un approccio interessante all'SPH, o meglio ad una sua versione alternativa, il cosiddetto metodo di Inutsuka. Esporremo di seguito gli aspetti salienti di tale approccio, mentre una descrizione dettagliata la si può trovare in [8, 9].

3.3.1. Descrizione generale del metodo

Abbiamo visto che il cuore del metodo SPH risiede nell'operare una convoluzione fra una funzione fisica $f(x)$ e un opportuno kernel integrale:

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) \equiv \int f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (3.22)$$

Tale convoluzione sarà poi calcolata nei punti \mathbf{x}_i che descrivono le posizioni delle N particelle quando si passa alle quantità discrete. Espandendo in serie di Taylor la f attorno a $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ troviamo

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i) + \frac{h_{eff}^2}{4} \nabla^2 f + \mathcal{O}(h_{eff}^4), \quad (3.23)$$

dove $h_{eff}^2 \equiv 2 \int x^2 W(\mathbf{x}, h) d\mathbf{x}$. Vediamo quindi che l'errore che si commette adottando le variabili interpolate è del second'ordine in h (cfr. anche [6], sezione 2.4). Inoltre, possiamo evidenziare un'altra approssimazione implicita nell'SPH notando che vale la relazione

$$\begin{aligned} f_i &\equiv \langle f \rangle(\mathbf{x}_i) = \int f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &= \int \sum_j m_j \frac{f(\mathbf{x}')}{\rho(\mathbf{x}')} W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i, h) W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_j, h) d\mathbf{x}' \\ &\equiv \sum_j \Delta f_{i,j}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

in cui si è usata la definizione

$$\rho(\mathbf{x}) \equiv \sum_j m_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h), \quad (3.25)$$

mentre nell'SPH si assume che $\Delta f_{i,j}$ abbia la seguente forma:

$$\Delta f_{i,j} \approx m_j \frac{f(\mathbf{x}_j)}{\rho(\mathbf{x}_j)} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h), \quad (3.26)$$

il che corrisponde a considerare $W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_j, h) \approx \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_j)$.

Tutte queste approssimazioni introducono degli errori nell'SPH, che si manifestano sotto forma di stime approssimate nelle quantità fluidodinamiche. Ma tali errori sono anche legati ad un'altra importante approssimazione che si dà normalmente per scontata nell'approccio standard. Per trovare le equazioni del moto, infatti, si fanno evolvere le quantità interpolate, invece che quelle

originarie, in tal modo propagando l'errore descritto dall'eq. (3.23), che inevitabilmente si commette approssimandole. L'approccio usato da Inutsuka [8, 9] consiste nell'aggirare questa difficoltà, facendo prima evolvere le quantità esatte, e *poi* interpolando il tutto con il kernel integrale. In pratica, se ho una serie di equazioni (fluidodinamiche) del tipo⁷

$$E [f(\mathbf{x}), \nabla f(\mathbf{x}), \dots] = 0, \quad (3.27)$$

nell'SPH standard le approssimo così:

$$E [\langle f \rangle(\mathbf{x}), \langle \nabla f \rangle(\mathbf{x}), \dots] = 0, \quad (3.28)$$

con $\langle f \rangle$ interpolata come in (3.22), mentre la procedura esatta dovrebbe essere la seguente:

$$\int E [f(\mathbf{x}), \nabla f(\mathbf{x}), \dots] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.29)$$

Applicando ora quest'idea alle equazioni del moto fluidodinamiche, e cioè all'equazione per la velocità

$$\int \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x})}{dt} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x} = - \int \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla P(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x} \quad (3.30)$$

e per l'energia

$$\int \frac{du(\mathbf{x})}{dt} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x} = - \int \frac{P(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} [\nabla \cdot \mathbf{v}] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}, \quad (3.31)$$

dopo alcune integrazioni per parti [8], siamo in grado di trovare le nuove equazioni per le quantità mediate:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = - \sum_j m_j \int \frac{P(\mathbf{x})}{\rho^2(\mathbf{x})} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \right] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) d\mathbf{x}, \quad (3.32)$$

$$\dot{u}_i = \sum_j m_j \int \frac{P(\mathbf{x})}{\rho^2(\mathbf{x})} [\mathbf{v} - \mathbf{x}_i] \cdot \{ \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) - W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \} d\mathbf{x}. \quad (3.33)$$

Queste equazioni, assieme alla (3.25), rappresentano di fatto una nuova versione dell'SPH, che chiameremo (seguendo [12]) versione 4, o SPH-4. E' possibile mostrare che anche per questa formulazione valgono le consuete conservazioni di energia e momento come per le precedenti⁸.

Per implementare l'SPH-4, però, abbiamo bisogno di un'approssimazione che ci permetta di calcolare l'integrale presente nelle eq. (3.32)-(3.33). Nel lavoro di Inutsuka egli considera due interpolazioni, una lineare e l'altra cubica che, *a patto che il kernel sia gaussiano*, permettono di ottenere una forma numericamente implementabile delle equazioni. Le riportiamo qui brevemente, rimandando agli articoli citati per le varie derivazioni.

⁷Ad es., $E [f(\mathbf{x}), \nabla f(\mathbf{x}), \dots] = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla P$, ecc...

⁸Pur con alcune varianti ad es. nelle approssimazioni richieste, o nel fatto che ancora non c'è una versione entropy-conserving, nel senso del paragrafo 2.5.7, per l'SPH-4

Interpolazione lineare

Si tratta di interpolare linearmente il volume specifico (e il suo gradiente), definito come

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}, \quad (3.34)$$

negli integrali delle eq. (3.32)-(3.33), fra le varie coppie di particelle i e j ; gli estremi dell'interpolazione saranno pertanto i valori, in questo caso del volume specifico, calcolati alle posizioni \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_j . Senza riportare qui i conti, si può dimostrare [8, 9] che, se si utilizza un kernel della forma

$$W(\mathbf{x}, h) = \left[\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \right]^3 e^{-\mathbf{x}^2/h^2}, \quad (3.35)$$

si trova il seguente risultato⁹:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = - \sum_j m_j P^* \left[V_{ij}^2(h_i) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \sqrt{2}h_i) + V_{ij}^2(h_j) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \sqrt{2}h_j) \right], \quad (3.36)$$

$$\dot{u}_i = - \sum_j m_j ([P\mathbf{v}]^* - P^* \dot{\mathbf{x}}_i) \left[V_{ij}^2(h_i) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \sqrt{2}h_i) + V_{ij}^2(h_j) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \sqrt{2}h_j) \right], \quad (3.37)$$

in cui:

$$\begin{aligned} V_{ij}^2(h) &= \frac{1}{4} h^2 C_{ij}^2 + D_{ij}^2, \\ C_{ij} &= \frac{V(\mathbf{x}_i) - V(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_{ij}|}, \\ D_{ij} &= \frac{V(\mathbf{x}_i) + V(\mathbf{x}_j)}{2}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

e la scrittura $[P\mathbf{v}]^*$, P^* significa che le quantità vanno calcolate nel punto intermedio $x^* = \frac{h^2 C_{ij} D_{ij}}{4V_{ij}^2}$. Questo punto diverrà in seguito la posizione (virtuale) dell'interfaccia attraverso cui il Riemann solver calcola i flussi, e le quantità con l'asterisco diventeranno le risultanti del Riemann solver.

Interpolazione cubica

Anche qui usiamo un'interpolazione fra le coppie di particelle i e j come prima, solo che ora approssimiamo il volume specifico con un polinomio di terzo grado. Ripetendo gli stessi passaggi,

⁹Riportiamo qui direttamente il risultato per smoothing length h variabile, in quanto nel seguito è questa che ci interesserà, dato che GADGET richiede h variabile.

il risultato è che nelle eq. (3.36) e (3.37) dobbiamo fare le seguenti modifiche:

$$\begin{aligned}
V_{ij}^2(h) &= \frac{15}{64}h^6 A_{ij}^2 + \frac{3}{16}h^4 (2A_{ij}C_{ij} + B_{ij}^2) + \frac{1}{4}h^2 (2B_{ij}D_{ij} + C_{ij}^2) + D_{ij}^2, \\
A_{ij} &= -2 \frac{V(\mathbf{x}_i) - V(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_{ij}|^3} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_{ij} \cdot \nabla [V(\mathbf{x}_i) + V(\mathbf{x}_j)]}{|\mathbf{x}_{ij}|^2}, \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{\hat{\mathbf{x}}_{ij} \cdot \nabla [V(\mathbf{x}_i) - V(\mathbf{x}_j)]}{|\mathbf{x}_{ij}|}, \\
C_{ij} &= \frac{3}{2} \frac{V(\mathbf{x}_i) - V(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_{ij}|} - \frac{1}{4} \hat{\mathbf{x}}_{ij} \cdot \nabla [V(\mathbf{x}_i) + V(\mathbf{x}_j)], \\
D_{ij} &= \frac{1}{2} [V(\mathbf{x}_i) + V(\mathbf{x}_j)] - \frac{1}{8} \hat{\mathbf{x}}_{ij} \cdot \nabla [V(\mathbf{x}_i) - V(\mathbf{x}_j)] |\mathbf{x}_{ij}|,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

e anche x^* cambia¹⁰.

A questo punto interpretiamo i termini $[P\mathbf{v}]^*$, P^* nelle eq. (3.36) e (3.37) come le risultanti di un Riemann solver fra le coppie di particelle, esattamente come fatto nella sezione 3.2. Questo ci permette di ottenere una quarta versione del GPH, o GPH-4, rappresentata formalmente da queste stesse due equazioni.

3.3.2. Problemi

A dispetto del suo promettente esordio, il metodo di Inutsuka ha rivelato seri problemi pratici ad un esame più approfondito. Innanzi tutto non si è rivelata fattibile una sua generalizzazione a kernel spline, nemmeno nel caso unidimensionale, per via del fatto che le interpolazioni usate richiedono conti che si basano sulle proprietà del kernel gaussiano, e che divengono rapidamente e altamente non banali se si passa ad uno spline¹¹. Il passaggio a kernel spline non è puramente un fatto di comodo. Oltre ad essere quest'ultimo a supporto compatto e meglio gestibile numericamente, i primi test fatti mostrano che il kernel gaussiano sembra avere la tendenza ad amplificare il rumore poissoniano dovuto alle fluttuazioni casuali nei valori iniziali delle quantità fluidodinamiche.

Un'implementazione in GADGET del GPH-4, fatta passando a kernel gaussiano (scelta obbligata, per quanto detto) ha rivelato, nei test che descriveremo nel prossimo capitolo, ulteriori effetti numerici inaspettati. Non riportiamo i risultati di queste simulazioni, perchè necessitano di ulteriori verifiche e approfondimenti, e al momento si hanno solo ipotesi (ancora da confermare) riguardo all'origine dei problemi numerici riscontrati. Diremo solo che, se tali effetti dovessero alla fine rivelarsi quali problemi intrinseci ed ineliminabili del GPH-4, tale metodo non risulterebbe applicabile in pratica, nonostante le sue ottime premesse teoriche.

L'ipotesi che sembra più ragionevole è che vi siano due tipi di errori numerici nel GPH-4, uno derivante dall'uso del kernel gaussiano e dall'amplificazione accennata pocanzi, e l'altro intrinseco

¹⁰Non ci importa la forma precisa di x^* , dato che poi il suo valore sarà comunque sostituito da quello calcolato (implicitamente) dal Riemann solver.

¹¹La difficoltà maggiore è data dal fatto che gli spline sono definiti "a tratti", e ciò introduce dei domini di integrazione la cui forma è difficilmente esprimibile per via analitica. Tentativi di aggirare questa difficoltà con altri metodi, o con interpolazioni d'altro tipo, purtroppo non hanno portato a risultati significativi.

del metodo. Per quanto riguarda questo secondo tipo di problema numerico, l'ipotesi (non ancora confermata tuttavia) è che possa dipendere dal fatto che le equazioni del moto evolvono mediante un kernel che è diverso da quello con cui viene calcolata la densità¹². Per verificare a fondo tale ipotesi, abbiamo provato ad implementare una versione “ibrida” del GPH-4, ovvero una modifica delle eq. (3.36)-(3.37) che faccia evolvere velocità ed energia con *lo stesso* kernel con cui viene calcolata la densità in (3.25): in pratica si tratta solamente di eliminare il fattore $\sqrt{2}$ nella definizione della lunghezza di smoothing nelle eq. (3.36)-(3.37). Le “nuove” equazioni diventano quindi:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = - \sum_j m_j P^* \left[V_{ij}^2(h_i) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i) + V_{ij}^2(h_j) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_j) \right], \quad (3.40)$$

$$\dot{u}_i = - \sum_j m_j ([P\mathbf{v}]^* - P^* \dot{\mathbf{x}}_i) \left[V_{ij}^2(h_i) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i) + V_{ij}^2(h_j) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_j) \right]. \quad (3.41)$$

Questo è quello che nel seguito verrà indicato come GPH-4 modificato (GPH-4-mod). Le simulazioni eseguite sembrano confermare l'ipotesi: il GPH-4 modificato riproduce i risultati del GPH-3 con kernel spline e gaussiano, ma aumenta le fluttuazioni (in densità) esattamente come il GPH con kernel gaussiano. Nel prossimo capitolo tuttavia riporteremo i risultati delle simulazioni con GPH-4-mod solo nel caso del test di Sod, in quanto gli altri casi sono ancora in fase di studio ed approfondimento.

Nel seguito ci riferiremo sempre all'interpolazione lineare del GPH-4-mod, per comodità, dato che quella cubica dà essenzialmente gli stessi risultati.

¹²Confrontando (3.25) con (3.32)-(3.33) vediamo che la smoothing length cambia per un $\sqrt{2}$. Questo significa che in un caso la gaussiana ha una forma più *piatta* rispetto all'altro, e l'effetto dovuto al “taglio delle code” potrebbe portare a errori numerici. Non ci addentriamo tuttavia nei dettagli della questione, essendo necessari altri test di verifica.

4. Risultati

In questo Capitolo presentiamo i risultati di tre test condotti allo scopo di confrontare il metodo GPH con l'SPH. I primi due test sono abbastanza standard, e sono già stati applicati all'SPH, tuttavia riesaminandoli alla luce dei risultati ottenuti implementando il metodo di Godunov, essi presenteranno molti aspetti interessanti (e problematici). Il terzo test si basa invece sul lavoro di Agertz *et al* [14], e ci mostrerà come il GPH si rapporti ai codici Lagrangiani ed Euleriani, nel riprodurre fenomeni abbastanza complessi, come le instabilità idrodinamiche.

Tutte le simulazioni sono state eseguite sulla Server Farm del CINECA, che ospita supercomputer con svariati processori appositamente disegnati per calcoli paralleli, utilizzando il tempo di calcolo assegnato nell'ambito della convenzione tra l'Università di Trieste e il CINECA.

4.1. Test di Sod (Shock Tube)

4.1.1. Descrizione del test

Un Sod tube, anche detto “shock tube”, uno dei test ormai standard per gli schemi idrodinamici [22], è una particolare realizzazione di un problema di Riemann. Di per sé uno shock tube è un dispositivo già noto a livello ingegneristico, ed utilizzato principalmente per studiare reazioni di combustione di fase nei gas, o flussi aerodinamici entro particolari intervalli di pressione e temperatura. In quel caso, l'apparato è costituito essenzialmente da un tubo lungo e stretto, riempito per due metà da due fluidi con condizioni iniziali diverse. Nel caso del test di Sod, che è una realizzazione numerica di questo dispositivo, modelleremo lo Shock Tube considerando un volume avente una delle tre dimensioni lineari molto maggiore (idealmente infinita) delle altre due, abbastanza da poter considerare il sistema quasi unidimensionale.

Convenzionalmente, il fluido di sinistra ha pressione e densità più alte di quello di destra, e inizialmente i due fluidi non interagiscono, come se ci fosse una membrana immaginaria a separarli. In Figura 4.1 è illustrata la configurazione del sistema.

Al tempo $t = 0$ il sistema viene “acceso”, e le due parti messe in interazione, e se ne studia l'evoluzione. Le condizioni iniziali sono scelte in modo da avere formazione di shock (da qui il

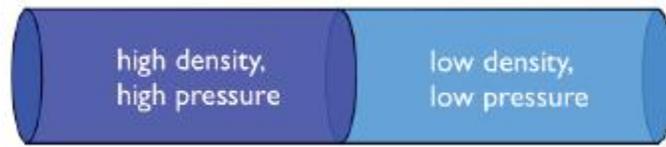


Figura 4.1.: Illustrazione schematica dello shock tube (tratta da Rosswog [7]).

nome shock tube). Per quanto riguarda l'evoluzione del sistema, il discorso qualitativo è identico a quello già descritto nel paragrafo 3.2.2, e perciò non ne ripeteremo i dettagli. Riassumiamo solamente i punti salienti.

Lasciando evolvere il sistema, il fluido a sinistra, avendo pressione e densità maggiori, comprime quello a destra e questo porta alla formazione di varie zone:

- Le zone laterali abbastanza lontane dall'interfaccia fra i due fluidi rimangono pressoché indisturbate.
- Si forma un'onda di rarefazione che si muove verso sinistra.
- Si forma una regione (del fluido di destra) sottoposta a shock, che si propaga verso destra, delimitata dalla discontinuità di contatto (che separa i due fluidi) e dal fronte di shock.

La soluzione esatta è nota nel caso unidimensionale. In Figura 4.2 [7] sono riportati gli andamenti delle quattro quantità principali studiate nel seguito, cioè densità, pressione, velocità ed energia interna specifica.

Si vedono le varie zone descritte in precedenza; inoltre, si può notare che in corrispondenza dello shock tutte le quantità sono discontinue, mentre in corrispondenza della discontinuità di contatto lo sono solo la densità e l'energia interna. E' in questo punto che i gradienti in densità ed energia termica (entropia) comportano alcuni problemi numerici. Infatti abbiamo visto che l'SPH ha problemi nel trattare le discontinuità che si manifestano agli shock, e per farlo necessita di una viscosità artificiale; ma alla discontinuità di contatto non viene acceso alcun termine artificiale che smorzi i forti gradienti presenti, e quindi l'SPH presenterà problemi in quel punto.

A questo proposito, se ripetessimo la simulazione *senza* alcuna viscosità artificiale, vedremmo grosse oscillazioni numeriche ("wiggles") nella velocità post-shock, segno dei problemi dovuti alla discontinuità (vedi Figura 4.3). Come vedremo, anche con la viscosità artificiale in funzione in realtà si hanno delle leggere oscillazioni residue nell'andamento della pressione.

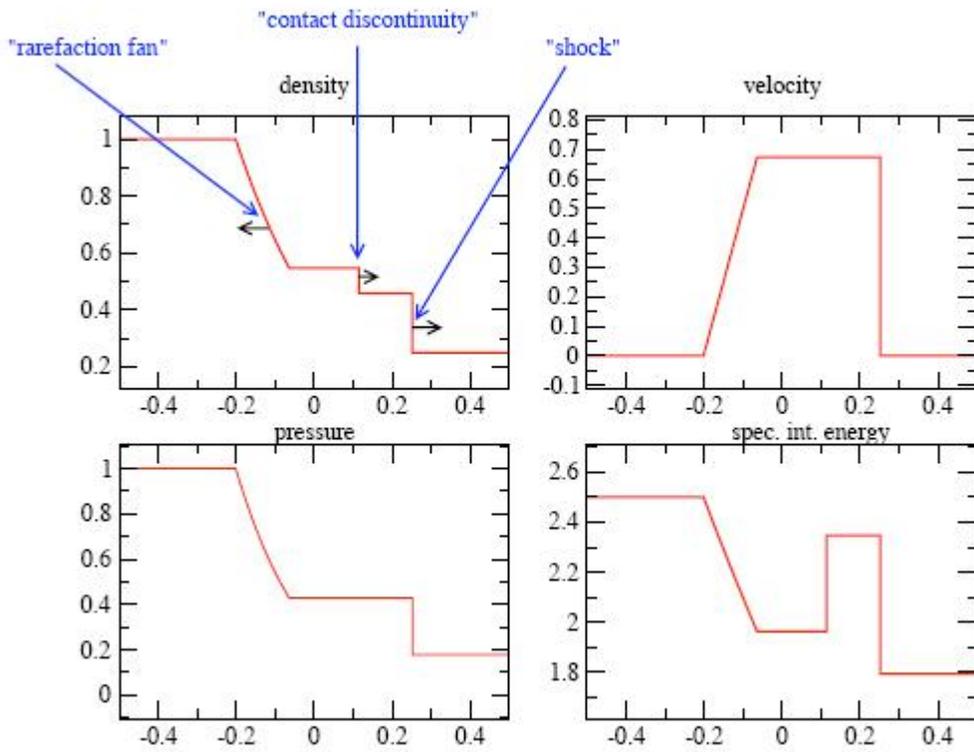


Figura 4.2.: Shock tube: soluzione analitica (caso 1D) per le quattro componenti principali: densità, pressione, velocità ed energia interna specifica. Si possono vedere nel grafico della densità le varie regioni descritte nel paragrafo 3.2.2. (Tratto da [7])

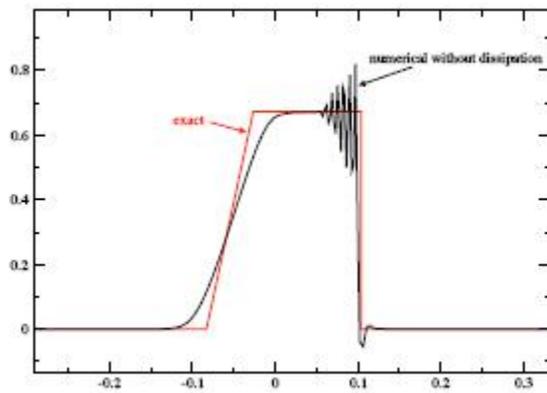


Figura 4.3.: Andamento della velocità per un Sod tube 1D: sono mostrate la soluzione esatta e una numerica SPH senza viscosità artificiale. (Tratto da [7])

4.1.2. Risultati

Riportiamo di seguito i risultati principali del Test di Sod. Tutte le simulazioni sono state fatte in 3 dimensioni con 2.5×10^5 particelle¹ e, dove non diversamente specificato, sono stati usati 100 primi vicini per il calcolo delle quantità mediate SPH o GPH, e il kernel utilizzato è stato uno spline cubico (vedi eq. (2.86)). Le equazioni del problema garantiscono automaticamente che esso è adimensionale, perciò nel seguito non sarà necessario riportare delle unità di misura specifiche, e tutte le quantità verranno espresse in unità arbitrarie.

Il fluido è stato simulato entro un parallelepipedo i cui lati misurano, in unità arbitrarie, 1, 1 e 60, rispettivamente lungo y , z e x ; le condizioni iniziali utilizzate sono state (con riferimento alla Figura 4.1): $\rho = 1$, $P = 1$ nella regione di sinistra e $\rho \simeq 0.251$, $P \simeq 0.18$ nella regione di destra. Le particelle sono state inizialmente preparate in una condizione di tipo “glass”: essa è ottenuta disponendo le particelle su una griglia e facendo “antievolvere” il sistema, ovvero invertendo il segno delle forze gravitazionali e facendolo evolvere. In questo modo si ha un rilassamento del sistema, e le particelle raggiungono una condizione stazionaria in cui sono distribuite in maniera uniforme (ed omogenea) ma irregolare (distribuzione amorfa, come in un sistema vetroso, motivo per cui il nome di queste condizioni iniziali è “glass-like”).

Il valore dell’indice adiabatico usato nel test di Sod è $\gamma = 1.4$. Le simulazioni sono state fatte con condizioni al contorno periodiche, pertanto riportiamo nei grafici solo la zona centrale, dato che questa scelta forza le zone vicine ai bordi ad avere un comportamento non fisico. I risultati sono presi dall’ultima “snapshot” della simulazione, a $t = 5$.

Per quanto riguarda i dettagli delle simulazioni, in tutte è stato usato GADGET-3, e i quattro codici richiamati nel seguito sono i seguenti: con SPH intendiamo l’SPH standard, versione entropy-conserving, implementato in GADGET, con GPH-1 e GPH-3 intendiamo l’implementazione in GADGET delle equazioni (con anche il relativo Riemann solver) del GPH-1, eq. (3.13)-(3.14), e del GPH-3, eq. (3.17)-(3.18)²; infine, con GPH-4-mod intendiamo l’implementazione in GADGET delle eq. (3.40)-(3.41), con kernel gaussiano (una versione con kernel spline ancora non esiste, per i motivi accennati in sezione 3.3.2).

Sono state eseguite delle simulazioni dello shock tube con SPH, GPH-1, GPH-3, tutte con kernel spline e sia con 32 che con 100 vicini per le medie SPH; per il GPH-3 sono anche state fatte due simulazioni aggiuntive con 20 e 1000 vicini, kernel spline, e altre due simulazioni con kernel gaussiano, con 100 e 1000 vicini. Infine, lo shock tube è stato simulato anche con il GPH-4-mod (kernel gaussiano naturalmente), con 100 vicini, ed è stata fatta anche una simulazione con GPH-3 con vincoli lagrangiani, kernel spline e 100 vicini. Un riassunto complessivo dei parametri e delle specifiche delle simulazioni è presentato nella Tabella 4.1.

¹Si tratta di una risoluzione non molto alta, ma per questo test è più che sufficiente per ottenere dei risultati significativi.

²Non abbiamo considerato in alcun caso la versione 2, eq. (2.93)-(2.94) e (3.15)-(3.16), essendo del tutto analoga alla 1, dato anche che poi ci focalizzeremo principalmente sul GPH-3.

nome run	schema idrodinamico	numero vicini	kernel usato	moltiplicatori lagrangiani
<i>SPH_32_spline</i>	SPH	32	spline cubico	no
<i>SPH_100_spline</i>	SPH	100	spline cubico	no
<i>GPH-1_32_spline</i>	GPH-1	32	spline cubico	no
<i>GPH-1_100_spline</i>	GPH-1	100	spline cubico	no
<i>GPH-3_20_spline</i>	GPH-3	20	spline cubico	no
<i>GPH-3_32_spline</i>	GPH-3	32	spline cubico	no
<i>GPH-3_100_spline</i>	GPH-3	100	spline cubico	no
<i>GPH-3_1000_spline</i>	GPH-3	1000	spline cubico	no
<i>GPH-3_100_spline_lc</i>	GPH-3	100	spline cubico	si
<i>GPH-3_100_gauss</i>	GPH-3	100	gaussiano	no
<i>GPH-3_1000_gauss</i>	GPH-3	1000	gaussiano	no
<i>GPH-4-mod_100</i>	GPH-4-mod	100	gaussiano	no

Tabella 4.2.: Riassunto dei parametri delle simulazioni effettuate

Nelle pagine seguenti sono riportati i grafici degli andamenti più rilevanti estratti dai risultati delle simulazioni.

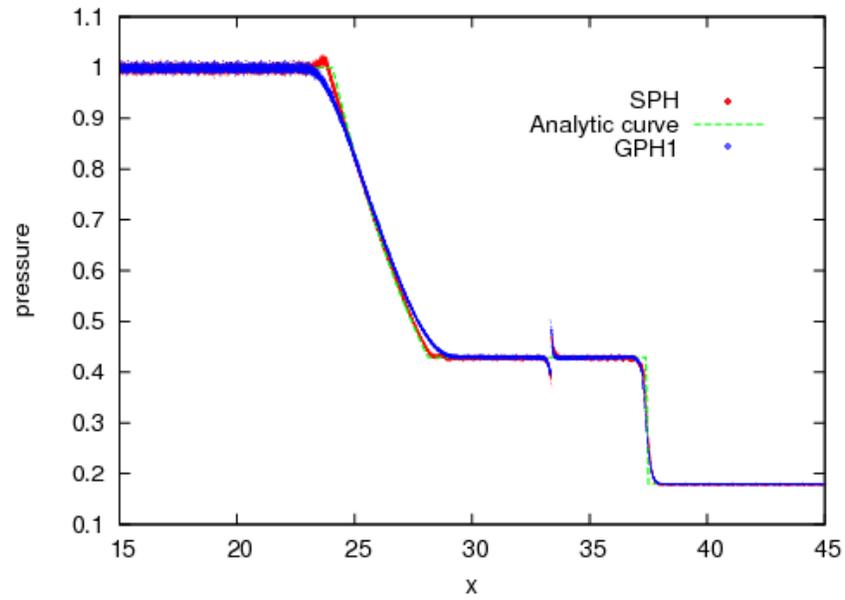
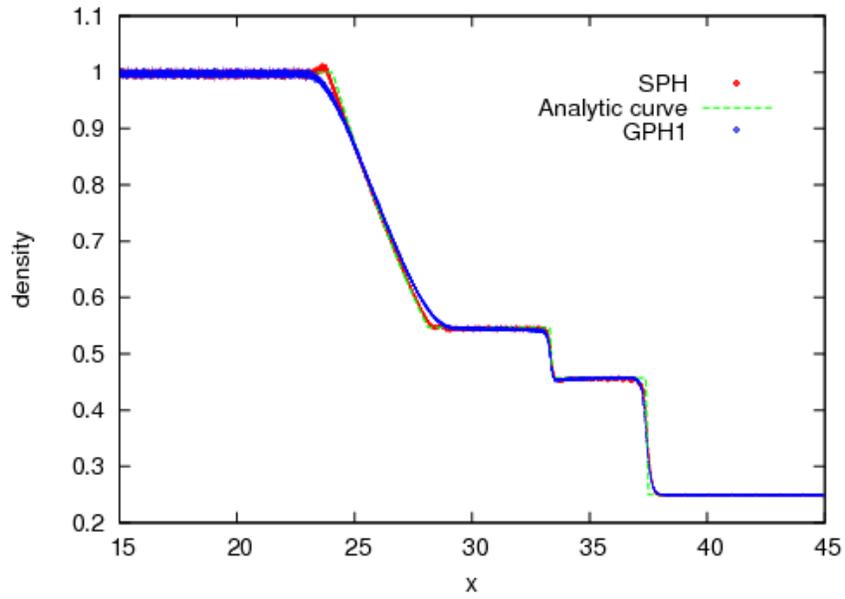


Figura 4.4.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ di densità e pressione vs coordinata x per *SPH_100_spline* (curva rossa) vs *GPH-1_100_spline* (curva blu). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

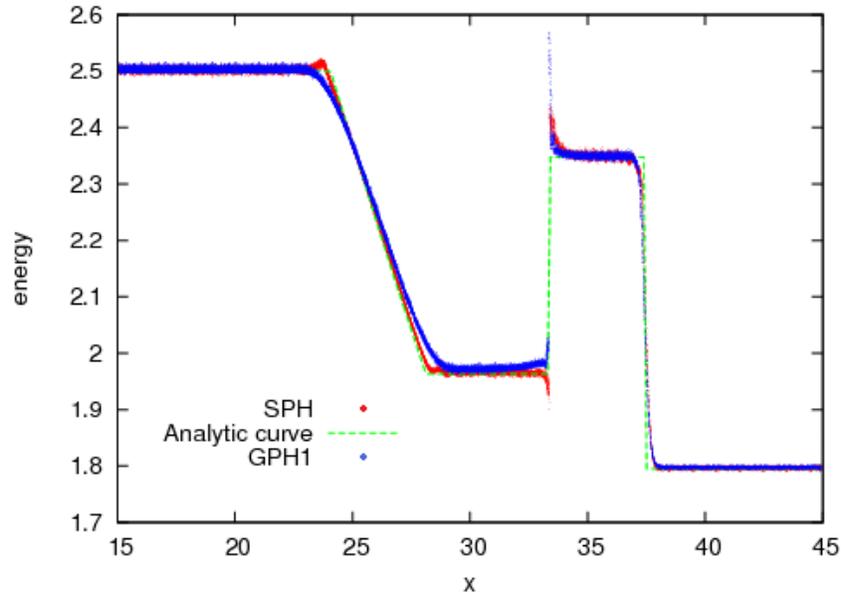
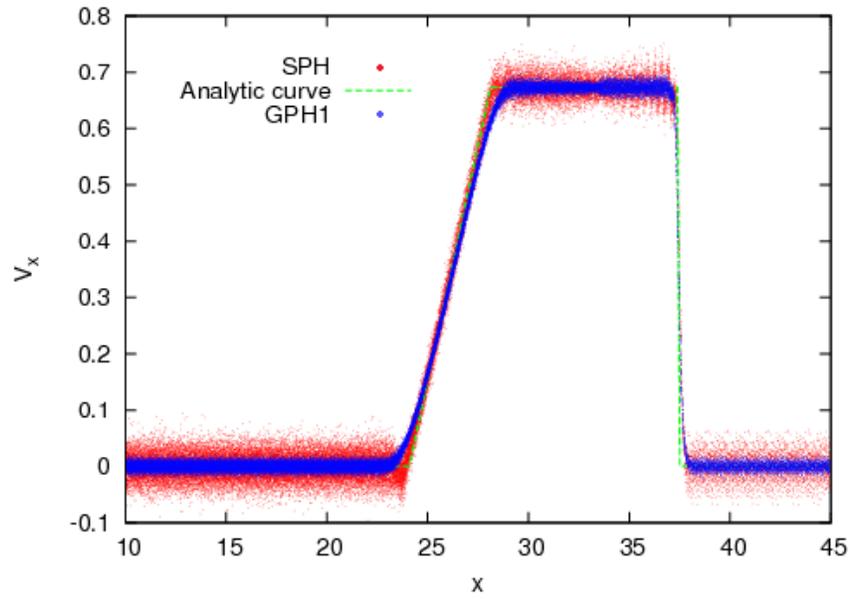


Figura 4.5.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ della componente lungo x della velocità e dell'energia vs coordinata x per *SPH_100_spline* (curva rossa) vs *GPH-1_100_spline* (curva blu). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

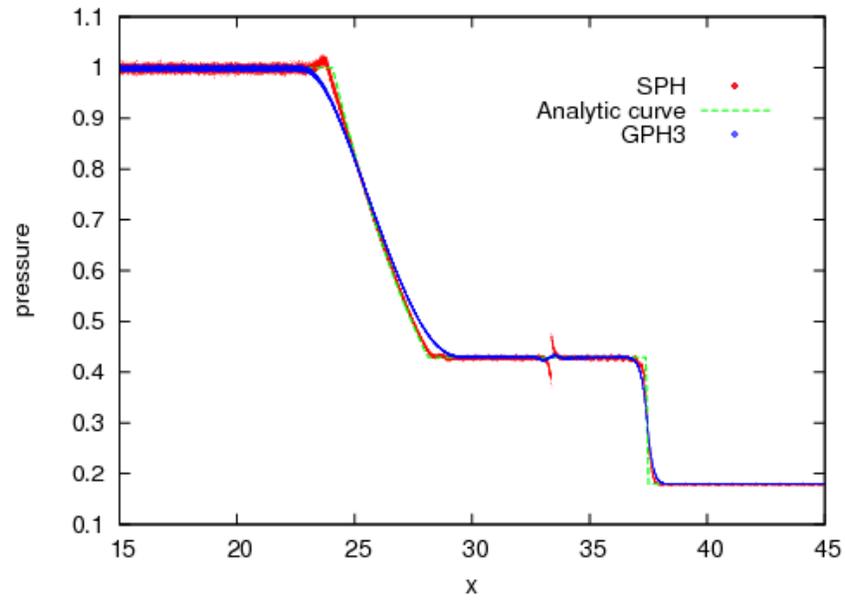
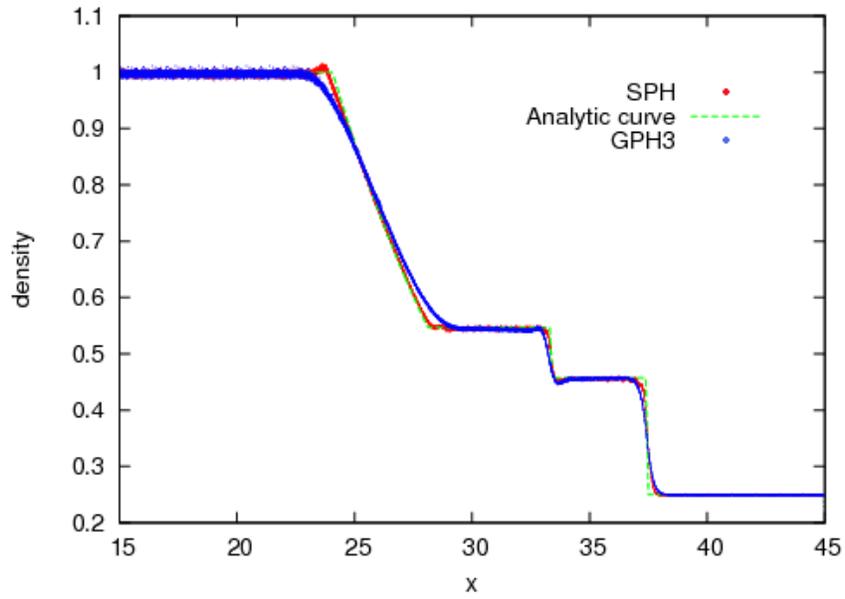


Figura 4.6.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ di densità e pressione vs coordinata x per *SPH_100_spline* (curva rossa) vs *GPH-3_100_spline* (curva blu). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

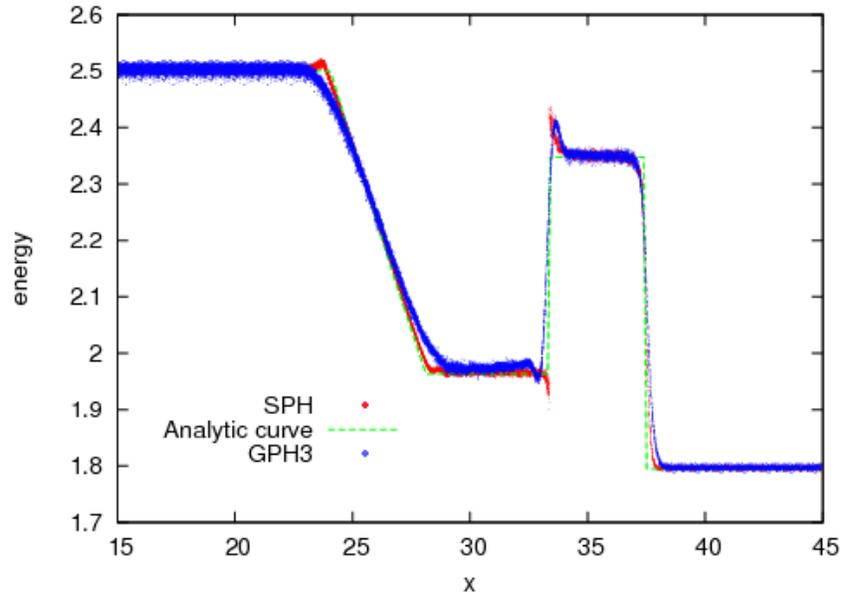
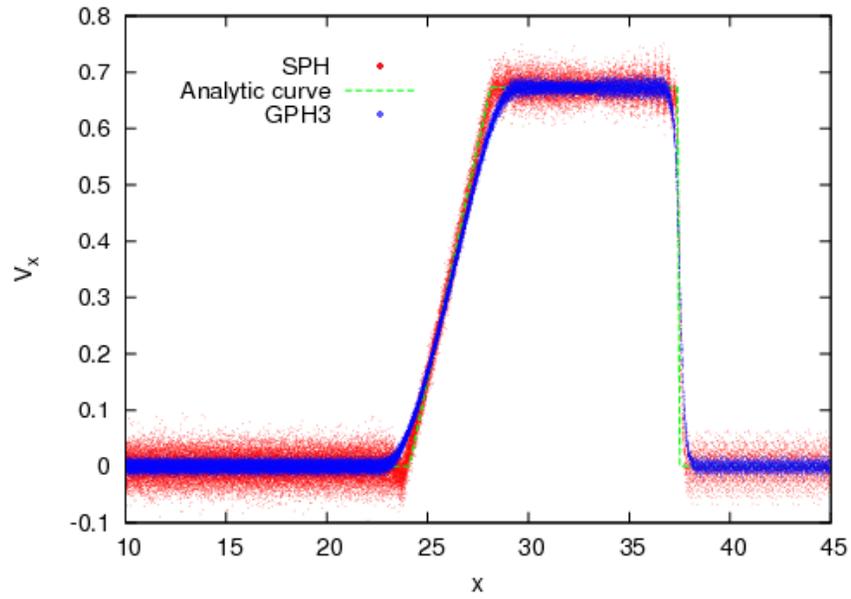


Figura 4.7.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ della componente lungo x della velocità e dell'energia vs coordinata x per *SPH_100_spline* (curva rossa) vs *GPH-3_100_spline* (curva blu). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

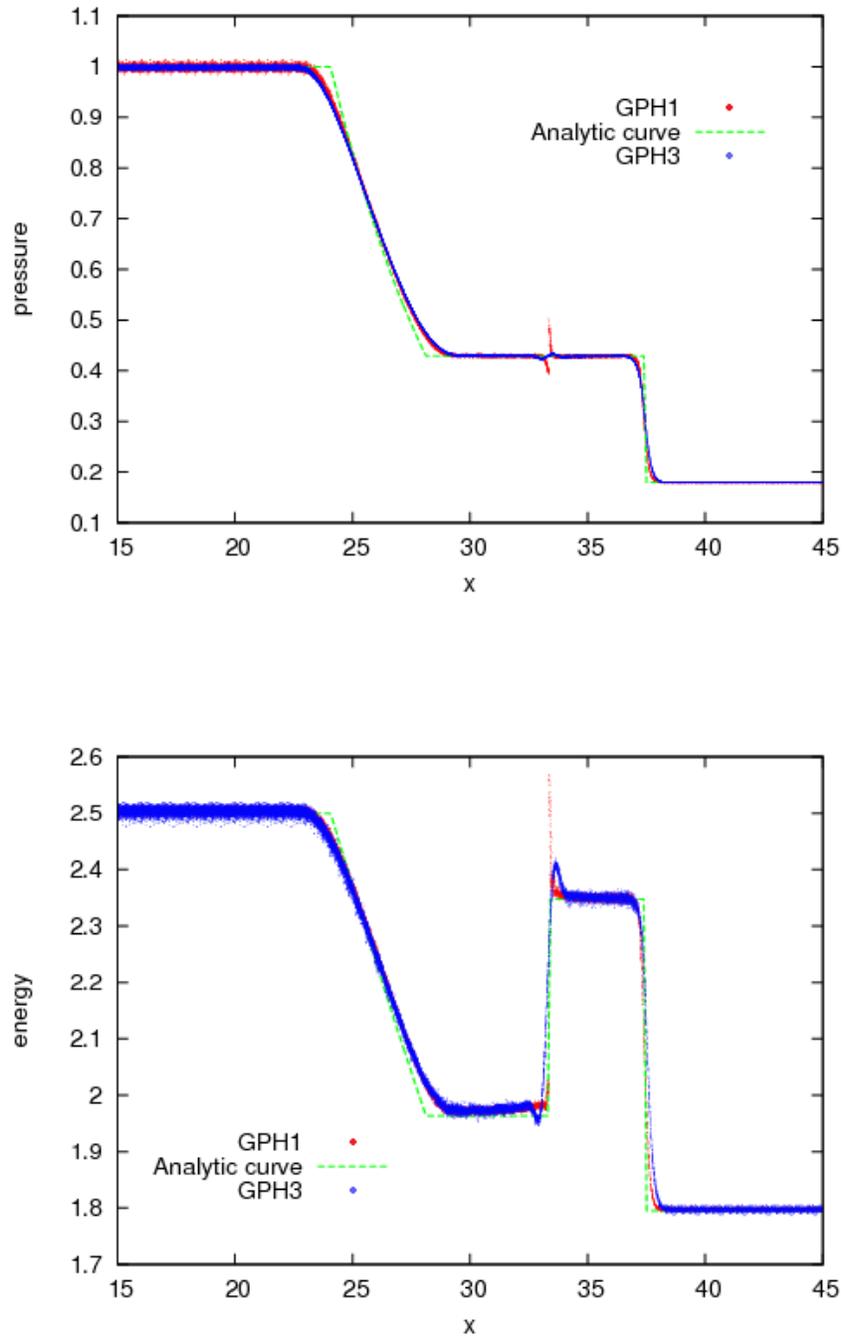


Figura 4.8.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ di pressione ed energia vs coordinata x per *GPH-1_100_spline* (curva rossa) vs *GPH-3_100_spline* (curva blu). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

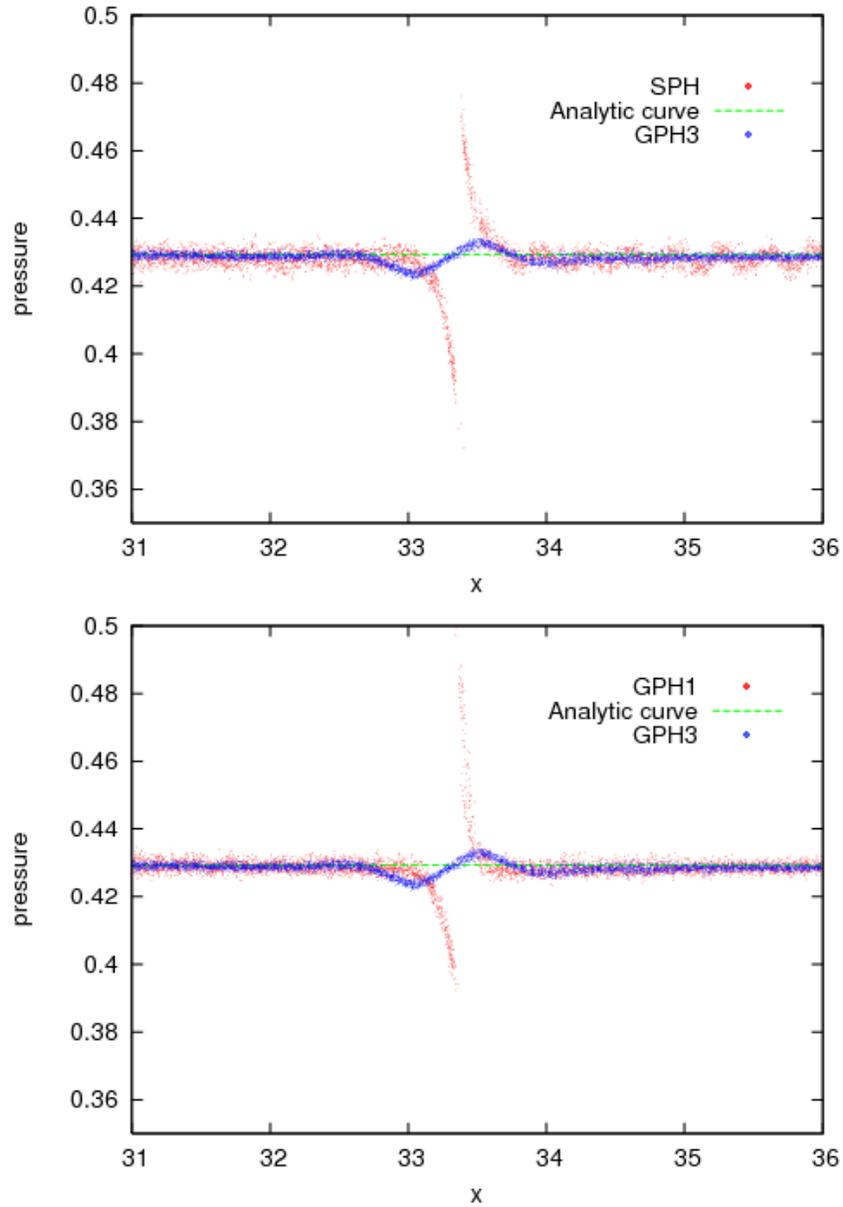


Figura 4.9.: Sod (Shock) Tube: zoom a $t = 5$ delle curve di pressione per *SPH_100_spline* (rosso) vs *GPH-3_100_spline* (blu) (Fig. 4.6) e *GPH-1_100_spline* (rosso) vs *GPH-3_100_spline* (blu) (Fig. 4.8). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

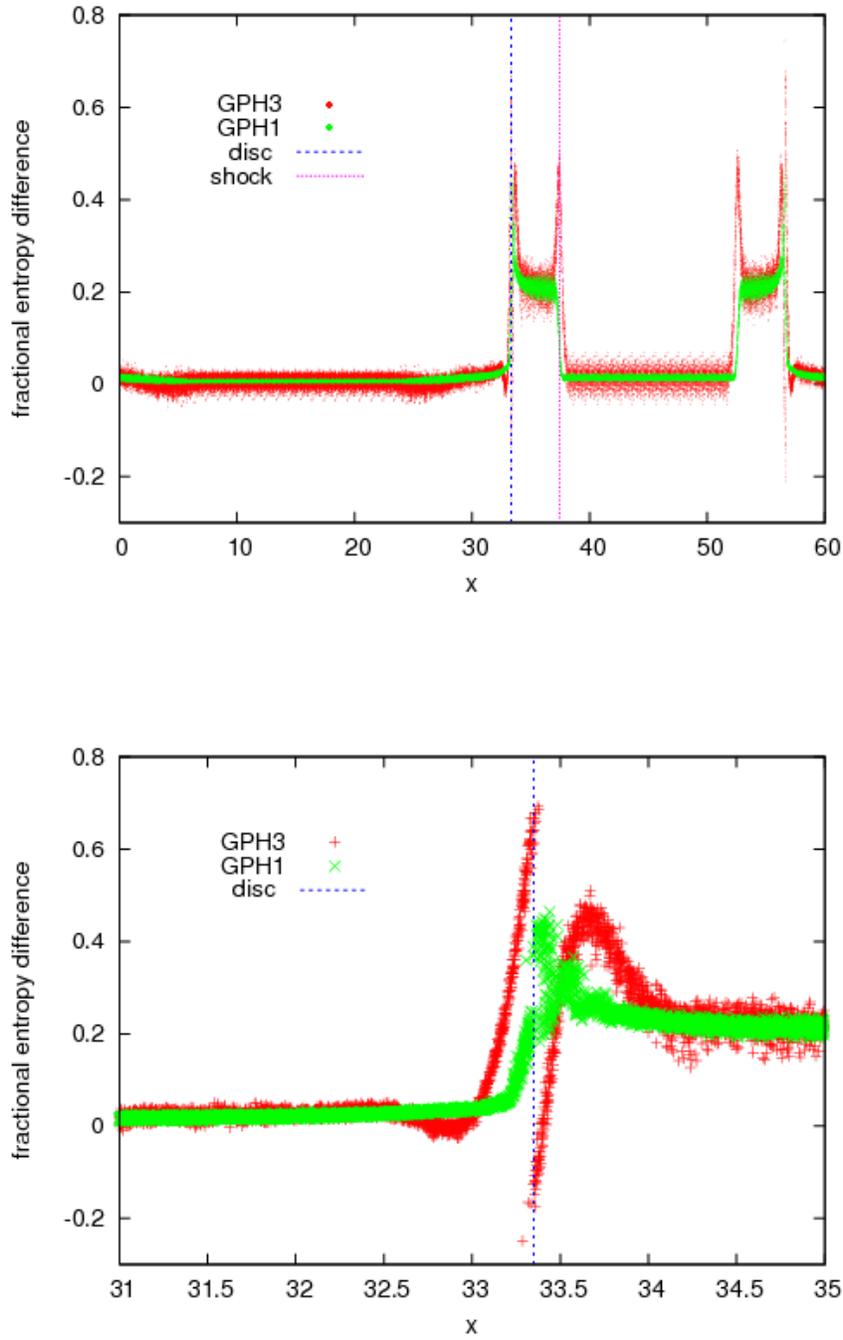


Figura 4.10.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ della differenza frazionaria di entropia ($\frac{\Delta S}{S}$, differenza fra l'entropia delle particelle all'istante iniziale e al tempo considerato) vs coordinata x per *GPH-1_100_spline* (verde) vs *GPH-3_100_spline* (rosso). La linea tratteggiata blu indica la posizione della discontinuità di contatto, mentre quella magenta la posizione dello shock. Il secondo grafico è uno zoom del primo attorno alla discontinuità di contatto.

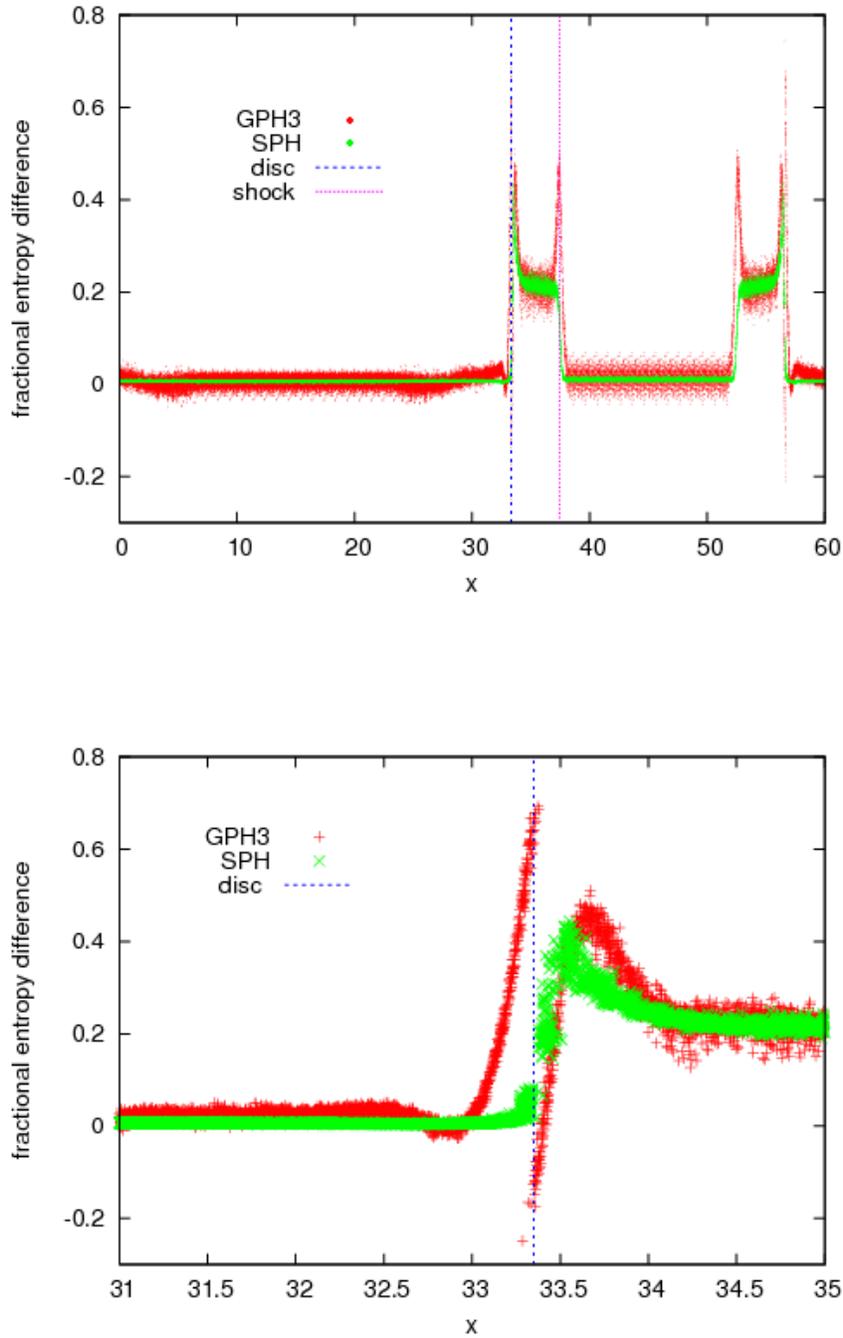


Figura 4.11.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ della differenza frazionaria di entropia ($\frac{\Delta S}{S}$, differenza fra l'entropia delle particelle all'istante iniziale e al tempo considerato) vs coordinata x per *GPH-3_100_spline* (rosso) vs *SPH_100_spline* (verde). La linea tratteggiata blu indica la posizione della discontinuità di contatto, mentre quella magenta la posizione dello shock. Il secondo grafico è uno zoom del primo attorno alla discontinuità di contatto.

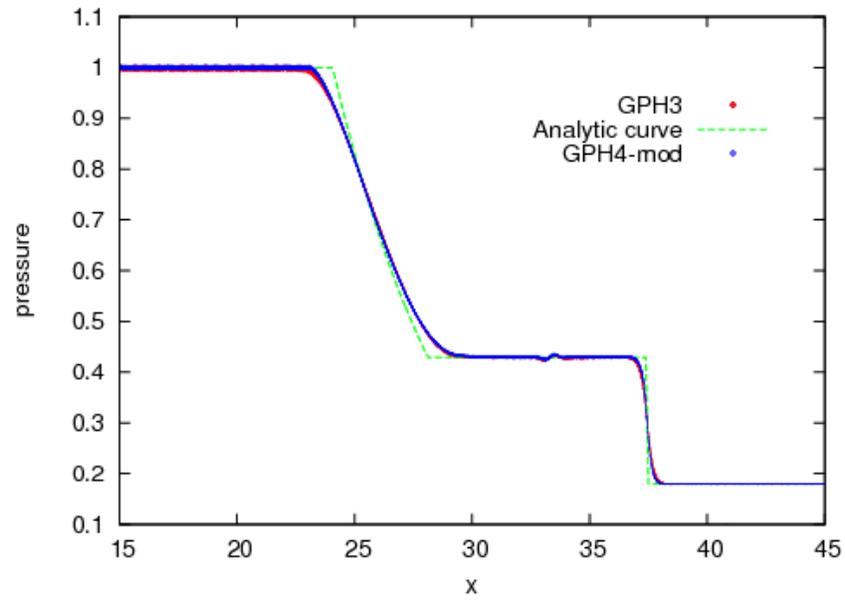
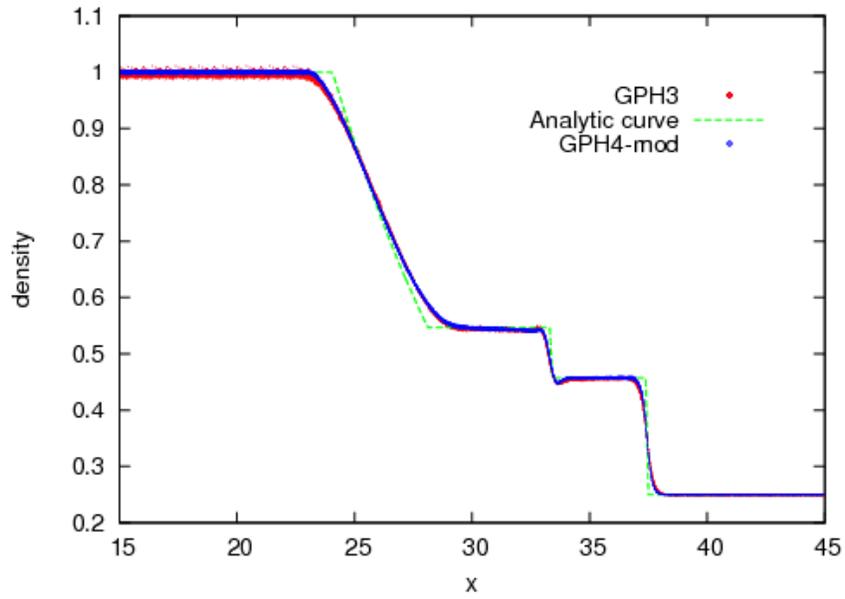


Figura 4.12.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ di densità e pressione vs coordinata x per *GPH-3_100_spline* (rosso) vs *GPH-4-mod_100* (blu). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

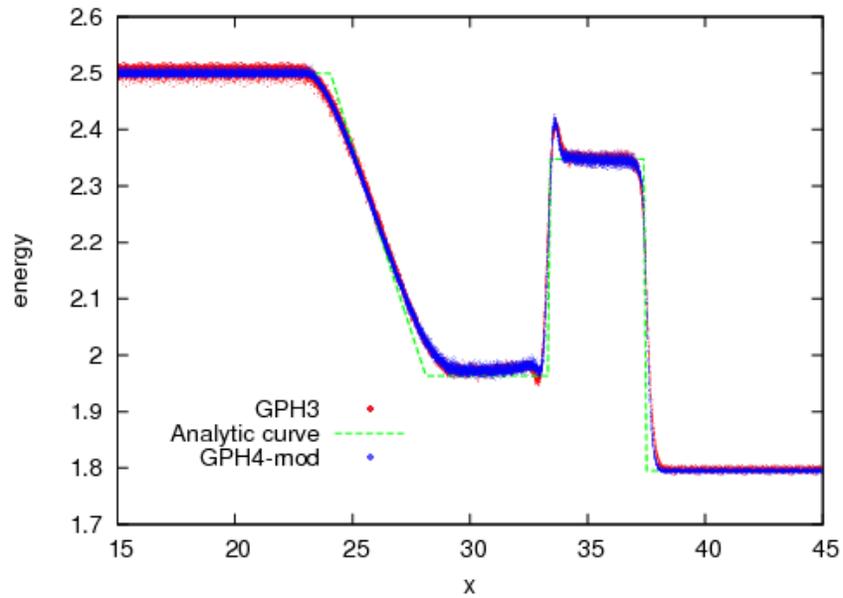
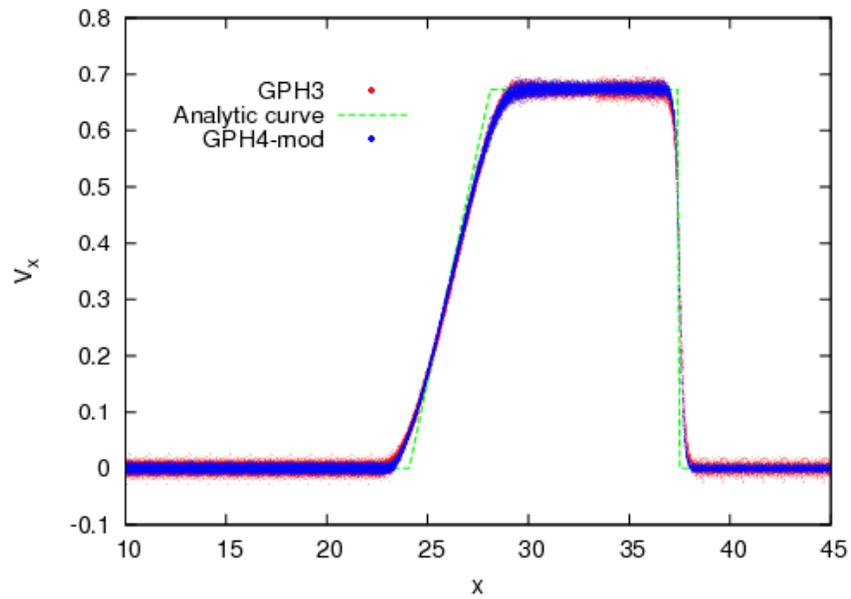


Figura 4.13.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ della componente lungo x della velocità e dell'energia vs coordinata x per *GPH-3_100_spline* (rosso) vs *GPH-4-mod_100* (blu). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

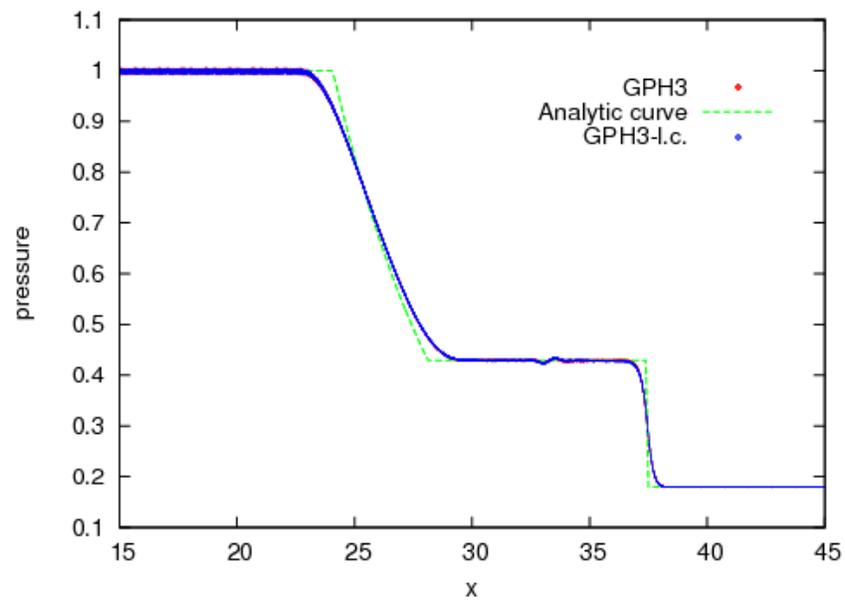
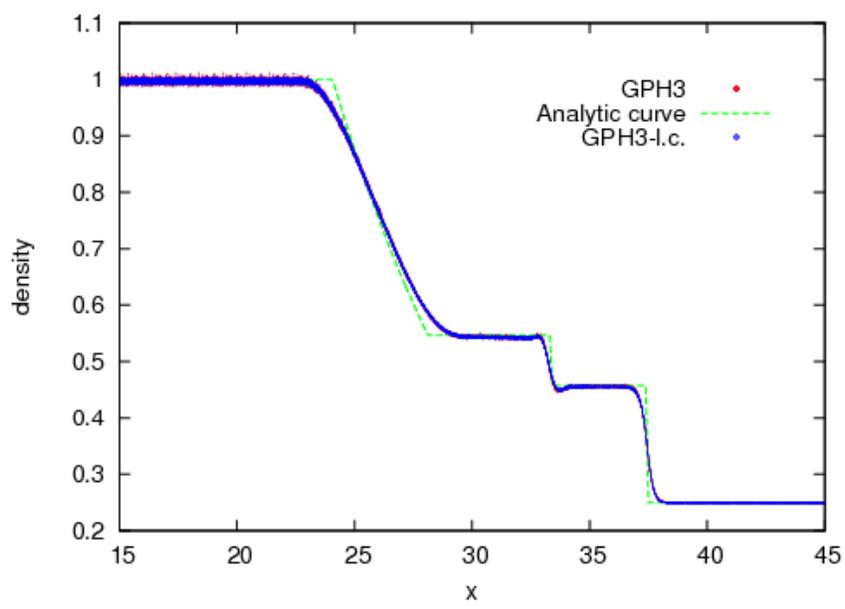


Figura 4.14.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ di densità e pressione vs coordinata x per GPH-3 con (blu, *GPH-3_100_spline_lc*) e senza (rosso, *GPH-3_100_spline*) moltiplicatori lagrangiani. La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

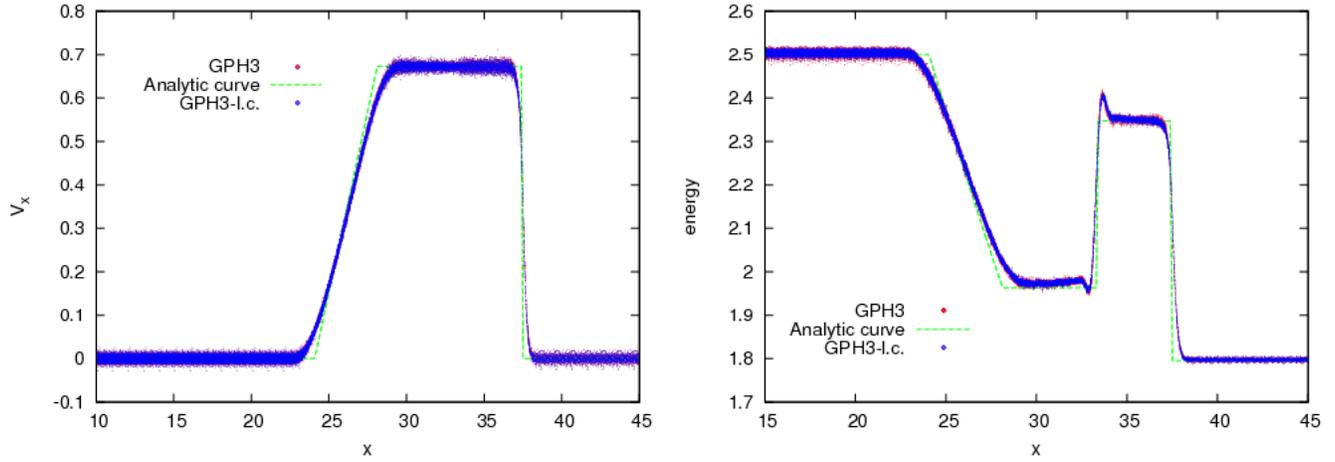


Figura 4.15.: Sod (Shock) Tube: andamento a $t = 5$ della componente lungo x della velocità e dell'energia vs coordinata x per GPH-3 con (blu, *GPH-3_100_spline_lc*) e senza (rosso, *GPH-3_100_spline*) moltiplicatori lagrangiani. La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

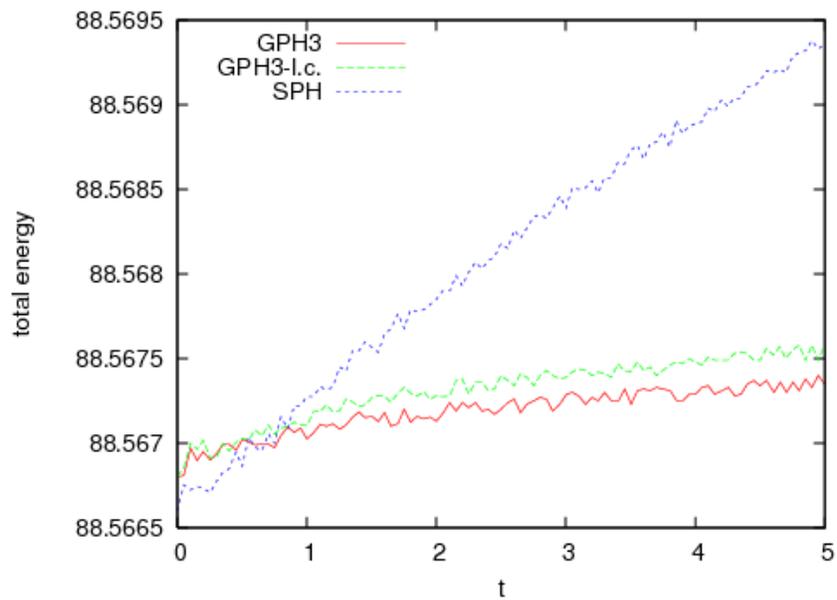


Figura 4.16.: Sod (Shock) Tube: andamento dell'energia totale (interna più cinetica) in funzione del tempo per *GPH-3_100_spline* (rosso), *GPH-3_100_spline_lc* (verde) e *SPH_100_spline* (blu).

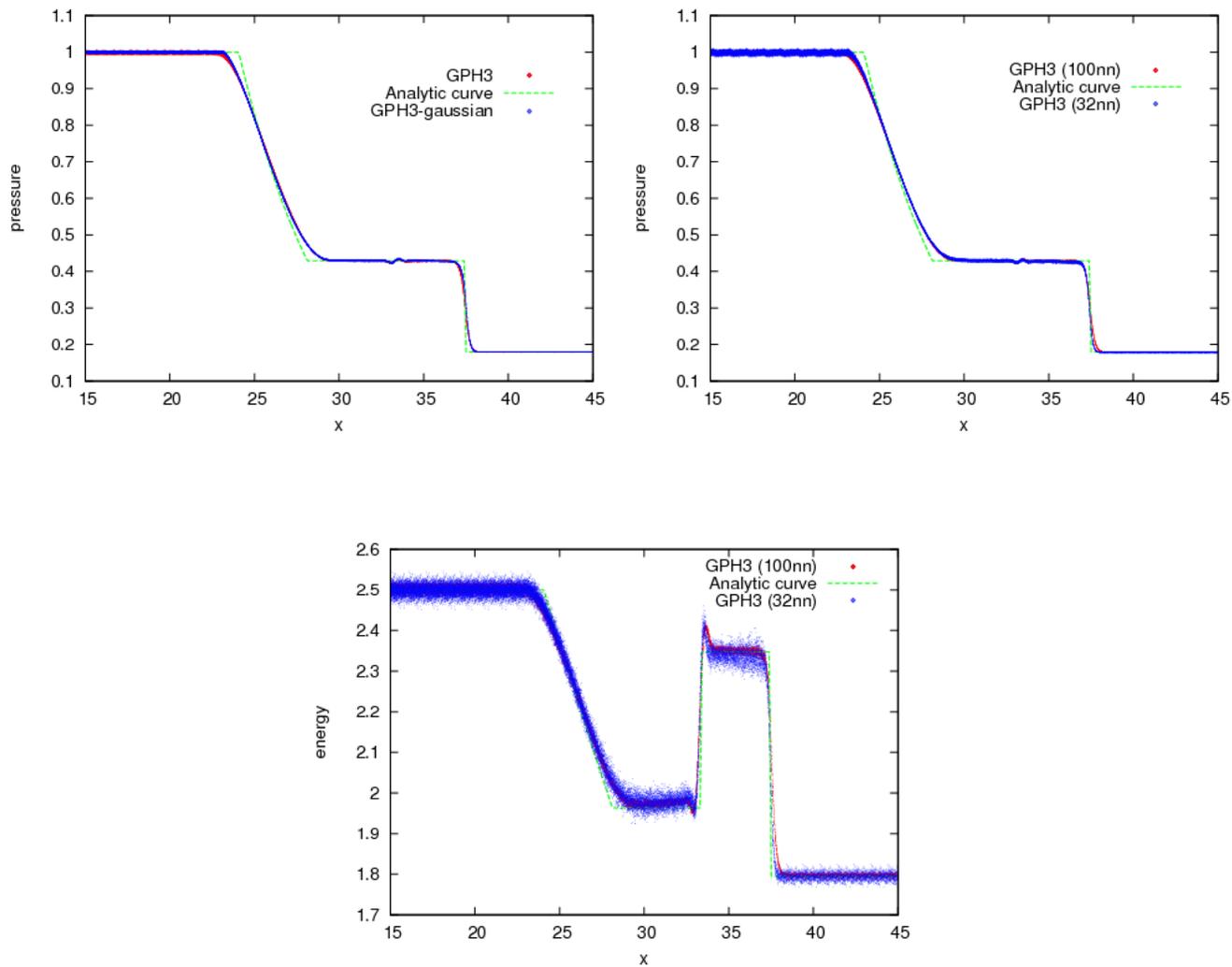


Figura 4.17.: Sod (Shock) Tube: andamenti a $t = 5$ di: (i) pressione vs coordinata x per *GPH-3_100_spline* (rosso) vs GPH-3 con kernel gaussiano, *GPH-3_100_gauss* (blu); (ii) pressione vs coordinata x per *GPH-3_100_spline* (rosso) vs GPH-3 con 32 primi vicini, *GPH-3_32_spline* (blu); (iii) energia vs coordinata x per *GPH-3_100_spline* (rosso) vs *GPH-3_32_spline* (blu). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

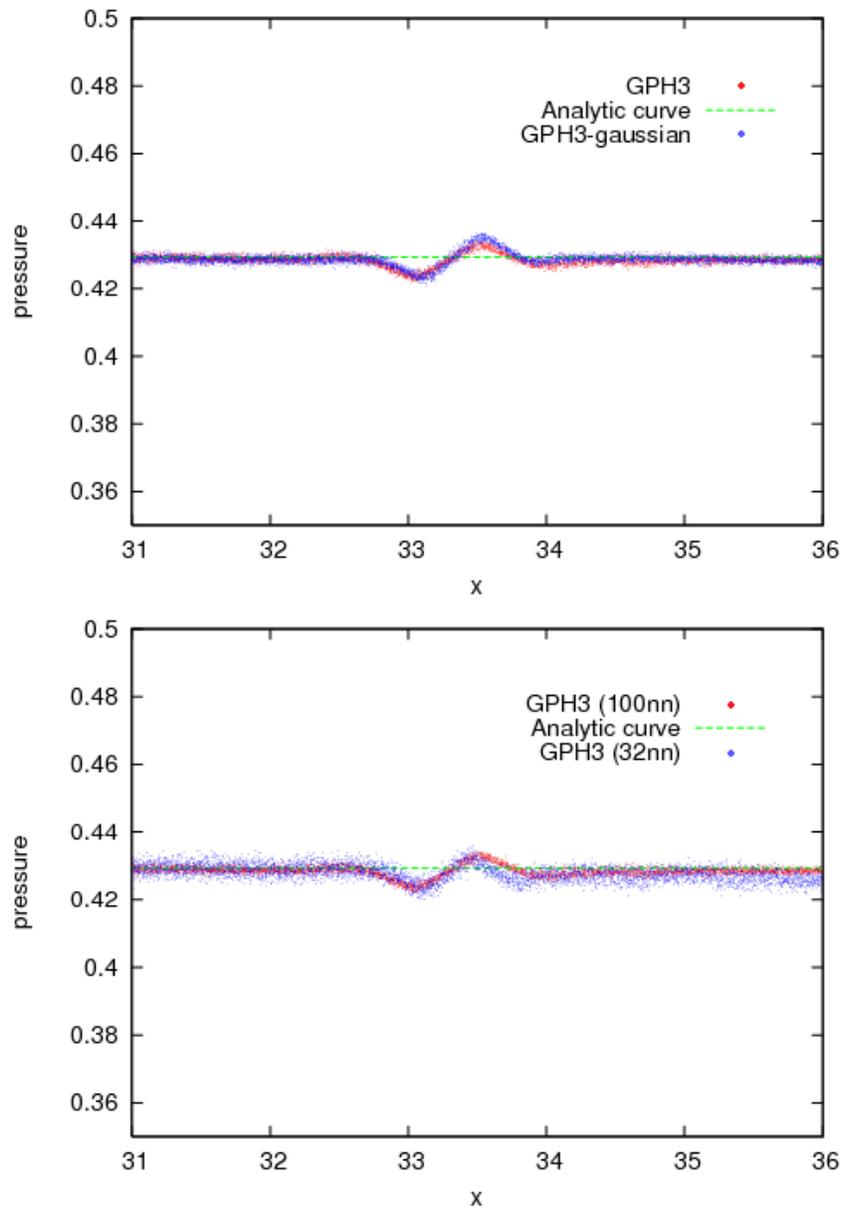


Figura 4.18.: Sod (Shock) Tube: zoom degli andamenti (i) e (ii) di Fig. 4.16 della pressione in funzione di x a $t = 5$. La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

4.1.3. Discussione

Una sguardo d'insieme ai risultati del test di Sod ci mostra alcune caratteristiche generali che riassumiamo qui per evidenziarne l'importanza. Per prima cosa, il GPH (sia 1 che 3) risolve bene gli shock in tutti i casi, nonostante l'assenza di una viscosità artificiale. Questo è possibile perchè il Riemann solver implementa automaticamente le condizioni di Rankine-Hugoniot, che consentono un corretto trattamento delle discontinuità, e in particolar modo degli shock (tuttavia esse non bastano, ad esempio, per risolvere bene le discontinuità di contatto, in cui è necessaria la presenza del mixing che solo la formulazione 3 possiede: chiariremo questo punto esaminando i grafici). Inoltre, esso ha un effetto di soppressione del rumore su piccola scala che l'SPH non ha. Passiamo ora ad esaminare in dettaglio i risultati esposti.

Nel seguito faremo sempre riferimento per brevità ai nomi delle simulazioni come riportati in Tabella 4.1, senza riscrivere ogni volta le varie specifiche che sono riportate in essa.

Le Figure 4.4 e 4.5 mostrano un primo confronto fra *SPH_100_spline* (in rosso) e *GPH-1_100_spline* (in blu). Sono visualizzati gli andamenti a $t = 5$ di densità, pressione, energia e componente lungo x della velocità, tutti in funzione di x , estratti dai risultati delle simulazioni con i due codici. I due andamenti sono abbastanza simili. In tutti e quattro i grafici si vede già qui come il GPH-1 tenda a “smussare” un po' più dell'SPH la parte di curva attorno alla posizione centrale dell'onda di rarefazione ($x \simeq 25$); esso inoltre risulta meno rumoroso nel grafico della velocità lungo x . Tuttavia, i grafici di pressione ed energia interna evidenziano un comportamento analogo dei due codici, e in particolare una analoga difficoltà nel riprodurre correttamente queste due quantità in prossimità della discontinuità di contatto ($x \simeq 33.4$). E' infatti ben visibile in entrambi i casi una discontinuità molto marcata nell'andamento della pressione nell'intorno della discontinuità di contatto: si tratta del già citato “blip”, discusso da Price [13], che egli collega a una difficoltà dell'SPH nel trattare forti gradienti di entropia e densità. A riprova di questo, vediamo che nel grafico dell'energia interna in Figura 4.5 vi è una discontinuità *essenziale*³ per l'SPH, e un forte picco per il GPH-1, in corrispondenza di $x \simeq 33.4$, derivante dagli errori nel calcolo del forte gradiente presente in quel punto.

Il GPH-1 (come il GPH-2), come già ricordato nel capitolo precedente, non contiene termini espliciti di mixing, e questo è il motivo per cui non è in grado di risolvere bene la pressione nell'intorno della discontinuità di contatto. Tuttavia i flussi introdotti comunque dal Riemann-Solver sembrano fornire già un contributo in questo senso, dato che si ha smorzamento di rumore e fluttuazioni locali rispetto all'SPH, e l'andamento dell'onda di rarefazione risulta meno ripido. Come vedremo più in dettaglio nel test di Sedov, questi elementi sono dovuti al fatto che le particelle in questo metodo possono “scambiare” fra di loro le quantità coinvolte nei flussi calcolati dal Riemann-solver (l'entropia prima fra tutte). Perciò questo metodo inizia già ad introdurre una piccola quantità di mixing, ma esso non sembra sufficiente per risolvere i problemi dell'SPH.

Il confronto con il GPH-3, invece (Figure 4.6 e 4.7), mostra come il termine di mixing presente nell'Eq. (3.18) sia in grado di smorzare la discontinuità in pressione, riducendola ad un'oscillazione

³Una discontinuità essenziale, detta anche del secondo tipo, è una discontinuità non eliminabile che si ha (nel caso 1D, ad esempio) quando i limiti da destra e da sinistra tendono a $+\infty$ da una parte e $-\infty$ dall'altra.

molto meno marcata e rendendola continua. Queste due Figure mostrano i risultati per due simulazioni con le stesse caratteristiche dei due grafici precedenti, solo con il GPH-3 usato al posto del GPH-1. In generale si applicano esattamente gli stessi commenti di prima, ma con due importanti novità. Una è già stata detta, la (quasi) scomparsa del blip in pressione. L'altra è la scomparsa del forte picco nell'energia interna che era presente in Figura 4.5, e che in Figura 4.7 è assente. Oltre a questo, l'energia interna è ora continua alla discontinuità di contatto. Questo si lega direttamente all'argomento portato da Price [13], solo che qui il problema è stato risolto (a meno di una leggera fluttuazione residua in pressione e in energia interna) senza l'uso di alcuna conduttività termica artificiale.

Possiamo meglio apprezzare le differenze fra le due versioni 1 e 3 del GPH confrontandoli come viene fatto in Figura 4.8. Riportiamo qui solo i grafici di pressione ed energia interna, perchè sono i due più importanti, da cui si vedono entrambe le differenze prima menzionate.

In Figura 4.9 riportiamo due zoom di due andamenti di pressione, per l'intorno della discontinuità di contatto: in alto per *SPH_100_spline* vs *GPH-3_100_spline*, preso dal pannello in basso di Figura 4.6, e in basso per *GPH-1_100_spline* vs *GPH-3_100_spline*, preso dal pannello in alto di Figura 4.8. Nell'SPH, vediamo meglio le leggere "wiggles" residue, che permangono nonostante la viscosità artificiale sia presente. Esse sono assenti nel GPH, dal momento che in esso la viscosità artificiale non c'è. Nel complesso vediamo come il mixing sopprime il "blip" in pressione lasciando al suo posto solo una leggera fluttuazione.

Per indagare più a fondo l'origine di questa soppressione, abbiamo riprodotto in Figura 4.10 l'andamento a $t = 5$ della differenza frazionaria di entropia ($\Delta S/S$) in funzione di x , confrontando il GPH-3 (rosso, *GPH-3_100_spline*) con l'SPH (verde, *SPH_100_spline*). Tale differenza è stata calcolata sottraendo l'entropia delle particelle all'istante iniziale a quella delle stesse all'istante considerato, e infine dividendo per il valore dell'entropia a quest'ultimo istante. Le due linee tratteggiate mostrano le posizioni della discontinuità di contatto (blu) e dello shock (magenta), e il pannello inferiore riporta un ingrandimento di quello superiore attorno alla posizione della discontinuità di contatto. In questi andamenti, vediamo che il rumore del GPH-3 è ora maggiore di quello dell'SPH. Questo è il segno distintivo del mixing in entropia che il GPH-3 introduce. Infatti, dal pannello inferiore vediamo chiaramente come il comportamento dei due codici sia molto diverso. Se nell'SPH abbiamo un semplice aumento di entropia alla discontinuità, nel GPH-3 troviamo due rami, uno crescente e l'altro decrescente. L'incremento di entropia complessivo è positivo (come dev'essere), ma qui il ramo decrescente dice che vi è perdita di entropia da parte di alcune particelle, è questo è possibile per via del mixing, che fa sì che certe particelle cedano entropia alle vicine. Per contro, vediamo anche che il GPH-3 ha un picco di entropia allo shock che è assente nell'SPH, perchè il GPH-3 riproduce meglio la generazione e il mixing della stessa in quel punto.

I due grafici successivi, Figura 4.11, riproducono gli stessi risultati, ma con il GPH-1 al posto dell'SPH. Valgono anche qui le stesse considerazioni di prima: da questo confronto risulta più chiaro come mai il GPH-1 ha un comportamento abbastanza simile all'SPH. Il GPH-1 mostra infatti un livello di rumore in entropia leggermente più alto dell'SPH, segno che un po' di mixing è già presente, ma esso è del tutto insufficiente, e infatti l'andamento nell'intorno della discontinuità di contatto è lo stesso dell'SPH (e non per niente anche il GPH-1 riproduce il blip in pressione in quel punto)

Per quanto riguarda il GPH-4 modificato, le Figure 4.12 e 4.13 mostrano un confronto di *GPH-3_100_spline* e *GPH-4-mod_100*, per gli andamenti di densità, pressione, componente x della velocità ed energia interna in funzione di x , a $t = 5$. I due codici danno risultati praticamente identici (a parte forse una leggera diminuzione del rumore nel GPH-4-mod), compresa la soppressione (parziale) del blip in pressione.

Lo stesso si può dire del confronto fra il GPH-3 con e senza moltiplicatori lagrangiani, riportato nelle Figure 4.14 e 4.15 (stessi quattro andamenti e stesse caratteristiche dei grafici precedenti). Questa è la prima volta che vengono implementati nel GPH i moltiplicatori lagrangiani, solitamente usati nell'SPH-entropy-conserving di GADGET, e tale implementazione viene verificata con successo. Il confronto mostra un ottimo accordo fra i due andamenti, il che ci suggerisce che il GPH-3, per come è stato implementato, sia pienamente conservativo, anche senza imporre dei vincoli espliciti (che richiederebbero appunto dei moltiplicatori lagrangiani).

Per verificare quest'ultima asserzione, in Figura 4.16 viene riportato l'andamento dell'energia totale (somma di quella interna e di quella cinetica per ogni particella) per *GPH-3_100_spline* (rosso), *GPH-3_100_spline_lc* (verde) ed *SPH_100_spline* (blu). Entrambe le versioni del GPH-3 risultano essere persino più conservative dell'SPH-entropy-conserving di GADGET, anche se lo scarto è davvero molto piccolo (a $t = 5$, la differenza fra GPH-3 ed SPH è dell'ordine dello 0.002%). Inoltre, l'implementazione dei moltiplicatori lagrangiani non migliora la situazione⁴, segno che il GPH-3 risulta già pienamente conservativo di per sè.

In Figura 4.17 sono mostrate le quantità più rappresentative dei confronti fra i risultati a $t = 5$, per GPH-3, delle simulazioni con kernel spline e gaussiano, e con 100 o 32 primi vicini nel calcolo delle quantità mediate. Anche qui notiamo un ottimo accordo; l'unica differenza è che con 32 vicini il rumore aumenta, e ciò è dovuto al fatto che con meno vicini la regione di smoothing è più piccola, e quindi i contributi delle fluttuazioni microscopiche (Poissoniane) sono più grandi, e questo si traduce nell'aumento del rumore che vediamo. Oltre a questi sono stati fatti degli altri test, ad esempio test di stabilità per GPH-3 con kernel spline con 20 o 1000 vicini, come si può vedere dalla Tabella 4.1, che hanno dato esito positivo e non abbiamo riportato poichè non offrivano conclusioni nuove al di là di quelle che abbiamo già delineato.

Infine, l'ultima Figura 4.18 mostra due ingrandimenti degli andamenti della pressione attorno alla discontinuità di contatto, presi dai due pannelli superiori della Figura 4.17. Possiamo quindi concludere che il cambio di kernel e di vicini nella sfera di smoothing non ha incidenze significative sugli effetti del GPH-3 (cioè sul mixing e conseguente rimozione del blip in pressione).

⁴Il fatto che, da quanto si vede in Figura 4.16, i moltiplicatori lagrangiani sembrano *peggiore* la situazione in realtà non costituisce alcun assurdo, dal momento che la differenza è così piccola da essere trascurabile.

4.2. Test di Sedov (Blast Wave)

4.2.1. Descrizione del test

Il test dell'esplosione forte (Blast Wave), detto anche test di Sedov dal nome di chi ne trovò la soluzione esatta (chiamata anche in letteratura soluzione di Sedov-Taylor [56, 57, 58, 59, 60]), è un test idrodinamico interessante per varie ragioni. Esso consiste nel prendere un fluido con densità distribuita inizialmente in modo uniforme, ad esempio entro un volume cubico unitario, e nell'iniettare una forte dose di energia nel centro del volume (idealmente in modo puntiforme): lasciando evolvere il sistema si ottiene un'onda d'urto il cui fronte sferico si propaga rapidamente; un'esplosione, appunto. Dal punto di vista numerico si considera un insieme di particelle distribuite uniformemente, e si fornisce un'elevata energia iniziale alle particelle centrali (vedremo fra poco con che criterio). Il risultato è illustrato in Figura 4.18.

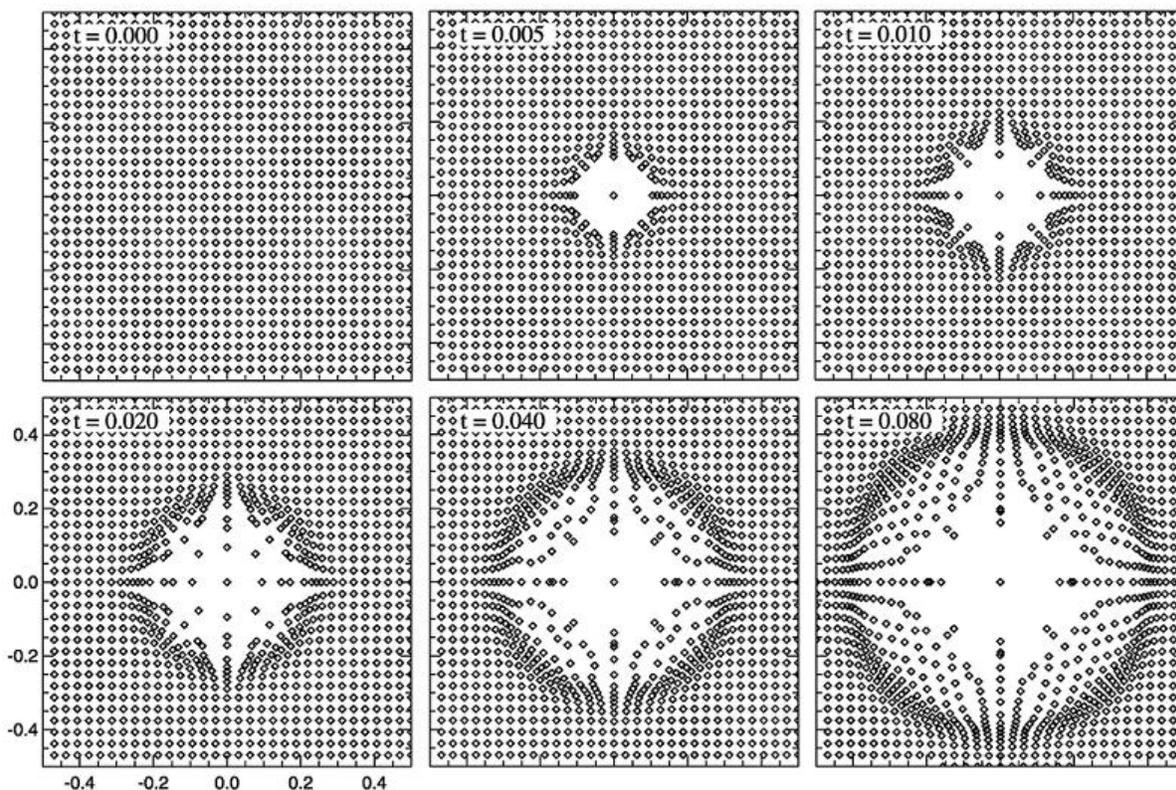


Figura 4.19.: Simulazione numerica dell'esplosione forte nel test di Sedov (tratta da [17]).

Tale test descrive un modello interessante perchè, pur essendo semplificato, è comunque molto realistico e come tale trova applicazione in vari settori. Anche se è nato per scopi ben lontani dall'astrofisica (basti pensare che il libro di Sedov in cui la soluzione viene presentata reca in

copertina l'immagine di un bombardiere B-52), oggi meccanismi come questo (di iniezione puntuale di energia) trovano varie applicazioni numeriche in questo campo, ad esempio nel riprodurre le varie esplosioni che avvengono in ambiente astrofisico, come quelle di supernovae⁵.

Dal punto di vista fluidodinamico, l'esplosione forte appartiene alla classe dei problemi con soluzioni autosimili (cfr. [2, 3]). Tale classe è caratterizzata dal fatto che le condizioni del problema consentono di trovare (o perlomeno vincolare fortemente) la soluzione mediante argomenti di semplice analisi dimensionale. Nel caso idealizzato in cui si rilasci un'energia E in $r = 0$ al tempo $t = 0$, entro un mezzo politropico con densità ρ_0 , e temperatura quasi zero, poichè l'esplosione è puntiforme e il mezzo uniforme, la successiva espansione avrà simmetria sferica. Possiamo trovare la dipendenza del raggio dello shock dal tempo notando che la risposta deve avere le dimensioni di una lunghezza, e dipende solo dalle quantità E , ρ_0 , t : c'è una sola combinazione di queste quantità con le giuste dimensioni, ed è

$$R(t) = \beta \left(\frac{Et^2}{\rho_0} \right)^{1/5}, \quad (4.1)$$

dove β è una quantità adimensionale (essa può essere trovata numericamente imponendo che l'integrale della densità di energia totale fra 0 ed R sia uguale ad E). Analogamente, per la velocità dietro lo shock si ha $\rho(r, t) = \rho_0 H(r, t)$, dove H è una funzione adimensionale di r e t , e ragionando esattamente come prima si trova $H = \tilde{H}(\xi)$, con $\xi \equiv \frac{r}{R} = \frac{r}{\beta} \left(\frac{\rho_0}{Et^2} \right)^{1/5}$. Utilizzando infine le condizioni di Rankine-Hugoniot nel limite di shock forte (che è il caso che stiamo considerando visto che poniamo $T \sim 0$) troviamo $\rho(r, t) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0 \tilde{H}(\xi)$. Possiamo ora esprimere le equazioni fluidodinamiche (riscritte in coordinate sferiche) (2.25), (2.26) e l'equazione di conservazione dell'entropia specifica $\frac{ds}{dt} = 0$, nella sola variabile ξ , ottenendo così un sistema di equazioni differenziali *ordinarie*, che qui riportiamo [3]:

$$\begin{aligned} -\xi \dot{R} + \frac{2}{\gamma+1} (\dot{R}V + R\dot{V}) + \frac{4}{\gamma+1} \frac{RV}{\xi} &= 0 \quad (\text{eq. di continuità}) \\ -\xi \dot{V} - 3V + \frac{4\dot{V}V}{\gamma+1} &= -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{2\dot{P}}{R} \quad (\text{eq. di Eulero}) \\ -3 - \frac{\dot{P}\xi}{P} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{\dot{P}V}{P} + \gamma\xi \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\gamma}{\gamma+1} V \frac{\dot{R}}{R} &= 0 \quad (\text{conservazione dell'entropia specifica}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

La soluzione esatta mostrata nei grafici è calcolata numericamente per indice politropico $\gamma = 5/3$ risolvendo il sistema di equazioni precedente.

4.2.2. Risultati

Riportiamo qui i principali risultati del Test di Sedov.

Le condizioni iniziali usate sono state tre:

⁵Il corretto trattamento di distribuzioni a delta di Dirac (o quasi) di energia è poi richiesto ad esempio in certi modelli di feedback (vedi Springel & Hernquist, [47, 17])

- condizioni iniziali *gaussiane* ($IC=GAUSS$), in cui l'energia viene distribuita alle particelle centrali seguendo una distribuzione di energia gaussiana;
- condizioni iniziali a *Top-Hat-32* ($IC=TH32$), in cui l'energia viene distribuita alle particelle centrali seguendo una distribuzione uniforme e costante entro una sfera le cui dimensioni lineari coprono 32 vicini (i.e. una finestra Top-Hat a 32 vicini);
- condizioni iniziali a *Top-Hat-64* ($IC=TH64$), in cui l'energia viene distribuita alle particelle centrali con una finestra Top-Hat a 64 vicini.

La forma gaussiana della distribuzione di energia (ma il discorso vale analogamente anche per le altre due condizioni) viene ottimizzata in modo che essa sia sufficientemente piccata da approssimare una delta di Dirac (che corrisponderebbe al caso ideale di iniezione puntiforme, cioè numericamente ad una singola particella), ma abbia anche una varianza sufficientemente elevata da evitare instabilità numeriche. Se infatti concentrassimo tutta l'energia iniziale in una *singola* particella, Si creerebbe uno squilibrio troppo forte tra la particella che riceve energia e quelle circostanti, che l'idrodinamica avrebbe problemi a seguire. Distribuire l'energia tra varie particelle, anzichè una sola, equivale in qualche modo a risolvere il primo transiente iniziale e partire quindi da una situazione idrodinamicamente piu' trattabile.

Le particelle sono state portate inizialmente ad una condizione di tipo "glass", vedi descrizione relativa nel test di Sod. Il valore dell'indice adiabatico usato in questo test è $\gamma = 5/3$.

Sono state fatte delle simulazioni con i due codici principali, già esposti nel test di Sod, e cioè SPH (GADGET-3) e GPH-3 (sempre implementato in GADGET), per tutte e tre le condizioni iniziali a bassa risoluzione (2.5×10^5 particelle), con 32 e 100 vicini per le medie SPH e kernel spline, e solo per condizioni iniziali gaussiane ad alta risoluzione (2.5×10^6 particelle), con 100 vicini e kernel sempre spline. La Tabella 4.2 riassume le varie simulazioni considerate.

nome	schema	# particelle	C.I.	vicini
<i>SPH_low_gaus_32</i>	SPH	2.5×10^5	gaussiane	32
<i>SPH_low_gaus_100</i>	SPH	2.5×10^5	gaussiane	100
<i>SPH_low_th32_32</i>	SPH	2.5×10^5	Top-Hat 32	32
<i>SPH_low_th32_100</i>	SPH	2.5×10^5	Top-Hat 32	100
<i>SPH_low_th64_32</i>	SPH	2.5×10^5	Top-Hat 64	32
<i>SPH_low_th64_100</i>	SPH	2.5×10^5	Top-Hat 64	100
<i>GPH-3_low_gaus_32</i>	GPH-3	2.5×10^5	gaussiane	32
<i>GPH-3_low_gaus_100</i>	GPH-3	2.5×10^5	gaussiane	100
<i>GPH-3_low_th32_32</i>	GPH-3	2.5×10^5	Top-Hat 32	32
<i>GPH-3_low_th32_100</i>	GPH-3	2.5×10^5	Top-Hat 32	100
<i>GPH-3_low_th64_32</i>	GPH-3	2.5×10^5	Top-Hat 64	32
<i>GPH-3_low_th64_100</i>	GPH-3	2.5×10^5	Top-Hat 64	100
<i>SPH_high_gaus_100</i>	SPH	2.5×10^6	gaussiane	100
<i>GPH-3_high_gaus_100</i>	GPH-3	2.5×10^6	gaussiane	100

Tabella 4.3.: Riassunto delle simulazioni effettuate per il test di Sedov.

Non riportiamo nè discutiamo i risultati relativi a kernel gaussiano e GPH-4-mod, essendoci ancora problemi che sono in fase di approfondimento per questi codici.

Tutti i risultati presentati sono stati estratti dall'ultima snapshot della simulazione, allo stesso tempo ($t = 0.011$). Le mappe di densità e pressione sono state generate con il programma di visualizzazione grafica SPLASH⁶ di D. Price [53].

Nelle pagine seguenti riportiamo i grafici più significativi estratti dai risultati delle simulazioni effettuate.

⁶<http://users.monash.edu.au/~dprice/splash/>

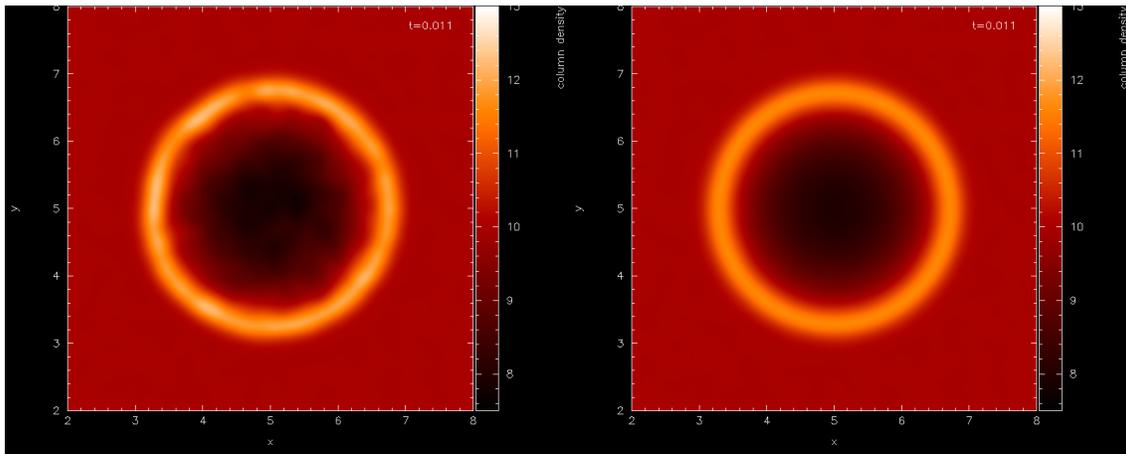
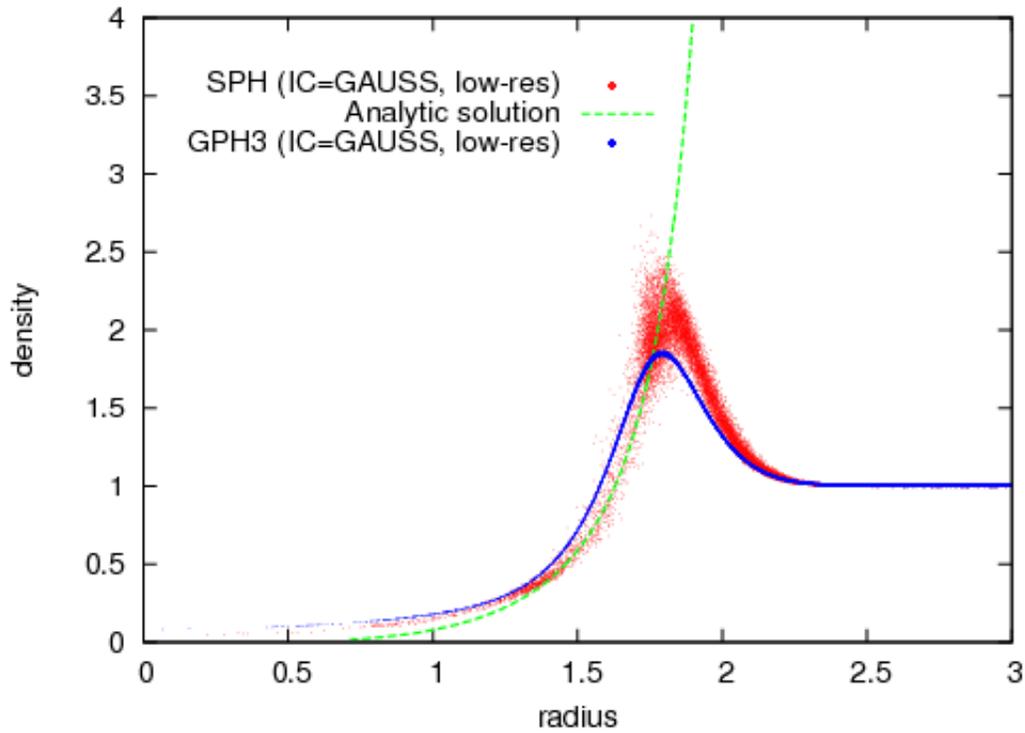


Figura 4.20.: Blast Wave (Sedov). *In alto*: andamento di densità in funzione del raggio a $t = 0.011$ per *SPH_low_gaus_100* (rosso) con condizioni iniziali gaussiane (l'energia viene data alle particelle centrali secondo una distribuzione gaussiana) vs *GPH-3_low_gaus_100* (blu), con stesse condizioni iniziali, entrambi a bassa risoluzione (2.5×10^5 particelle). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta. *In basso*: mappe di densità per gli stessi risultati a $t = 0.011$ nel piano x, y ($z = 0$) per *SPH_low_gaus_100* (sinistra) e *GPH-3_low_gaus_100* (destra).

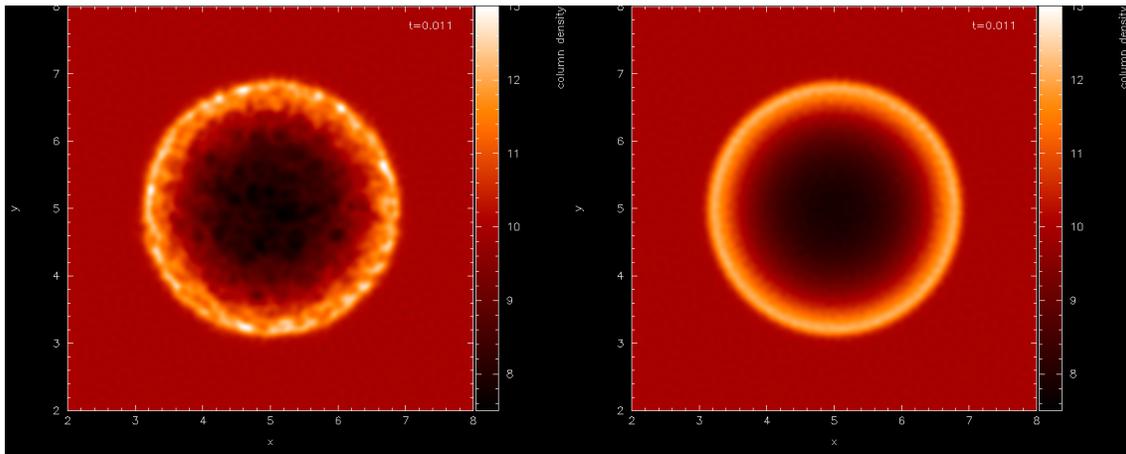
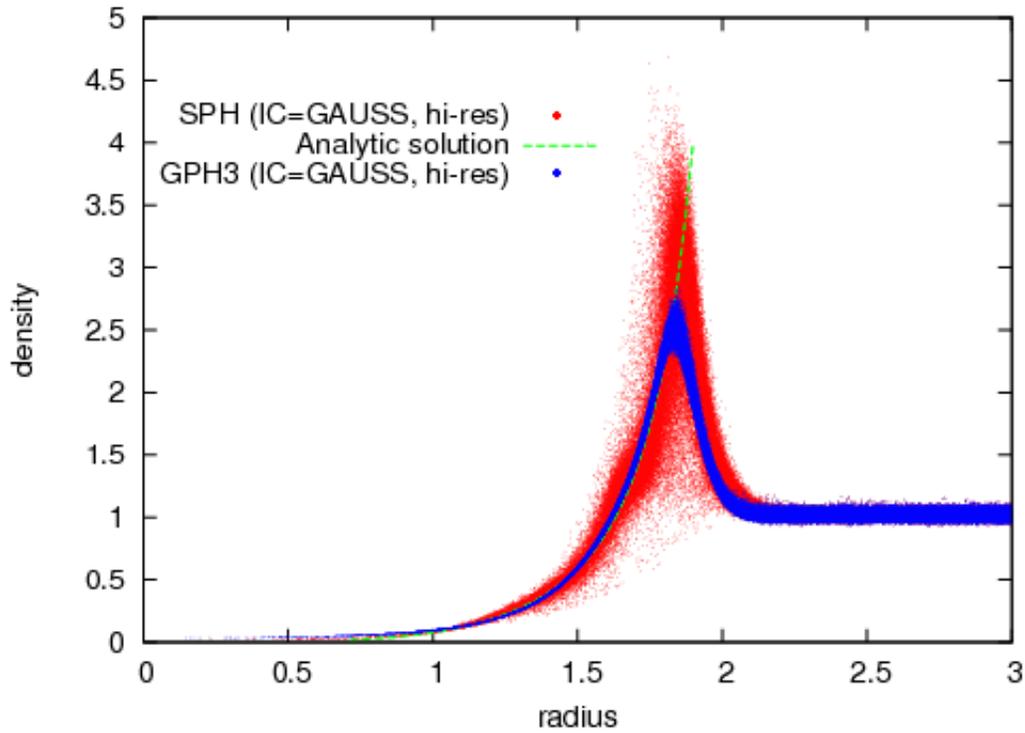


Figura 4.21.: Blast Wave (Sedov). *In alto*: andamento di densità in funzione del raggio a $t = 0.011$ per *SPH_high_gaus_100* (rosso) con condizioni iniziali gaussiane (l'energia viene data alle particelle centrali secondo una distribuzione gaussiana) vs *GPH-3_high_gaus_100* (blu), entrambi ad alta risoluzione (2.5×10^6 particelle). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta. *In basso*: mappe di densità per gli stessi risultati a $t = 0.011$ nel piano x, y ($z = 0$) per *SPH_high_gaus_100* (sinistra) e *GPH-3_high_gaus_100* (destra).

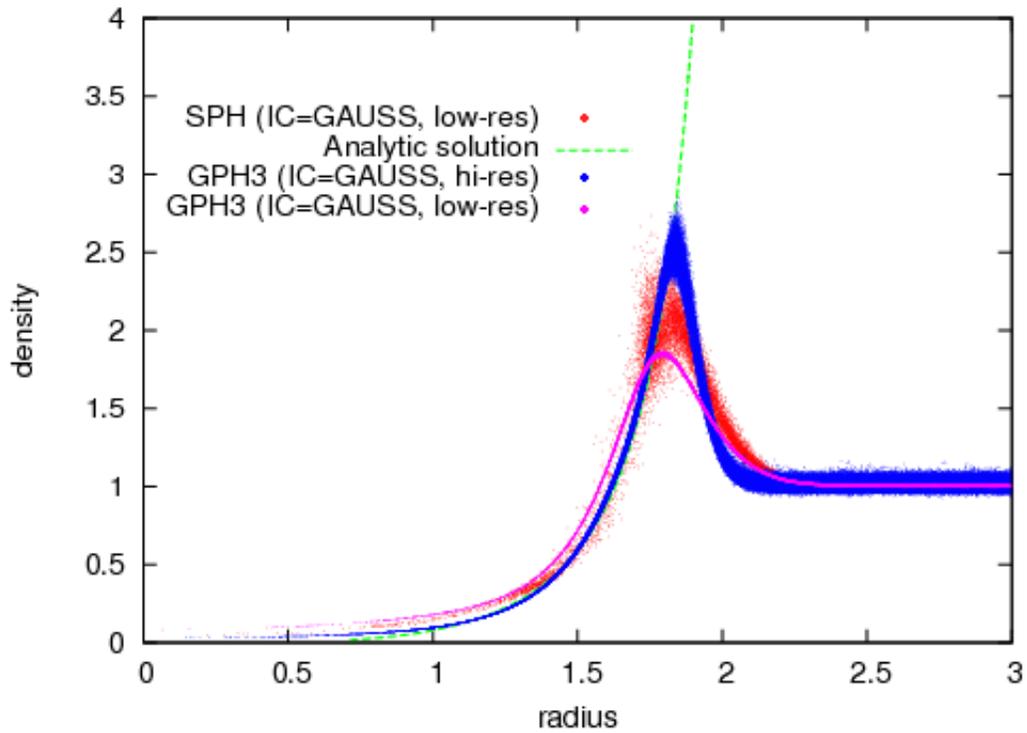


Figura 4.22.: Blast Wave (Sedov): come in Fig. 4.20 (in rosso l'*SPH_low_gaus_100*, in magenta il *GPH-3_low_gaus_100*), con in più mostrato il *GPH-3_high_gaus_100* ad alta risoluzione (in blu). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

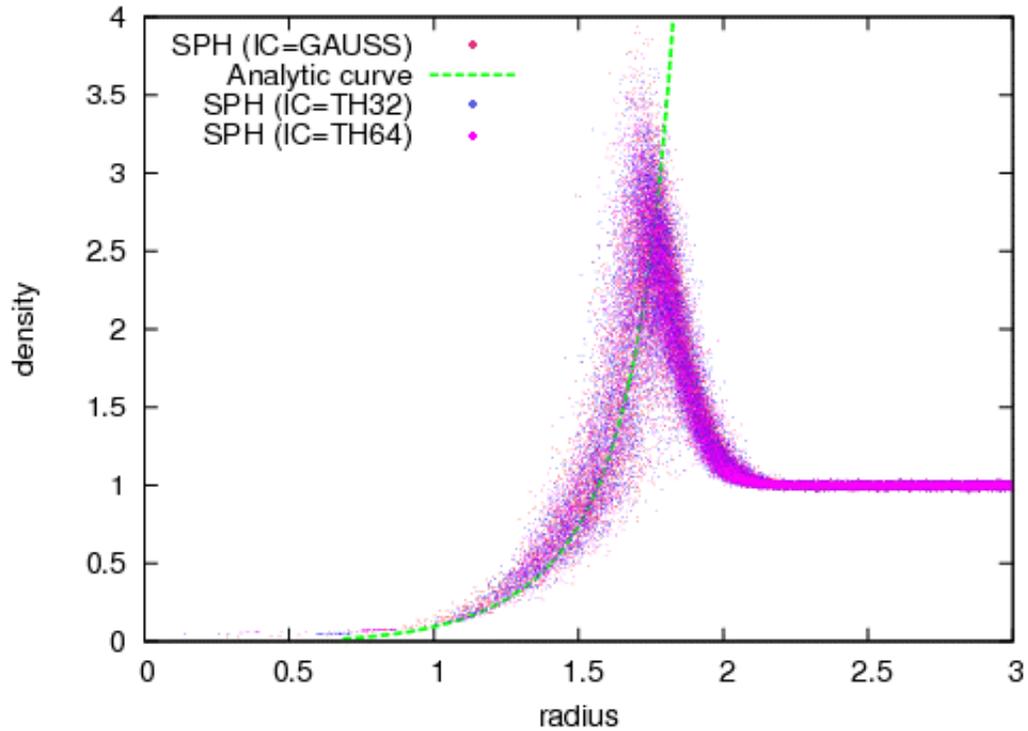


Figura 4.23.: Blast Wave (Sedov): andamento della densità in funzione del raggio a $t = 0.011$ per SPH, con kernel spline e 32 vicini, con tre diverse condizioni iniziali: l'energia viene data alle particelle centrali seguendo una gaussiana (rosso, *SPH_low_gaus_32*), una Top-Hat a 32 vicini (blu, *SPH_low_th32_32*), o una Top-Hat a 64 vicini (magenta, *SPH_low_th64_32*). La curva verde tratteggiata mostra la soluzione analitica esatta.

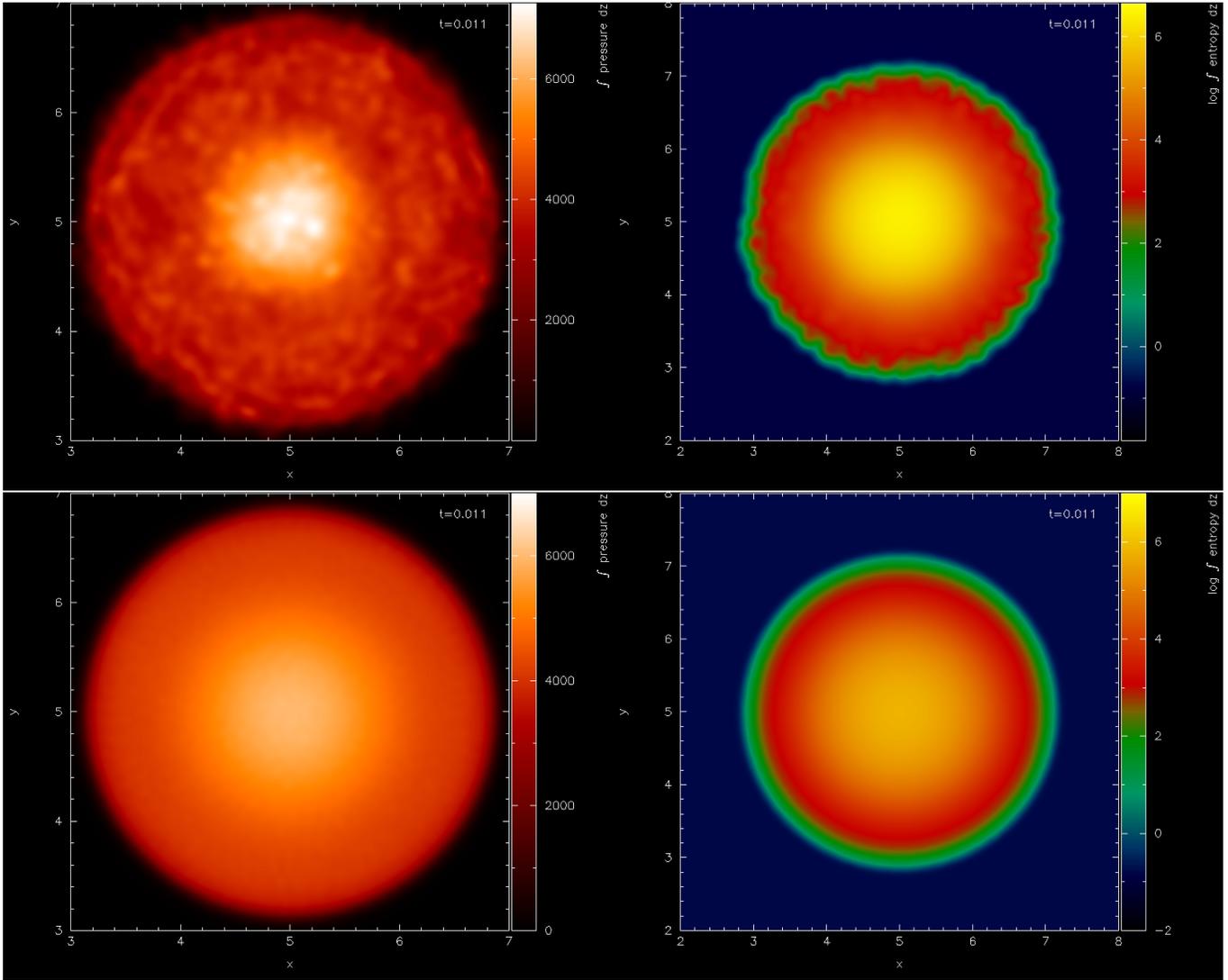


Figura 4.24.: Blast Wave (Sedov): mappe di pressione (pannelli di sinistra) ed entropia (pannelli di destra) prese dai risultati di Figura 4.21 nel piano x, y ($z = 0$) per SPH (sopra) e GPH-3 (sotto), ad alta risoluzione con condizioni iniziali gaussiane. Le mappe di entropia sono in scala logaritmica.

4.2.3. Discussione

I risultati del test di Sedov mostrano in generale un buon accordo di entrambi i codici, SPH e GPH-3, con la soluzione analitica che può essere ricavata dal sistema di equazioni riportato alla fine del paragrafo 4.2.1, che nei grafici è raffigurato dalla curva verde tratteggiata. Da una rapida panoramica dei grafici e delle mappe di densità riportati già possiamo vedere come l'andamento qualitativo sia riprodotto più o meno fedelmente nelle diverse simulazioni eseguite, pur con lievi ma importanti differenze che subito andremo ad esaminare. Nel caso dell'SPH, il fatto che il test di Sedov dia risultati positivi era già noto in letteratura, ad esempio i risultati di questo test condotto con GADGET erano già stati illustrati in [17]. In quel caso le finalità del test erano più che altro il confronto fra diversi schemi SPH (in particolare lo schema standard energy-conserving e lo schema entropy-conserving, implementato in GADGET-2 e seguenti, e discusso nella sezione 2.5.8). La vera novità qui, invece, sono i risultati relativi allo schema GPH, implementato in GADGET, e alle sue peculiarità nel riprodurre l'esplosione forte.

La Figura 4.20 illustra i risultati di una simulazione della Blast Wave a bassa risoluzione (2.5×10^5 particelle) per i due codici SPH e GPH3. Entrambi sono stati simulati a partire dalle medesime condizioni iniziali, quelle che nella descrizione delle specifiche del test (sezione precedente) abbiamo chiamato *condizioni gaussiane*, in cui l'energia viene fornita alle particelle che si trovano al centro del volume di simulazione seguendo una distribuzione gaussiana.

Nel pannello superiore di questa figura viene mostrato un primo confronto, al tempo finale della simulazione $t = 0.011$, fra i risultati dei due codici, di cui mostriamo un profilo radiale di densità: i punti rossi rappresentano le particelle della simulazione SPH, mentre quelli blu rappresentano quelle della simulazione GPH-3. Notiamo che in entrambi i casi la posizione del picco del fronte d'onda risultante dalla simulazione segue in maniera abbastanza precisa il profilo dell'onda d'urto ideale della soluzione analitica, anche se l'altezza di tale picco dipende dallo schema adottato, e dalla risoluzione, come vedremo più avanti. Concentrandoci sull'SPH notiamo che esso è molto più rumoroso rispetto al GPH, e che presenta un massimo di densità più elevato. La differenza, nel caso del GPH, è dovuta al mixing: infatti, il mescolamento che questo codice introduce automaticamente fa sì che vi sia fra le particelle uno scambio continuo, per cui se una particella ad un certo istante possiede una elevata energia termica o entropia, i flussi introdotti dal metodo di Godunov la porteranno a cederne un po' alle particelle circostanti. Queste all'istante successivo "comuniceranno" questa variazione alle vicine, e il ripetersi di questo procedimento porterà ad attenuare i gradienti delle quantità scambiate, oltre che in generale ad uniformare tutte le possibili fluttuazioni locali o le piccole differenze che complessivamente agirebbero per incrementare il rumore risultante, come avviene in effetti nell'SPH. In sostanza, lo scambio continuo fra le particelle attenua molto i gradienti locali che possono formarsi nel corso dell'evoluzione, o come derivanti da fluttuazioni Poissoniane intrinseche che interessano le particelle (a livello microscopico), poi amplificate localmente, o come effetto peculiare dell'evoluzione delle varie quantità. Nell'SPH, invece, questo tipo di mescolamento è assente; inoltre, dal fatto che la soppressione del rumore anche in corrispondenza dello shock sia bassa, concludiamo che la dissipazione introdotta dalla viscosità artificiale è in realtà ridotta al minimo necessario a catturare gli shock, e non introduce alcun mixing nel sistema.

Questo "smussamento" di cui abbiamo parlato ha quindi non solo l'effetto di ridurre le differenze

locali, il che spiega il fatto che il GPH-3 appaia molto meno rumoroso dell'SPH, ma anche un effetto globale di attenuazione dei massimi delle varie quantità termodinamiche scambiate. Questo porta nel test di Sedov a un picco più basso della densità, e il flusso delle quantità scambiate dalle particelle associate al massimo a quelle circostanti, comporta un allargamento maggiore del fronte d'onda, come effettivamente si osserva. Notiamo anche che le code della densità per $r \rightarrow 0$ risultano leggermente sovrastimate. Possiamo immaginare che questo sia un effetto numerico, dovuto al fatto che, prendendo valori molto piccoli del raggio, cioè andando alle scale di lunghezza inferiori del sistema, siamo sempre più sensibili alla risoluzione con cui il sistema stesso viene modellizzato numericamente. Un numero non molto elevato di particelle, quindi una bassa risoluzione come in questo caso, porta inevitabilmente a degli errori alle piccole scale, in cui si è più sensibili alla discretizzazione.

Per indagare più a fondo l'origine delle differenze riscontrate in questi due andamenti messi a confronto, abbiamo generato mediante il programma SPLASH delle mappe spaziali di densità, utilizzando sempre gli stessi risultati precedenti ($t = 0.011$, bassa risoluzione, condizioni iniziali gaussiane). I due pannelli in basso in Figura 4.20 mostrano le mappe di densità relative al piano x, y ($z = 0$), per SPH (a sinistra) e GPH-3 (a destra). Riconosciamo subito la presenza di maggiori irregolarità nell'SPH, sia nella zona di rarefazione interna, sia sul fronte di shock. Viceversa, il GPH-3 appare molto più simmetrico e regolare. Questo conferma pienamente quanto detto in precedenza circa la presenza e l'azione del mixing in questo codice, e il suo effetto di smorzamento dei gradienti locali; inoltre i bordi delle varie parti appaiono più sfumati, risultato del mescolamento fra le particelle delle diverse zone, che nell'SPH, anche se in corrispondenza dello shock in piccola parte è presente per via della dissipazione indotta dalla viscosità artificiale, non risulta riprodotto altrettanto bene.

Alcune delle caratteristiche riscontrate nei risultati di questa prima simulazione dipenderanno invariabilmente dalla risoluzione adottata. Per chiarire come questo accada e in che misura alteri o confermi le analisi che abbiamo tracciato finora, riportiamo in Figura 4.21 i risultati di un identico run (cioè per gli stessi due codici di prima, con condizioni iniziali gaussiane), fatto stavolta ad alta risoluzione, ovvero incrementando il numero di particelle di un fattore 10 (2.5×10^6 particelle).

Il pannello in alto di questa figura mostra come prima il confronto fra SPH (in rosso) e GPH-3 (in blu), per l'andamento della densità in funzione del raggio a $t = 0.011$. Come nella simulazione a bassa risoluzione, la posizione del picco dell'onda d'urto è in linea con la soluzione analitica, e anche in questo caso ritroviamo le due differenze principali fra i risultati dei due codici, ovvero l'attenuazione del rumore nel GPH-3 e l'abbassamento del massimo della densità del GPH-3 rispetto a quello dell'SPH. I motivi alla base sono esattamente gli stessi della simulazione precedente, e questo ci conferma che si tratta di un effetto del mixing, che agisce nel modo indicato prima attenuando i gradienti locali e ridistribuendo le quantità mescolate (come l'entropia) fra le particelle del sistema.

Vi sono tuttavia delle differenze rispetto al caso precedente. La prima è che i massimi della densità per entrambi i codici si trovano più in alto: il massimo dell'SPH si trova ora vicino a 4.5, mentre prima si trovava vicino a 2.5; e per il GPH-3 si trova ora fra 2.5 e 3, mentre prima si trovava fra 1.5 e 2. Questo è normale: infatti, modellizzando il fluido con un insieme di particelle, ci aspettiamo che esso riproduca gli andamenti fluidodinamici ideali tanto meglio quanto meglio è approssimato il fluido stesso, ovvero quanto più alta è la risoluzione. A ciò è legata anche la seconda

differenza, cioè che il GPH-3 segue qui molto meglio l'andamento dello shock nella zona di brusca crescita che va dalla zona di rarefazione centrale al fronte d'onda, mentre prima se ne discostava maggiormente. Ciò che succede in questo caso è che si ha come prima un effetto di “allargamento”, o “appiattimento” dell'onda d'urto, ma ciò è in parte bilanciato dall'aumento di risoluzione, e in parte da una diminuzione, numerica, della quantità di mixing. Quest'ultimo effetto è originato dal fatto che con meno particelle si ha mixing fra scale *maggiori*, e quindi esso viene in un certo senso “sovrastimato”, in quanto le interfacce che considera il Riemann solver hanno un'estensione maggiore. E' questo per la maggior parte il motivo per cui l'andamento a bassa risoluzione, vedi Figura 4.20, del GPH-3 appare così “anticipato” rispetto alla soluzione esatta, dal momento che la maggiore quantità di mixing attenua maggiormente l'energia termica delle particelle allo shock. Aumentando invece il numero di particelle, quest'effetto gradualmente diminuisce, e quindi ad alta risoluzione si ha una quantità leggermente inferiore di mixing.

L'effetto finale è che lo scostamento (che pure sarà sempre presente) fra l'andamento simulato e quello ideale (o analitico) è sempre meno visibile, e sempre più trascurabile al crescere della risoluzione. Come nella discussione del test di Sod, anche qui vale la pena di porre l'accento sul fatto che il GPH-3 cattura bene lo shock, nonostante non vi sia in esso alcuna viscosità artificiale implementata.

Infine, troviamo una conferma anche di ciò che avevamo accennato a proposito delle code per valori piccoli del raggio: aumentando la risoluzione esse ora risultano stimate correttamente (o comunque con errori molto più piccoli), e seguono meglio la soluzione analitica. Naturalmente anche in questo caso troveremmo scostamenti per valori sufficientemente piccoli di r (ci sarà sempre una scala di lunghezza al di sotto della quale siamo sensibili agli effetti numerici dovuti alla discretizzazione), ma il loro peso complessivo è trascurabile.

I due pannelli inferiori della Figura 4.21 mostrano come prima due mappe di densità (sempre a $t = 0.011$) nel piano x, y ($z = 0$), per SPH (a sinistra) e GPH-3 (a destra), entrambi ad alta risoluzione, prese dai risultati delle stesse simulazioni mostrate nel pannello superiore. Queste due mappe mostrano in maniera ancora più accentuata le caratteristiche descritte a proposito della simulazione a bassa risoluzione. Nell'SPH vediamo ancora più chiaramente l'instaurarsi di piccole fluttuazioni, che coinvolgono in maniera significativa anche il fronte di shock, e che nel GPH-3 sono completamente regolarizzate dal mixing, che rende come prima i bordi del fronte di shock più simmetrici e meno definiti rispetto all'SPH. Notiamo inoltre che queste piccole fluttuazioni sembrano aumentare con la risoluzione. Ciò è probabilmente dovuto ad un problema numerico di GADGET, vedi discussione in [71]. Benchè le conservazioni di energia ed entropia siano garantite e ben rispettate dalla formulazione entropy-conserving con moltiplicatori Lagrangiani esposta nel secondo capitolo, l'implementazione in GADGET della viscosità artificiale introduce una certa quantità di rumore (*scatter*) in entropia. Le particelle con entropia più elevata risultano avere un'energia termica maggiore delle circostanti, e questo porta alla formazione di disomogeneità che si traducono nelle piccole “bolle” che vediamo. Questo effetto è inoltre amplificato dal fatto che l'implementazione e i parametri usati correntemente per la viscosità artificiale, in presenza di forti shock, non sembrano ancora prevenire del tutto l'interpenetrazione delle varie particelle [71]. Ciò può causare problemi in presenza di time-step locale, com'è il caso per GADGET, ovvero un time-step che non è costante per tutte le particelle, ma è diverso da zero solo per quelle sufficientemente energetiche. Questo permette di diminuire il tempo di calcolo, dato che non tutte le particelle

devono essere fatte evolvere ad ogni intervallo di tempo. Ma se una particella molto energetica *passa attraverso* una poco energetica, quest'ultima inizierà ad interagire e riceverà una certa quantità di energia dalla prima solo dopo che essa è passata, e il sistema evolverà senza tener conto di questa compenetrazione, portando quindi ad un'evoluzione non fisica, o poco fisica, per queste particelle. Non entriamo nel merito di questa discussione, essendo abbastanza delicata. Diremo solo che nel GPH-3 non vi sono i problemi di interpenetrazione fra particelle dovuti alla scelta della viscosità artificiale, dal momento che quest'ultima non è presente. Questo significa che, pur essendoci anche in questo caso un time-step locale (dal momento che anche il GPH è implementato in GADGET), esso ha un effetto molto meno rilevante per quanto concerne il problema appena discusso, e la quantità residua di rumore che può ancora essere presente è regolarizzata dal mixing. Il GPH-3 infatti permette attraverso il mixing di “diffondere” il rumore in entropia o energia, e quindi le particelle molto energetiche tendono a cedere da subito la propria energia o entropia, e questo sopprime l'effetto menzionato.

La Figura 4.22 offre un riassunto di quanto visto fin qui per il test di Sedov. In essa sono riportati i profili radiali di densità estratti dai risultati di tre delle quattro simulazioni illustrate precedentemente: in rosso abbiamo l'SPH a bassa risoluzione, in blu il GPH-3 ad alta risoluzione e in magenta il GPH-3 a bassa risoluzione. Possiamo così meglio apprezzare le differenze fra i risultati del GPH-3 ad alta e bassa risoluzione: il fatto che il massimo aumenti all'aumentare della risoluzione, che la zona immediatamente a sinistra dello shock sia riprodotta sempre più fedelmente e che le code per bassi valori del raggio dipendano anch'esse dal numero di particelle. In più possiamo vedere che la zona di brusca diminuzione della densità (che teoricamente dovrebbe avere derivata infinita), risulta effettivamente molto più ripida nella simulazione ad alta risoluzione. Come già detto a proposito dei risultati dello Shock Tube, le condizioni di Rankine-Hugoniot automaticamente implementate nel Riemann Solver del GPH permettono di trattare naturalmente le discontinuità (a meno di effetti numerici che divengono trascurabili al crescere della risoluzione), come questo grafico ci illustra chiaramente.

Finora ci siamo sempre riferiti a simulazioni con condizioni iniziali gaussiane; ma come abbiamo detto all'inizio della sezione precedente sono stati esaminati altri due tipi di condizioni iniziali: quelle in cui l'energia viene fornita alle particelle centrali secondo una distribuzione che è costante entro una sfera a 32 vicini (cioè le cui dimensioni lineari comprendono 32 vicini, detta finestra a top-hat 32), e la stessa cosa ma con una finestra a 64 vicini (top-hat 64). Il motivo per cui abbiamo mostrato solo i risultati per condizioni iniziali gaussiane è che i tre tipi di condizioni iniziali danno in realtà i medesimi risultati, com'è esemplificato dalla Figura 4.23. In essa sono mostrati i tre andamenti della densità in funzione del raggio per le tre condizioni sopra citate (rosse quelle gaussiane, blu le Top-Hat-32 e magenta le Top-Hat-64), unicamente per l'SPH. Questi risultati sono relativi alle tre simulazioni con kernel spline e 32 vicini per le medie SPH. I tre casi concordano perfettamente, perciò le considerazioni che abbiamo fatto finora si estendono anche alle altre condizioni iniziali. Incidentalmente questa figura mostra inoltre che anche usando 32 vicini invece che 100 per lo smoothing SPH si ottengono risultati altrettanto buoni.

Per finire, in Figura 4.24 riportiamo due mappe di pressione (pannelli di sinistra) e due di entropia (pannelli di destra, in scala logaritmica), relative ai risultati di Figura 4.21 (alta risoluzione, condizioni iniziali gaussiane): in alto per l'SPH e in basso per il GPH-3, per il piano x, y a $t = 0.011$. In questo caso abbiamo una regione centrale a pressione molto alta, residuo della

forte liberazione di energia in quella zona e della rapida espansione del gas, pressione che poi gradualmente diminuisce fino ad azzerarsi oltre lo shock, nella zona in cui le particelle sono ancora in quiete. Dalla mappa dell'SPH vediamo come le fluttuazioni in densità abbiano una controparte in analoghe fluttuazioni locali nella pressione, che anche qui ne rendono l'andamento irregolare e asimmetrico, mentre nel GPH-3 ancora una volta queste irregolarità sono rimosse dal mixing, e l'andamento della pressione è molto più continuo e regolare, oltre ad essere quest'ultima meno intensa nella zona centrale. Le mappe di entropia confermano quanto detto. In esse si vede come l'SPH abbia dei contorni più irregolari, il che riflette quanto trovato negli andamenti di densità e pressione, e una zona centrale più intensa rispetto al GPH-3. Il mixing in entropia la trasferisce dalle zone in cui l'intensità è maggiore alle zone laterali in cui è minore, dove essa si disperde, e questo meccanismo uniforma i bordi rendendoli molto più simmetrici, e attenuando il contrasto fra le varie zone.

4.3. Blob Test

4.3.1. Descrizione e risultati

Riportiamo in questa sezione i risultati del Blob Test [14]. La descrizione è già stata fatta nel paragrafo 3.1.2: si tratta di simulare una nube sferica di gas in equilibrio di pressione con l'ambiente esterno. La nube ha densità uniforme 10 volte superiore all'esterno ed è 10 volte più fredda, e viene sottoposta ad un vento supersonico con numero di Mach $M = 2.7$. Il test è puramente idrodinamico, non vengono considerati nè la gravità nè altri effetti. Il valore dell'indice politropico usato in questo test è $\gamma = 5/3$, e il peso molecolare delle particelle è $\mu = 1$.

Tutte le quantità fisiche sono espresse nelle seguenti unità di misura (che spesso nel seguito sottointenderemo per brevità):

$$\begin{aligned} m_{unit} &= 2.3262 M_{\odot} \\ v_{unit} &= 1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \\ l_{unit} &= 1 \text{ kpc} \\ t_{unit} &\simeq 0.978 \text{ Gyr}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le condizioni iniziali, esse sono descritte dalle seguenti quantità ($cl = \text{nube}$, $ext = \text{ambiente esterno}$, per il significato preciso dei termini cfr. Figura 3.2):

$$\begin{aligned} T_{cl} &= 10^6 K, & T_{ext} &= 10^7 K \\ \rho_{cl} &= 3.13 \times 10^{-7}, & \rho_{ext} &= 3.13 \times 10^{-8} \\ R_{cl} &= 197 \text{ kpc}, & v_{ext} &= 1000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Il volume di simulazione consiste in un parallelepipedo periodico con dimensioni $\{x, y, z\} = \{2000, 2000, 8000\} \text{ kpc}$, e il blob è inizialmente centrato in $\{0, 0, -3000\}$. Le condizioni iniziali sono anche qui di tipo "glass" (vedi descrizione nel test di Sod).

Di seguito sono riportati i risultati di due simulazioni ad alta risoluzione ($\sim 10^7$ particelle) per l'SPH (GADGET-3) e il GPH-3, entrambi con kernel spline, e con 50 vicini usati per lo smoothing SPH. Sono state fatte anche delle simulazioni a bassa risoluzione, ma qui non le riportiamo perchè tutte le conclusioni utili le possiamo trarre (e in modo più preciso) da quelle ad alta risoluzione. Il sistema è stato fatto evolvere fino a $t = 8 t_{unit}$, nelle unità riportate sopra ($t_{unit} \sim 1 \text{ Gyr}$).

I parametri e le condizioni iniziali per le simulazioni sono stati presi dal sito dell'*Astro-Code Wiki*⁷, una risorsa on-line in cui si trovano i software, con relativi test, maggiormente usati nelle simulazioni astrofisiche. Il Blob test fa parte della serie di simulazioni idrodinamiche chiamate "test di Wengen" (*Wengen tests*), poichè originariamente introdotte per un Workshop tenuto a Wengen, in Svizzera, nel 2004.

Le mappe presentate sono state generate con il programma di visualizzazione grafica SPLASH⁸ di D. Price [53].

⁷<http://www.astrosim.net/code/doku.php?id=home:home>

Per i dettagli del Blob Test, vedere:

<http://www.astrosim.net/code/doku.php?id=home:codetest:hydrotest:wengen:wengen3>

⁸<http://users.monash.edu.au/~dprice/splash/>

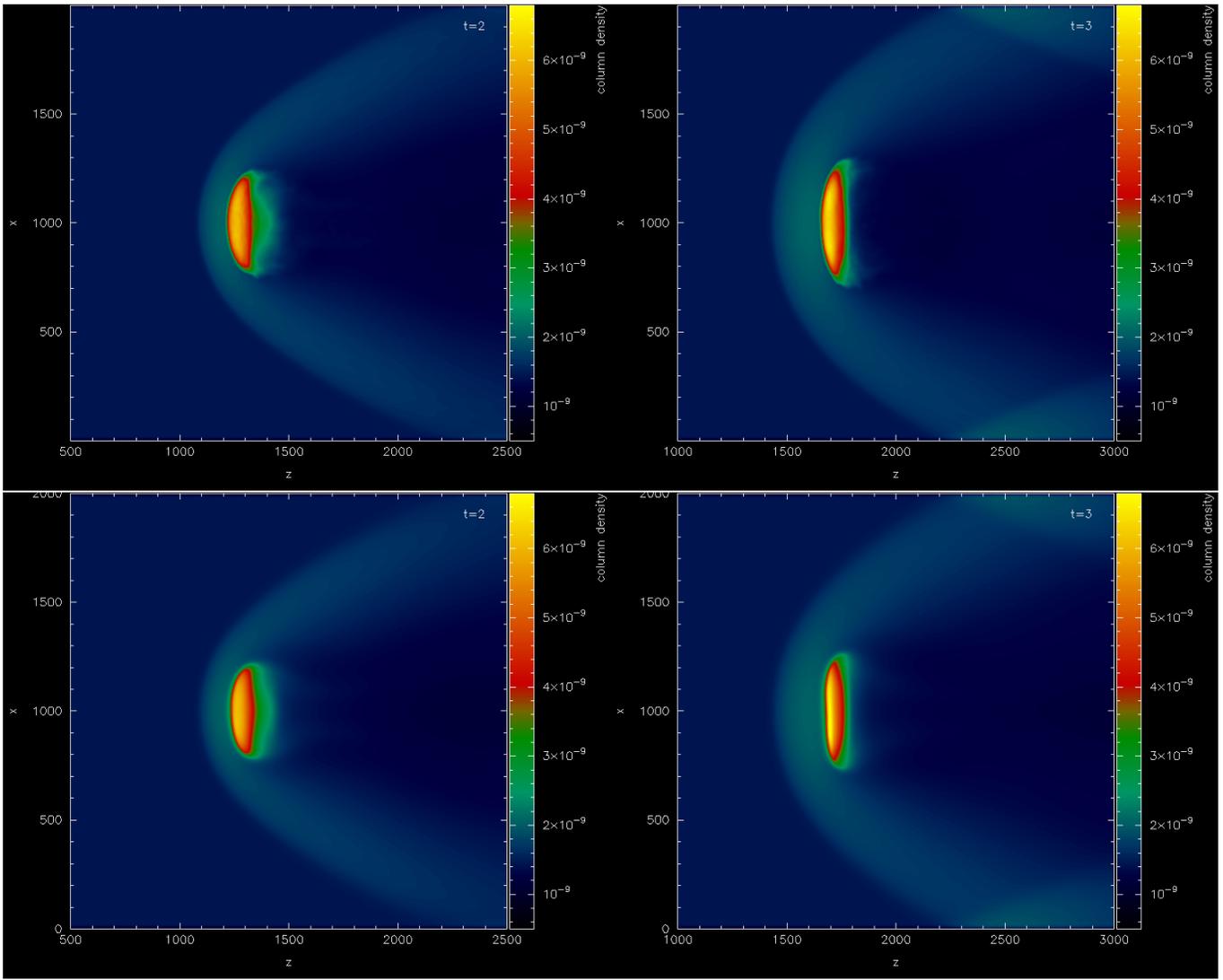


Figura 4.25.: Blob Test: mappe di densità per una sezione centrale del piano x, z a $t = 2, 3$ per l'SPH (sopra) e il GPH-3 (sotto)

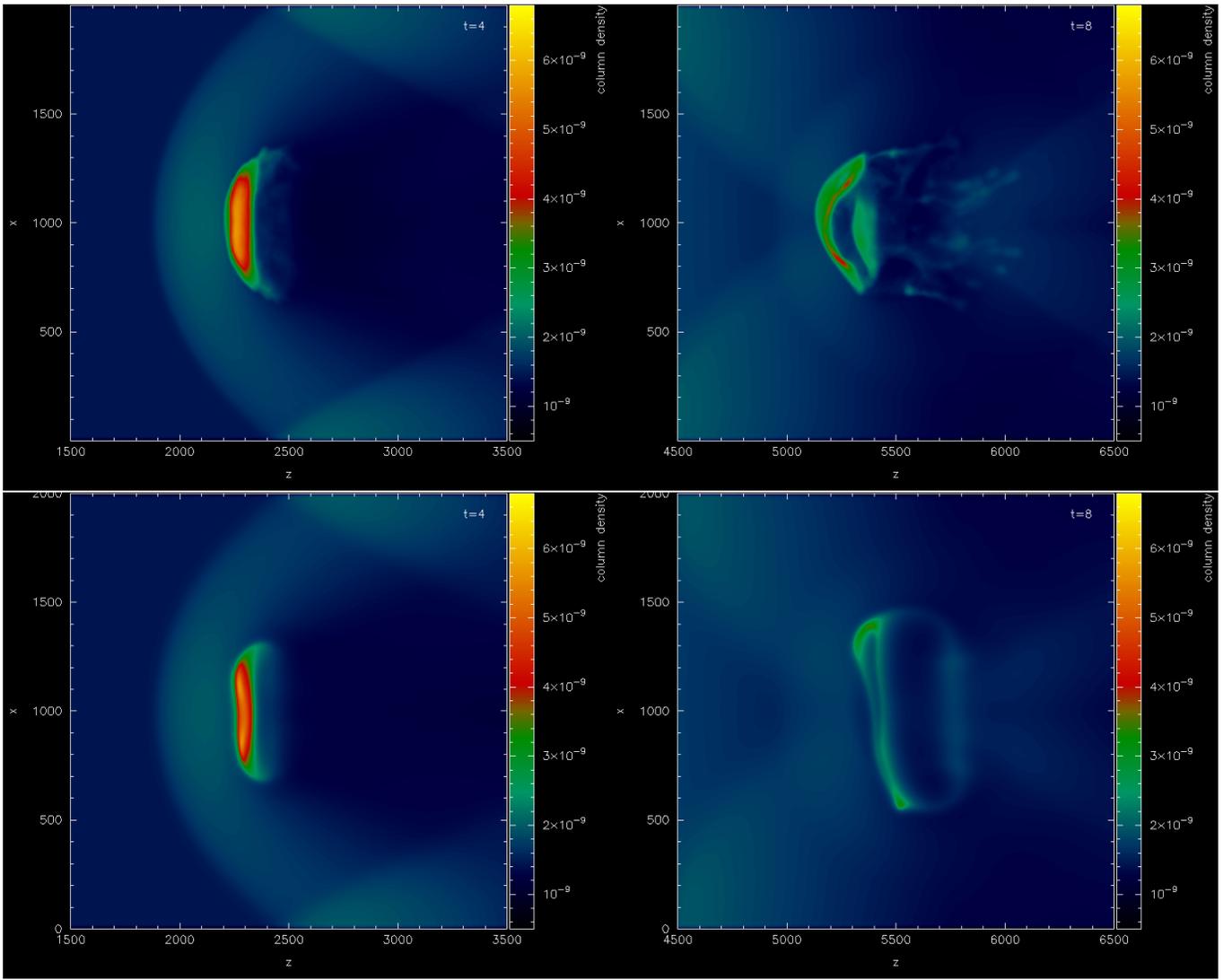


Figura 4.26.: Blob Test: mappe di densità per una sezione centrale del piano x, z a $t = 4, 8$ per l'SPH (sopra) e il GPH-3 (sotto)

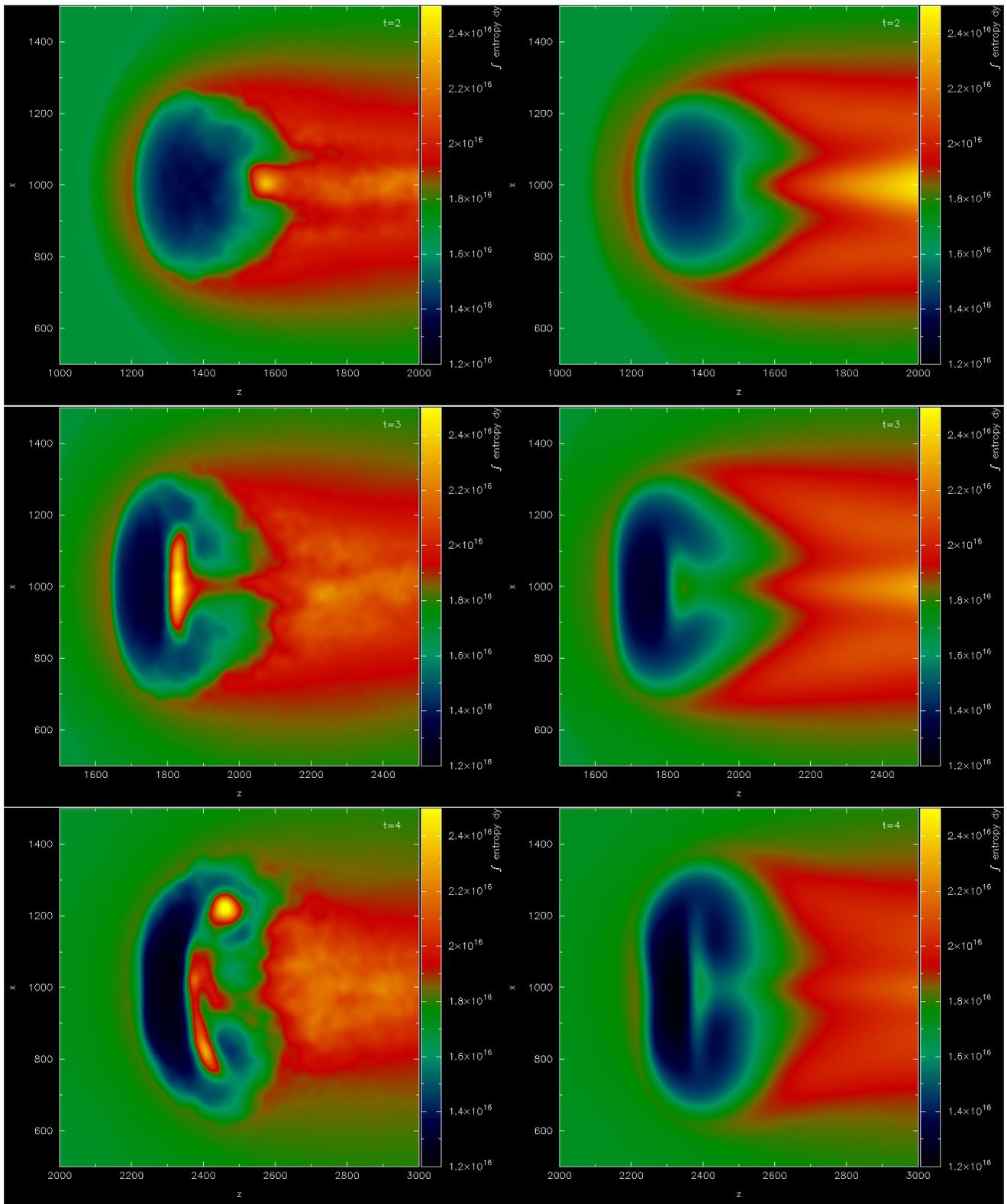


Figura 4.27.: Blob Test: mappa di entropia per una sezione centrale del piano x, z a $t = 2, 3, 4$ per l'SPH (nei tre pannelli di sinistra) e il GPH-3 (nei tre pannelli di destra).

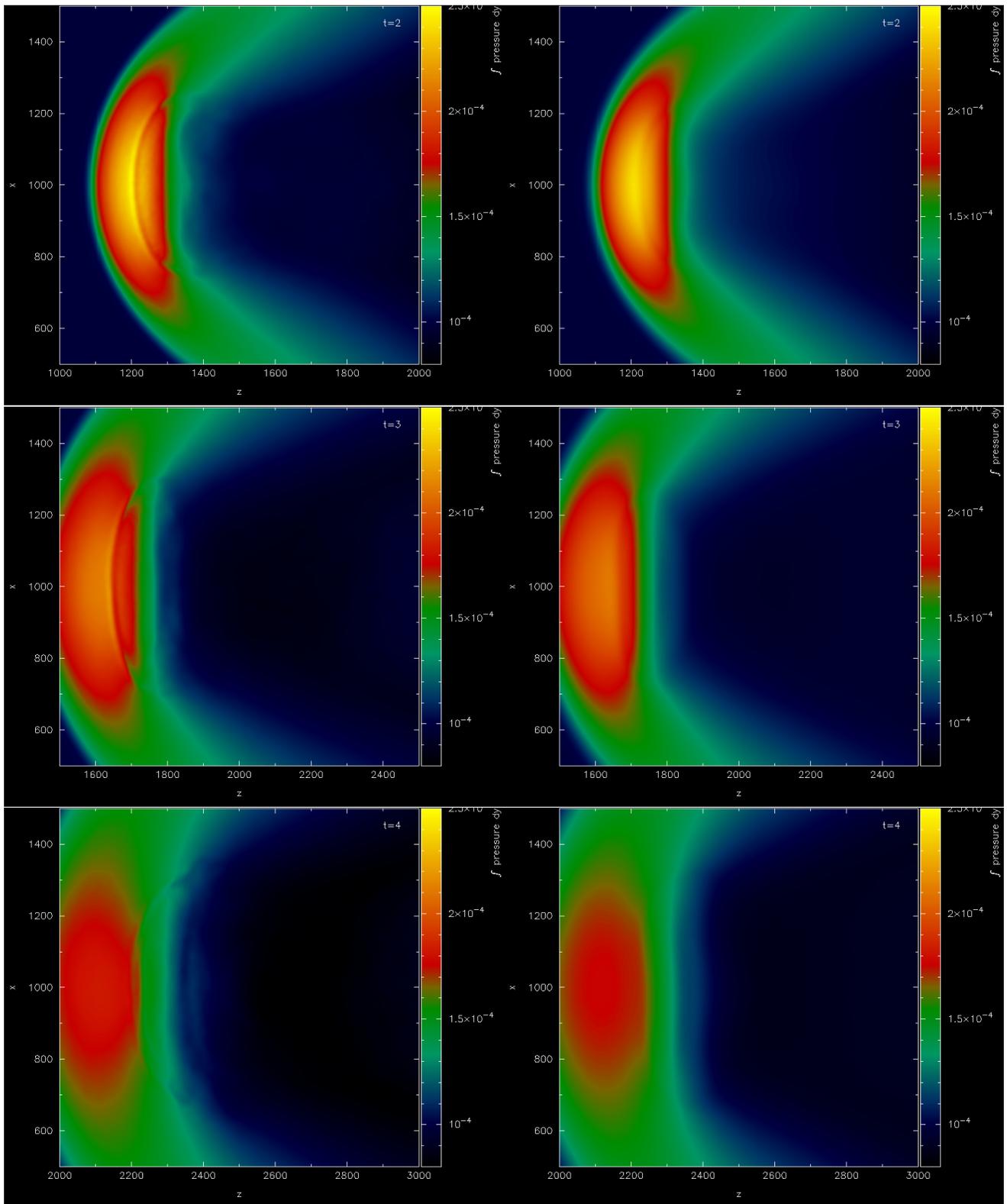


Figura 4.28.: Blob Test: mappa di pressione per una sezione centrale del piano x, z a $t = 2, 3, 4$ per l'SPH (nei tre pannelli di sinistra) e il GPH-3 (nei tre pannelli di destra).

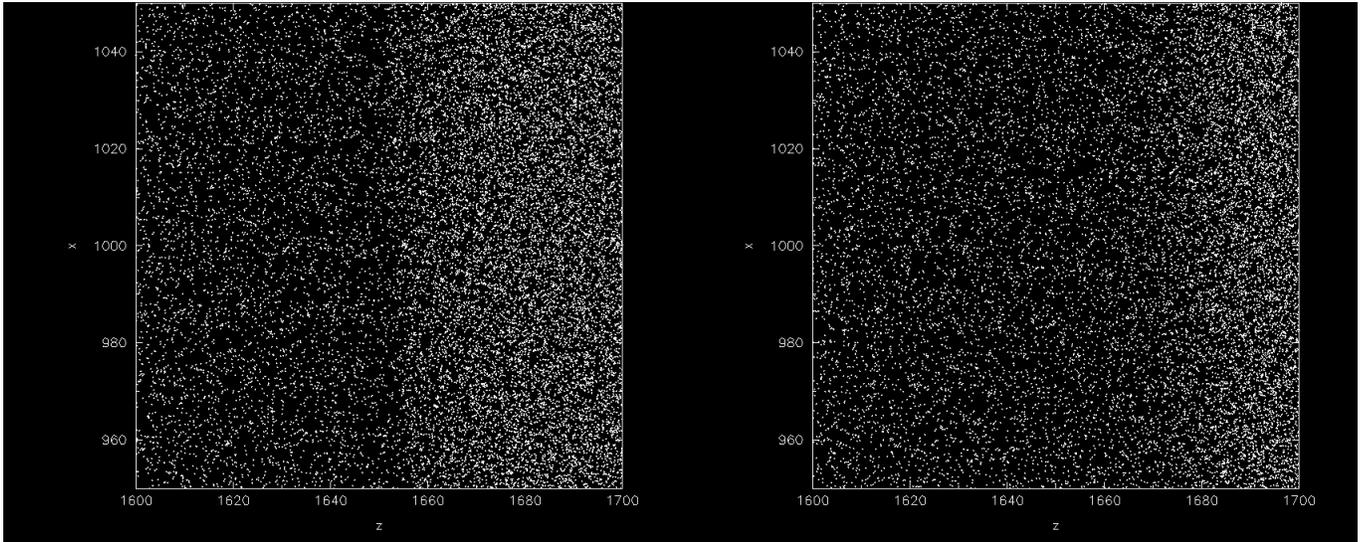


Figura 4.29.: Blob Test: zoom per una sezione centrale del piano x, z dell'interfaccia fra la nube e il mezzo esterno, per l'SPH (sinistra) e il GPH-3 (destra), a $t = 3$

4.3.2. Discussione

Le figure riportate in questa sezione sono decisamente emblematiche per quanto concerne i problemi discussi finora. In particolare ci mostrano esempi concreti delle peculiarità descritte ad esempio a proposito del test di Sod.

Le figure che abbiamo riportato sono complessivamente organizzate in questo modo: per prima cosa mostriamo l'evoluzione del sistema tramite mappe di densità del gas a quattro tempi diversi. Dal primo tempo che dovrebbe essere caratteristico dell'instaurarsi delle instabilità idrodinamiche discusse nel capitolo 3, ovvero le instabilità di Kelvin-Helmholtz e di Rayleigh-Taylor (che si sviluppano su tempi caratteristici diversi, ma a $t = 2$ dovrebbero essere entrambe a pieno regime), arriviamo fino al tempo di rottura della bolla nella simulazione con il GPH-3. In seguito, per indagare più a fondo le differenze fra i due codici, riportiamo delle mappe di entropia, e infine di pressione, per entrambi i codici ai primi tre tempi prima considerati. Infine mostriamo uno zoom dell'interfaccia fra il blob e l'ambiente esterno, ad un tempo intermedio ($t = 3$), che ci fornirà un esempio dei discorsi sulla tensione superficiale artificiale discussa da Price [13]. Passiamo ora ad illustrare in dettaglio questi grafici e a commentarli.

Le prime due figure (Figure 4.25, 4.26) mostrano in tutto otto mappe di densità, nel piano x, z ($y = 0$), di cui quattro relative all'SPH e quattro al GPH-3, prese dai risultati delle simulazioni ad alta risoluzione del blob-test fatte con questi due codici. La prima Figura mostra nei due pannelli superiori le mappe di densità per l'SPH a $t = 2$ e $t = 3$, e nei due pannelli inferiori le mappe per

GPH-3 agli stessi tempi; la seconda Figura mostra analogamente nei due pannelli superiori le mappe SPH a $t = 4$ e $t = 8$, e nei due inferiori le mappe per GPH-3 agli stessi tempi.

L'evoluzione del sistema con SPH e GPH-3 ai primi due tempi sembra essere essenzialmente la stessa, almeno qualitativamente. La bolla risulta schiacciata lungo il piano ortogonale alla direzione in cui si muove, o meglio, visto che siamo in un sistema di riferimento solidale con essa, ortogonale alla direzione della velocità del vento supersonico che la colpisce. Conseguentemente si ha formazione di un'onda d'urto, rappresentata dal fronte più chiaro a sinistra del blob (ricordiamo che il vento esterno si propaga da sinistra verso destra). A $t = 2$, si forma dietro la nube una zona a bassa densità (colore verde-blu), che ai tempi successivi persiste lungo i bordi: si tratta del fenomeno di *overspilling* illustrato nel Capitolo 3, per cui la differenza di pressione fra le zone periferiche e il centro del blob comporta un flusso di massa attraverso le prime, che costituisce il primo meccanismo di destabilizzazione del sistema (di fatto quello dominante nell'SPH, dato che le altre instabilità sono soppresse, vedi sezione 3.1.2). Iniziamo subito a notare la formazione di irregolarità nella scia posteriore della bolla nell'SPH, prodotte da fluttuazioni locali, come abbiamo già visto nel test di Sedov; queste vengono smorzate nel GPH-3, per via del mixing, e infatti in esso le medesime zone risultano più sfumate e prive di irregolarità.

A $t = 4$ le differenze nelle due evoluzioni iniziano ad essere più apprezzabili. Il risultato del GPH-3 inizia ad essere leggermente più asimmetrico rispetto a prima, e la soppressione delle irregolarità più evidente. Infine, si arriva a $t = 8$, l'ultimo tempo mostrato nei due pannelli di destra di Figura 4.26. A questo tempo, mentre nel caso dell'SPH una frazione consistente del gas è ancora concentrata in una zona a medio-alta densità, nel caso del GPH-3 la nube è ormai quasi completamente scomparsa: sono visibili solamente due piccoli frammenti residui, e un alone a bassa densità nella zona prima occupata dal gas del blob, ora quasi completamente disperso nell'ambiente circostante. Nell'SPH, le irregolarità nella scia posteriore appaiono molto più marcate, per via della perdita di massa della bolla che ora è molto più ingente, e per contro nel GPH-3 questo evidenzia maggiormente l'effetto di smorzamento delle fluttuazioni locali, che porta in questo caso a diffondere in maniera più omogenea la massa persa dal blob.

Il confronto fra il modo in cui il blob “scompare” in questo caso, nella simulazione con GPH-3, e il modo in cui scompare nel caso dei codici Euleriani (cfr. Figura 3.3), riportato in Agertz *et al* [14], mette in luce almeno due differenze sostanziali. La prima è relativa ai tempi caratteristici: nel caso Euleriano, a $t \sim 2$ la bolla è ormai praticamente scomparsa, mentre per il GPH-3 dobbiamo aspettare $t \sim 8$. Abbiamo già detto nel Capitolo 3 che a $t \sim 2$ le instabilità idrodinamiche si sono ormai completamente instaurate, e in effetti sono proprio queste ad essere responsabili della distruzione del blob nel caso Euleriano. Il fatto che qui tale distruzione avvenga su tempi-scala quattro volte superiori ci suggerisce che in questo caso essa non dipende solo dalle instabilità, ma coinvolge in qualche modo anche il mixing. A riprova di ciò, la seconda differenza che si nota fra i due codici è che, mentre nel caso Euleriano i frammenti residui del blob sono molto irregolari e presentano moti vorticosi su piccola scala tipici di instabilità di KH, nel GPH-3 il sistema come abbiamo visto non presenta irregolarità. La conclusione che si può trarre è che il GPH-3 si situi in un regime intermedio fra i codici Euleriani e Lagrangiani, in cui il mixing riproduce parte degli effetti che sono assenti in quest'ultimi, ma sopprime le instabilità idrodinamiche che sono responsabili della frammentazione del blob su tempi scala più brevi, e che sono presenti nei primi. Tali instabilità idrodinamiche, che si instaurano a partire da fluttuazioni su piccola scala, sembrano

essere sopresse in parte proprio per il fatto che il mixing del GPH-3 media tali fluttuazioni man mano che si presentano, e quindi esse non hanno modo di amplificarsi.

E' forse il caso di fare un'ulteriore considerazione sulle irregolarità che l'SPH sviluppa, e che avevamo già visto nel test di Sedov. In questo caso, se osserviamo ad esempio la mappa di densità per l'SPH a $t = 4$ e anche $t = 8$ in Figura 4.26, la scia che si trova nella regione dietro la bolla ha l'aspetto di una regione turbolenta; e in effetti questo è quello che ci aspetteremmo, poichè sappiamo che è proprio in quella regione che il flusso da laminare diventa turbolento. Tuttavia non dobbiamo dimenticare che in questo caso non stiamo risolvendo delle vere e proprie equazioni di Navier-Stokes, dal momento che l'unica viscosità presente è quella artificiale, e come abbiamo già avuto modo di ricordare (vedi [14]) essa può essere vista come un misto di viscosità fisica (di *bulk viscosity*) e una componente artificiale (che viene dal termine di vonNeumann-Richtmayer), e quindi non si comporta esattamente come una viscosità fisica. Questo significa che l'interpretazione delle irregolarità come una manifestazione della turbolenza potrebbe non essere corretta. Per questo nella presente sezione non ci riferiamo mai alla turbolenza, ma preferiamo parlare di "irregolarità" o "fluttuazioni".

Possiamo esaminare più in dettaglio come la presenza o assenza di mixing si rapporti ai risultati precedenti prendendo in considerazione delle mappe di entropia per il blob-test. La Figura 4.27 riporta sei mappe di entropia, sempre per una sezione centrale del piano x, z , per SPH (pannelli di sinistra) e GPH-3 (pannelli di destra), a $t = 2, 3, 4$. Seguendo l'evoluzione dell'entropia nei due codici, le differenze sono evidenti. Nell'SPH, a $t = 2$ la nube ha appena iniziato a deformarsi, e gran parte del gas, ancora freddo, si trova ad entropia più bassa rispetto all'ambiente circostante. Nella zona subito dietro di essa si è formata una scia ad alta entropia, in particolare si può vedere una piccola regione più chiara in cui le particelle hanno acquisito una quantità abbastanza elevata di entropia, a seguito dei flussi di materia (e termici) instaurati dall'interazione con il vento supersonico esterno. Tale regione, al tempo successivo ($t = 3$), viene "catturata" dal blob e rimane in certo senso congelata al suo interno. Questa è forse la prova più evidente dell'assenza di mixing di entropia nell'SPH, tant'è che, come ulteriore conferma di questo fatto, a $t = 4$ vediamo che la regione ad alta entropia non è affatto sparita: l'unico effetto che l'evoluzione del sistema ha avuto su di essa è stato di frantumarla e deformarla, ma non vi è stata nessuna diminuzione della sua intensità dovuta ad uno scambio con le particelle circostanti.

Viceversa, nel GPH-3 la situazione cambia radicalmente. In esso a $t = 2$ è visibile la stessa scia sopra descritta, con relativa produzione di entropia, ma già qui il picco locale subito dietro la nube è stato mediato, e vediamo che i contorni fra le diverse regioni non sono quasi mai netti, ma vi sono sempre delle zone intermedie. Il mixing porta il blob non solo ad avere un profilo quasi perfettamente simmetrico, ma anche ad uno scambio delle grosse quantità di entropia prodotte localmente in alcune regioni alle altre particelle circostanti. Le due mappe a $t = 3$ sono emblematiche a questo riguardo. Nell'SPH le particelle della zona centrale ad alta entropia non hanno la possibilità di cederne una parte alle vicine, e quindi tale zona non può diminuire d'intensità.

I test condotti da Agertz *et al* [14] hanno evidenziato chiaramente come il mancato instaurarsi di instabilità idrodinamiche nel caso dell'SPH sia legato alla formazione di una tensione superficiale "artificiale" (cioè, non fisica) lungo i bordi della nube, che induce delle forze di pressione spurie e impedisce una corretta interazione fra la superficie del blob e l'ambiente esterno. Possiamo verificare la presenza di quest'effetto direttamente, generando delle mappe di pressione. La Figura

4.28 mostra sei di queste mappe, tre (a sinistra) per l’SPH e tre (a destra) per il GPH-3. I dettagli sono gli stessi delle mappe di entropia della Figura 4.27. E’ visibile una zona più chiara giallo-arancione che rappresenta la regione del sistema compressa dall’onda d’urto, e che risente dell’effetto di *Ram-pressure* che porta ad un aumento di pressione e temperatura.

Vediamo l’instaurarsi di una discontinuità in pressione già a $t = 2$, in corrispondenza dell’interfaccia fra la nube e il mezzo esterno, che ci fornisce un esempio concreto di quanto discusso a proposito del Test di Sod. Si tratta infatti del “blip” in pressione già riscontrato in quel caso (lo si capisce dal fatto che si può vedere una fascia più chiara subito seguita da una più scura, segno distintivo di una discontinuità *essenziale*, come quella vista nello shock-tube) e commentato anche da Price [13]. Tale blip permane anche ai tempi successivi; a $t = 4$ esso sembra essersi leggermente attenuato, ma in compenso sembra comparirne un altro più piccolo subito dietro. Questa discontinuità agisce di fatto come una sorta di barriera, una membrana che impedisce ai flussi di energia termica di propagarsi correttamente.

Anche in questo caso, il GPH-3 (come già aveva evidenziato il test di Sod), rimuove questa discontinuità, rendendo continuo l’andamento della pressione. Vi è ancora una leggera memoria dell’effetto rappresentata da una variazione più blanda della pressione nella stessa zona, variazione che tuttavia non è sufficiente a mimare una tensione superficiale come nell’SPH, e non sembra comportare conseguenze rilevanti nei risultati visti.

Per finire, in Figura 4.29 è riportato uno zoom delle particelle in prossimità dell’interfaccia fra la nube e il mezzo esterno, ad un tempo intermedio ($t = 3$) per i due codici (a sinistra l’SPH, a destra il GPH). Questo zoom è stato fatto per indagare, sull’esempio della Figura 3.4 [14], più in dettaglio i fenomeni che sono legati alla comparsa del blip in pressione. Nel caso dell’SPH, si ha una separazione abbastanza netta fra le particelle entro la nube e quelle esterne. La brusca variazione della densità all’interfaccia è accompagnata da una zona di leggera rarefazione, che si viene a formare esattamente per il meccanismo descritto in [14] e riassunto nel Capitolo 3, e cioè che l’elevato gradiente di densità porta a dei calcoli erronei delle forze⁹. Nel caso del GPH-3 invece, la separazione fra la zona interna e quella esterna al blob non è più così marcata, e anzi appare alquanto sfumata, dato che il GPH-3 ha mediato il gradiente in densità, per mezzo del mixing rendendo la variazione di quest’ultima meno netta.

⁹Occorre tuttavia ricordare che, come sottolinea Price nel suo articolo [13], la formazione del blip in pressione non è dovuta solo ai forti gradienti in densità, ma anche soprattutto a quelli in energia termica.

Conclusioni

Il presente lavoro di Tesi ha voluto mettere in luce alcuni dei problemi aperti riguardanti i metodi idrodinamici Lagrangiani utilizzati attualmente nelle simulazioni astrofisiche e cosmologiche. Come esposto nell'introduzione, tali metodi stanno acquisendo un'importanza sempre maggiore quale strumento teorico d'indagine dei regimi che non possono essere studiati con metodi analitici. Inoltre essi sono fondamentali in cosmologia per poter fare delle predizioni riguardanti una vasta classe di fenomeni, quali ad esempio la formazione di strutture, l'evoluzione delle singole componenti fino al tempo presente, lo studio di galassie e ammassi di galassie in banda X, da poter confrontare con i dati osservativi. Tali osservazioni, grazie al rapido sviluppo tecnologico e applicativo degli ultimi anni, stanno divenendo sempre più accurate e precise, e ciò comporta una sfida sempre più ardua per le simulazioni, ed il relativo sviluppo di codici, che devono riprodurre sempre meglio una classe crescente di fenomeni fisici complessi e delicati.

Alcuni di questi fenomeni sono stati esaminati nel corso di questa Tesi, principalmente con l'intento di verificare quanto lo schema idrodinamico su cui ci siamo concentrati maggiormente, l'SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*), fosse in grado di riprodurli. Tali fenomeni comprendono gli shock, i flussi locali di entropia ed energia termica, le instabilità idrodinamiche. Dopo aver passato in rassegna le caratteristiche dell'SPH, assieme a quelle degli altri codici principali esistenti, abbiamo visto quali problemi esso presenta nel corretto trattamento di queste situazioni d'interesse fisico. La nostra analisi ci ha permesso di isolare le cause primarie di errore all'interno del metodo, alcune delle quali si sono rivelate essere molto sottili, coinvolgendo elementi fondamentali per il suo corretto funzionamento.

Le due fonti principali dei problemi dell'SPH risultano essere la viscosità artificiale e l'assenza di mixing in entropia. La prima è stata introdotta come abbiamo visto per poter risolvere correttamente le discontinuità e gli shock. Tuttavia la sua presenza, benchè necessaria, impedisce la corretta riproduzione dei moti vorticosi su piccola scala, che sono una delle cause delle instabilità idrodinamiche, come ha evidenziato l'analisi compiuta da Agertz et al. [14] a proposito del Blob Test, oltre ad avere altri "effetti collaterali", quali la sua accensione in zone in cui non dovrebbe essere presente, ad esempio zone a densità molto elevata. Nel test di Sedov poi abbiamo visto come la viscosità artificiale, nonostante i termini alla Von Neumann - Richtmyer che incorpora, e che sono nati a questo scopo, non sia del tutto in grado di impedire l'interpenetrazione fra le particelle in presenza di forti shock [71], e come questo causi delle fluttuazioni locali in densità e pressione, che aumentano all'aumentare della risoluzione.

Per quanto riguarda il secondo punto, e cioè l'assenza di mixing, esso è una caratteristica tipica dei codici Lagrangiani. Questi ultimi infatti non riproducono esplicitamente, come avviene nei codici Euleriani, i flussi locali fra i vari elementi di fluido, perchè i volumi di riferimento considerati non sono fissi, ma “seguono” le particelle (vedi sezione 2.4). Abbiamo già avuto modo di notare in sezione 3.1.2 che questo è un punto molto delicato, in quanto la presenza esplicita di termini “avvettivi” nelle equazioni del moto¹⁰, se nei metodi Euleriani permette di riprodurre correttamente i flussi delle quantità termodinamiche fra gli elementi di fluido, rompe però l'invarianza Galileiana del sistema, problema almeno altrettanto grave del precedente. Nei metodi Lagrangiani la viscosità artificiale consente di avere una piccola quantità di mixing del momento, ma non dell'energia interna o dell'entropia, per cui sarebbe necessaria un'analogia *conduttività termica artificiale* [13]. Quest'assenza di mixing causa problemi in alcuni tipi di discontinuità, come la discontinuità di contatto nel Sod Tube, e in generale porta alla formazione di forze di pressione spurie, o “tensioni superficiali artificiali” [13], nelle zone in cui vi siano forti gradienti di densità ed energia termica.

La ricerca di un metodo per incorporare nell'SPH questi flussi, in particolare il mixing dell'entropia, ci ha condotti all'implementazione del GPH (*Godunov-type Particle Hydrodynamics*), un metodo ibrido che combina l'SPH con un Riemann solver, ovvero un metodo per calcolare i flussi delle quantità termodinamiche fra le varie coppie di particelle. Questo metodo non ha bisogno di alcuna viscosità artificiale per risolvere le discontinuità, in quanto incorpora automaticamente le condizioni di Rankine-Hugoniot, che come abbiamo discusso in sezione 2.2 e 3.2.1 sono le condizioni che le quantità termodinamiche devono necessariamente soddisfare alle discontinuità, in particolare agli shock. Esso inoltre introduce, per mezzo del Riemann solver, una quantità di mixing intrinseco di entropia, senza bisogno di ulteriori termini artificiali, come la conduttività termica introdotta da Price [13].

I risultati delle simulazioni che abbiamo eseguito, per i tre test considerati, ovvero quelli di Sod, di Sedov, e il Blob test, hanno messo in luce molto bene gli aspetti dei due codici che abbiamo delineato. E' emerso chiaramente dai test di Sod e Sedov come il GPH catturi bene gli shock senza viscosità artificiale, elemento molto importante visti i problemi che quest'ultima comporta nell'SPH. In particolare dal test di Sod si è visto come il GPH elimini quasi del tutto la discontinuità in pressione che si forma in corrispondenza della discontinuità di contatto. Tale discontinuità l'abbiamo ritrovata nel Blob test, dove dalle mappe di pressione è emerso come all'interfaccia fra il blob e l'ambiente esterno si crei una discontinuità analoga a quella vista nello shock tube, che agisce come una membrana fittizia, e impedisce la corretta riproduzione dei flussi attraverso di essa. Il GPH anche in quel caso rimuoveva la discontinuità, restituendo un profilo continuo e più uniforme.

Il mixing del GPH, responsabile del corretto trattamento dei forti gradienti di energia interna che sono la causa della comparsa del “blip” in pressione nell'SPH, ha rivelato oltre a questo ulteriori pregi e difetti. Nel test di Sedov abbiamo visto come esso regolarizzasse le fluttuazioni locali presenti nei risultati dell'SPH, fluttuazioni che come abbiamo già accennato sono con tutta probabilità di natura puramente numerica [71]. Oltre a questo, è emerso come la quantità di mixing presente fra le particelle dipenda dal numero delle stesse, ovvero dalla risoluzione della

¹⁰Ricordiamo che i termini avvettivi nelle equazioni del moto sono i termini del tipo $\mathbf{v} \cdot \nabla(\dots)$, che derivano dall'utilizzo della derivata temporale in forma Euleriana: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$.

simulazione. Con una maggiore risoluzione, il GPH riproduce molto meglio la soluzione esatta, e come abbiamo visto diminuisce sensibilmente l'effetto di "ritardo", e il massimo del fronte di shock risulta correttamente più alto. Ma è nel blob test che, oltre a questi pregi del codice, si iniziano a vedere alcuni difetti.

Anche in esso abbiamo visto come il GPH rimuova le irregolarità e le fluttuazioni locali dell'SPH, e come introduca chiaramente del mixing in entropia che nell'SPH è del tutto assente. Infatti dalle mappe di entropia presentate è risultato evidente come le regioni ad alta entropia, quando a contatto con altre a bassa entropia, si comportino in maniera completamente diversa nei due codici. Nell'SPH esse *rimangono ad alta entropia*, e l'unico effetto che l'evoluzione del sistema sembra avere è di frantumare queste regioni, a causa dei flussi di massa che si generano in questo test fra la nube e il mezzo esterno. Questo è un comportamento poco fisico, in quanto ci aspettiamo che le particelle cedano parte della propria entropia, se essa è molto alta, alle particelle circostanti con entropia più bassa. Ciò è proprio quanto succede nel GPH: in esso non si formano mai dei picchi troppo elevati di entropia, poichè il mixing fa sì che questa venga scambiata fra le particelle vicine, così da attenuare i gradienti fra le varie regioni. Inoltre il blob, nel caso del GPH, a differenza dell'SPH, dopo alcuni tempi caratteristici svanisce. Questo però sembra avvenire in modo non corretto, primo perchè i tempi scala sono circa 4 volte superiori a quelli tipici delle instabilità idrodinamiche [14], e secondo perchè dalle mappe di densità non si riscontrano gli andamenti che si vedrebbero se effettivamente queste ultime avessero un ruolo decisivo nella scomparsa del blob¹¹. Da ciò siamo portati a concludere che il mixing del GPH sia "troppo efficiente" in questo caso, e che questo, smorzando le fluttuazioni locali, impedisca alle instabilità idrodinamiche di formarsi e dar luogo ai processi che abbiamo illustrato nel Capitolo 3.

Questo punto richiederà certamente nel prossimo futuro delle indagini più accurate, per determinare se effettivamente vi sia una quantità di mixing eccessiva ed "irrimediabile" in questo metodo, o se siano possibili delle varianti del metodo stesso in grado di risolvere questo problema. Dal momento che la quantità di mixing è gestita dal Riemann solver, una delle possibili linee di sviluppo future potrebbe consistere nell'implementazione di un Riemann solver diverso (magari di ordine superiore). Attualmente si sta lavorando ad una modifica dello stesso che permetta di *ricostruire* più correttamente i valori di velocità e pressione alla posizione dell'interfaccia virtuale attraverso cui vengono calcolati i flussi. Essenzialmente, il Riemann solver che abbiamo utilizzato (vedi sezione 3.2.2) estrapola i valori di velocità e pressione ai due lati dell'interfaccia, partendo dai corrispondenti valori della coppia di particelle che sta considerando, come se essi rimanessero *costanti* dalle posizioni delle particelle fino all'interfaccia. Una possibile variante è quella di compiere una *ricostruzione lineare* di queste quantità, dalle posizioni delle particelle considerate fino alla posizione dell'interfaccia. Un'esposizione dettagliata di questo punto tuttavia esula dagli scopi di questa sezione.

Per eseguire le simulazioni, il GPH è stato implementato in GADGET-3. Benchè questo metodo non fosse nuovo [10, 12], questa è la prima volta che esso viene implementato in GADGET. L'implementazione nel GPH, invece, dei moltiplicatori Lagrangiani, usati nella versione di GADGET dell'SPH, è, per quanto ne sappiamo, la prima che sia stata realizzata. Tuttavia, come l'analisi relativa nel test di Sod ha evidenziato, il GPH che abbiamo utilizzato è già pienamente conser-

¹¹Ad esempio, i moti vorticosi su piccola scala tipici delle instabilità di Kelvin-Helmholtz

vativo, e l'introduzione dei moltiplicatori Lagrangiani non migliora la conservazione dell'energia. Un aspetto interessante emerso a questo proposito è che il GPH sembra essere *più* conservativo dell'SPH implementato in GADGET, anche se lo scarto percentuale è molto basso. Un'ipotesi, che andrebbe verificata più a fondo, è che anche questo fenomeno dipenda dalla presenza della viscosità artificiale. Essa infatti è in qualche modo *estranea* alla derivazione variazionale da cui si ricavano le equazioni dell'SPH usato in GADGET. Se nel sistema fosse realmente presente una viscosità, la stessa derivazione cadrebbe, dato che questo non sarebbe più conservativo. Ciò che si fa in pratica è di fingere che tale viscosità artificiale sia *del tutto assente*, derivare le equazioni con quest'assunzione, e poi aggiungerla a mano alla fine. Nel GPH invece non solo tale viscosità non è presente, ma l'introduzione del Riemann solver, per come esso è costruito, non comporta problemi nella derivazione variazionale, rendendo teoricamente più autoconsistente quest'ultimo approccio.

Il prossimo passo importante riguardante il GPH consisterà in una simulazione cosmologica, molto probabilmente il Santa Barbara Cluster [16]. Una simulazione del genere, la prima di tipo cosmologico per il GPH, dovrebbe fornire ulteriori elementi interessanti per meglio comprendere il funzionamento e la validità di questo schema idrodinamico.

Negli scopi originari della Tesi, vi era anche l'implementazione del metodo di Inutsuka, detto anche "metodo dei volumi", in quanto garantisce la conservazione del volume complessivo di smoothing (cioè la somma dei volumi di smoothing relativi a ciascuna particella). Tale metodo, come abbiamo sottolineato in sezione 3.3, ha delle basi teoriche più solide nella derivazione delle equazioni del moto, rispetto all'SPH standard. Purtroppo, si sono subito riscontrati problemi nella generalizzazione delle equazioni di questo metodo al kernel spline. Non è stato infatti possibile risolvere gli integrali presenti nelle equazioni del moto di velocità ed energia con tale kernel, arrivando ad una forma analogamente compatta delle equazioni. Si è allora tentata l'implementazione del metodo con kernel *gaussiano*. Essa sembra funzionare nel caso del test di Sod, ma presenta problemi inaspettati negli altri due test, tanto che i relativi risultati sono stati omessi dalla presente Tesi, in attesa di chiarimenti maggiori e ulteriori indagini sull'origine di questi problemi. L'implementazione del metodo di Inutsuka, invece, si è rivelata problematica già nel caso dello shock tube. Questi problemi necessitano di ulteriori studi, in particolare è necessario comprendere quanto essi siano intrinseci al metodo, e quanto siano legati alla presenza del kernel gaussiano. Riguardo a quest'ultimo, poi, occorre capire meglio quanto i problemi che solleva siano legati alla sua forma funzionale particolare, e quanto alla sua *implementazione*. Le possibili linee di sviluppo futuro in questo senso possono essere essenzialmente di due tipi. La prima linea, di carattere più teorico, consiste nell'approfondire la derivazione data da Inutsuka delle sue equazioni per l'SPH, capire se possono essere ulteriormente generalizzate o cambiate, e soprattutto capire quanto l'uso del kernel gaussiano incida sui risultati. La seconda linea, di carattere più computazionale, consiste nell'approfondire l'implementazione del kernel gaussiano, e i problemi che questo può comportare, in un codice come GADGET.

Per tornare all'argomento principale della Tesi, che è il confronto fra il metodo GPH e l'SPH, le conclusioni più importanti che possiamo trarre in definitiva sono le seguenti:

- Il GPH risolve parte dei problemi presenti nell'SPH, in particolare quelli legati alla viscosità artificiale, dato che quest'ultima nel GPH è assente, e quelli legati all'assenza di mixing. Assieme a questo, il GPH è in grado di riprodurre correttamente gli stessi risultati (anzi,

persino migliori) dell'SPH nei test fluidodinamici standard come i test di Sod e Sedov; in particolare esso risolve correttamente gli shock anche senza la viscosità artificiale.

- Nonostante questi pregi, la quantità di mixing presente nel GPH sembra essere eccessiva e questo impedisce il corretto trattamento di fenomeni fisici importanti come le instabilità idrodinamiche.

Per questi motivi, come abbiamo già accennato, il GPH si situa in un certo senso in una posizione intermedia fra i metodi Lagrangiani e quelli Euleriani, conservando i pregi dei primi (adattività intrinseca, conservazioni automaticamente soddisfatte, invarianza Galileiana) e introducendo alcuni pregi dei secondi (flussi intrinseci di quantità termodinamiche fra gli elementi di volume e mixing); ma le due componenti non sembrano ancora *bilanciarsi* alla perfezione. Se in futuro si riusciranno a calibrare bene i diversi contributi che questo metodo implementa, di certo esso fornirà un nuovo, potente strumento per simulazioni più accurate e realistiche.

A. Riassunto delle equazioni principali di SPH e GPH

A.1. Equazioni dell'SPH

- CASO 1:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, \bar{h}_{ij}) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, \bar{h}_{ij}) \quad (\text{A.2})$$

- CASO 2:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -2 \sum_j m_j \left(\frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, \bar{h}_{ij}) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m_j \left(\frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, \bar{h}_{ij}) \quad (\text{A.4})$$

- CASO 3:

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left[\frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) + \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_j) \right] \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{du_i}{dt} = - \sum_j m_j (\mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \left[\frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) + \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_j) \right]. \quad (\text{A.6})$$

- CASO "4"¹:

¹Le virgolette servono a ricordare che queste equazioni non sono direttamente implementabili, ma servono unicamente come referencia. Per implementarle numericamente è necessaria qualche approssimazione, come le interpolazioni che abbiamo visto delle quantità entro gli integrali.

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = - \sum_j m_j \int \frac{P(\mathbf{x})}{\rho^2(\mathbf{x})} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \right] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) d\mathbf{x}, \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{u}_i = \sum_j m_j \int \frac{P(\mathbf{x})}{\rho^2(\mathbf{x})} [\mathbf{v} - \mathbf{x}_i] \cdot \{ \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) - W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \} d\mathbf{x}. \quad (\text{A.8})$$

A.2. Equazioni del GPH

In queste equazioni, le quantità con l'asterisco sono le risultanti del Riemann solver, come descritto in sezione 3.2.

- **CASO 1:**

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j P^* \left(\frac{1}{\rho_i^2} + \frac{1}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h_{ij}) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j P^* \left(\frac{1}{\rho_i^2} + \frac{1}{\rho_j^2} \right) \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h_{ij}) \quad (\text{A.10})$$

- **CASO 2:**

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -2 \sum_j m_j \frac{P^*}{\rho_i \rho_j} \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h_{ij}) \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m_j \frac{P^*}{\rho_i \rho_j} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_{ij}, h_{ij}) \quad (\text{A.12})$$

- **CASO 3:**

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j P^* \left[\frac{1}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) + \frac{1}{\rho_j^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} W(\mathbf{r}_{ij}, h_j) \right] \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m_j P^* (\mathbf{v}^* - \mathbf{r}_i^*) \cdot \left[\frac{1}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) + \frac{1}{\rho_j^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} W(\mathbf{r}_{ij}, h_j) \right] \quad (\text{A.14})$$

- **CASO 4:**

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = - \sum_j m_j P^* \left[V_{ij}^2(h_i) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \sqrt{2}h_i) + V_{ij}^2(h_j) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \sqrt{2}h_j) \right], \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{u}_i = - \sum_j m_j ([P\mathbf{v}]^* - P^*\dot{\mathbf{x}}_i) \left[V_{ij}^2(h_i) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \sqrt{2}h_i) + V_{ij}^2(h_j) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \sqrt{2}h_j) \right], \quad (\text{A.16})$$

con:

$$V(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}$$

e

$$\begin{aligned} V_{ij}^2(h) &= \frac{1}{4}h^2 C_{ij}^2 + D_{ij}^2, \\ C_{ij} &= \frac{V(\mathbf{x}_i) - V(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_{ij}|}, \\ D_{ij} &= \frac{V(\mathbf{x}_i) + V(\mathbf{x}_j)}{2}, \end{aligned}$$

nell'interpolazione lineare, e:

$$\begin{aligned} V_{ij}^2(h) &= \frac{15}{64}h^6 A_{ij}^2 + \frac{3}{16}h^4 (2A_{ij}C_{ij} + B_{ij}^2) + \frac{1}{4}h^2 (2B_{ij}D_{ij} + C_{ij}^2) + D_{ij}^2, \\ A_{ij} &= -2 \frac{V(\mathbf{x}_i) - V(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_{ij}|^3} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_{ij} \cdot \nabla [V(\mathbf{x}_i) + V(\mathbf{x}_j)]}{|\mathbf{x}_{ij}|^2}, \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{\hat{\mathbf{x}}_{ij} \cdot \nabla [V(\mathbf{x}_i) - V(\mathbf{x}_j)]}{|\mathbf{x}_{ij}|}, \\ C_{ij} &= \frac{3}{2} \frac{V(\mathbf{x}_i) - V(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_{ij}|} - \frac{1}{4} \hat{\mathbf{x}}_{ij} \cdot \nabla [V(\mathbf{x}_i) + V(\mathbf{x}_j)], \\ D_{ij} &= \frac{1}{2} [V(\mathbf{x}_i) + V(\mathbf{x}_j)] - \frac{1}{8} \hat{\mathbf{x}}_{ij} \cdot \nabla [V(\mathbf{x}_i) - V(\mathbf{x}_j)] |\mathbf{x}_{ij}|, \end{aligned}$$

nell'interpolazione cubica.

B. SPH: Formulazione con moltiplicatori Lagrangiani

La Lagrangiana in questo caso è:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_i m_i \frac{1}{\gamma - 1} A_i \rho_i^{\gamma-1}, \quad (\text{B.1})$$

in cui \mathbf{q} è un vettore $6N$ -dimensionale, $\mathbf{q} \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, h_1, \dots, h_N)$, h_i è la lunghezza di smoothing per la particella i , N è il numero di particelle, e A_i è la “funzione entropica” (discretizzata), definita dalla relazione seguente:

$$P = A(s) \rho^\gamma, \quad (\text{B.2})$$

in cui P è la pressione, s l’entropia specifica; questa relazione implica che

$$u = \frac{A}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1}, \quad (\text{B.3})$$

in cui u è l’energia interna specifica. Sostituendo quest’ultima relazione nella Lagrangiana solita dell’SPH, eq. (2.102), si ottiene la forma (B.1). Come al solito si ha

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_i). \quad (\text{B.4})$$

La formulazione entropy-conserving è ricavata imponendo alla Lagrangiana (B.1) gli N vincoli:

$$\phi_i(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{3} h_i^3 \rho_i - M_{sph} = 0, \quad (\text{B.5})$$

con $M_{sph} = m N_{sph}$, dove m è la massa media delle particelle e N_{sph} il numero medio di vicini, e considerando \mathbf{r}_i e h_j come variabili indipendenti. Le equazioni di Eulero-Lagrange in questo caso sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}. \quad (\text{B.6})$$

Inserendovi la Lagrangiana (B.1), troviamo, per $q_i = h_i$:

$$\sum_i A_i m_i \rho_i^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_j} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial h_j}, \quad (\text{B.7})$$

e da (B.5) si ha:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial h_j} = 4\pi h_i^2 \rho_i \delta_{ij} + \frac{4\pi}{3} h_i^3 \frac{\partial \rho_i}{\partial h_j}. \quad (\text{B.8})$$

Si trova quindi, usando anche la relazione (B.2):

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{3m_i}{4\pi h_i^3} \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_j} &= \sum_i \lambda_i \left[\frac{\partial \rho_i}{\partial h_j} + \frac{3\rho_i}{h_i} \delta_{ij} \right] \\ &= \sum_i \lambda_i \frac{\partial \rho_i}{\partial h_j} \left[1 + \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial h_j} \right)^{-1} \frac{3\rho_i}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial h_j} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

da cui la forma dei moltiplicatori Lagrangiani:

$$\lambda_i = \frac{3m_i}{4\pi h_i^3} \frac{P_i}{\rho_i^2} \left[1 + \frac{3\rho_i}{h_i} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1} \right]^{-1}. \quad (\text{B.10})$$

A questo punto, dalle equazioni di Eulero-Lagrange per $q_i = r_i$, si trova:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{r}_j} \\ &= - \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla_i \rho_j + \sum_j \lambda_j \frac{4\pi}{3} h_j^3 \nabla_i \rho_j \\ &= - \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla_i \rho_j \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{3\rho_j}{h_j} \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial h_j} \right)^{-1}} \right] \\ &= - \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla_i \rho_j \left[1 + \frac{h_j}{3\rho_j} \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial h_j} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Usando la relazione

$$\nabla_i \rho_j = m_i \nabla_i W_{ij}(h_j) + \delta_{ij} \sum_k m_k \nabla_i W_{ki}(h_i), \quad (\text{B.12})$$

troviamo infine l'equazione cercata:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left[f_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + f_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right], \quad (\text{B.13})$$

in cui

$$f_i \equiv \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1}. \quad (\text{B.14})$$

Bibliografia

- [1] K. Huang, “Meccanica Statistica”, Zanichelli, Bologna 1997
- [2] L. Landau, E. Lifshitz, “Fluid mechanics”, Course of theoretical physics vol. 6, Pergamon Press, Oxford 1987
- [3] M. Vietri, “Astrofisica delle alte energie”, Bollati Boringhieri, Torino 2006
- [4] K. Dolag, S. Borgani, S. Schindler, A. Diaferio, A.M. Bykov, “Simulation techniques for cosmological simulations” (2008), astro-ph/0801.1023v1
- [5] V. Springel, “The cosmological simulation code GADGET-2” (2005), astro-ph/0505010v1
- [6] J.J. Monaghan, “Smoothed particle hydrodynamics”, Rep. Prog. Phys. **68**, 1703-1759 (2005)
- [7] S. Rosswog, “Astrophysical smooth particle hydrodynamics” (2009), astro-ph/0903.5075v1
- [8] S. Inutsuka, “Reformulation of Smoothed Particle Hydrodynamics with Riemann solver”, J. Comp. Phys. **179**, 238-267 (2002)
- [9] S. Inutsuka, Y. Imaeda, “Reformulation of Smoothed Particle Hydrodynamics for Astrophysical Fluid Dynamics”, Comp. Fluid Dyn. J. vol.9 n.4 (2001)
- [10] S.-H. Cha, “The collapse of rotating clouds”, PhD Thesis, Cardiff University (2002)
- [11] L. Tornatore, “Hydrodynamical Simulations of Galaxy Clusters: Thermodynamics and Chemical Enrichment”, PhD Thesis, Università di Trieste (2004), disponibile all’indirizzo http://adlibitum.oat.ts.astro.it/borgani/Tesi/Tornatore_phd/thesis.pdf
- [12] S.-H. Cha, A.P. Whitworth, “Implementations and tests of Godunov-type particle hydrodynamics”, MNRAS **340**, 73-90 (2003)
- [13] D.J. Price, “Modelling discontinuities and Kelvin-Helmholtz instabilities in SPH” (2008), astro-ph/0709.2772v3
- [14] O. Agertz *et al*, “Fundamental differences between SPH and grid methods”, MNRAS **380**, 963-978 (2007)
- [15] J.W. Wadsley, G. Veeravalli, H.M.P. Couchman, “On the treatment of entropy mixing in numerical cosmology”, MNRAS **387**, 427-438 (2008)

- [16] C.S. Frenk *et al*, “The Santa Barbara Cluster Comparison Project: A comparison of cosmological hydrodynamics solutions”, *ApJ* **525**, 554-582 (1999)
- [17] V. Springel, L. Hernquist, “Cosmological smoothed particles hydrodynamics simulations: the entropy equation”, *MNRAS* **333**, 649-664 (2002)
- [18] M. Roncadelli, “Aspetti astrofisici della materia oscura”, Bibliopolis, Napoli 2004
- [19] S. Borgani, A. Kravtsov, “Cosmological simulations of galaxy clusters” (2009), astro-ph/0906.4370
- [20] L. Mayer, F. Governato, T. Kaufmann, “The formation of disk galaxies in computer simulations” (2008), astro-ph/0801.3845v1
- [21] L. Mayer, “Foreword: ASL Special Issue on Computational Astrophysics” (2009), astro-ph/0906.4485v1
- [22] G.A. Sod, *J. Comp. Phys.* **27**, 1 (1978)
- [23] T. Ito, J. Makino, T. Fukushige, *et al.* 1993, *PASJ*, 45, 339
- [24] Barnes, J. & Hut, P. 1986, *Nature*, 324, 446
- [25] I.J. Schoenberg (1946) “Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions: part A” *Q. Appl. Math.* **IV** 45–99
- [26] J.J. Monaghan, R.A. Gingold, “Shock simulation by the particle method SPH”, *J. Comput. Phys.* **52**, 374–89 (1983)
- [27] J.J. Monaghan, “Smoothed particle hydrodynamics” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **30**, 543–74 (1992)
- [28] D. S. Balsara, “von Neumann stability analysis of smooth particle hydrodynamics—suggestions for optimal algorithms”, *J. Comput. Phys.* **121**, 357–72 (1995)
- [29] A. Colagrossi, “A meshless Lagrangian method for free-surface and interface flows with fragmentation”, PhD Thesis Università di Roma, La Sapienza (2004)
- [30] R.A. Gingold, J.J. Monaghan, “Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars” *MNRAS* **181**, 375–89 (1977)
- [31] L. Hernquist, *ApJ* **404**, 717 (1993)
- [32] Y. Fujita, M. Takizawa, C. L. Sarazin, *ApJ* **584**, 190 (2003)
- [33] J. Cho, A. Lazarian, *J. Korean Astron. Soc.* **37**, 557 (2004)
- [34] S. Chandrasekhar, “Hydrodynamic and hydromagnetic instability”, Clarendon Press, Oxford 1961

- [35] K. Dolag, F. Vazza, G. Brunetti, G. Tormen, MNRAS **364**, 753 (2005)
- [36] B. W. Ritchie, P. A. Thomas, MNRAS **323**, 743 (2001)
- [37] E. R. Tittley, F. R. Pearce, H. M. P. Couchman, ApJ **561**, 69 (2001)
- [38] T. Okamoto, A. Jenkins, V. R. Eke, V. Quilis, C. S Frenk., MNRAS **345**, 429 (2003)
- [39] F. R. Pearce et al., ApJ **521**, L99 (1999)
- [40] R. J. Thacker, E. R. Tittley, F. R. Pearce, H. M. P. Couchman, P. A. Thomas, MNRAS **319**, 619 (2000)
- [41] S. Marri, S. D. M. White, MNRAS **345**, 561 (2003)
- [42] T. Y. Hou, J. S. Lowengrub, M. J. Shelley, “Removing the Stiffness from Interfacial Flows with Surface Tension”, J. Comp. Phys. **114**, 312–338 (1994)
- [43] R.D Richtmyer, K.W. Morton, “Difference Methods for Initial Value Problems”, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics No.4, 2nd edn., John Wiley & Sons, 1967
- [44] J. D. Anderson, “Modern Compressible Flow”, 2nd edn., McGraw-Hill, 1990
- [45] B. van Leer, J. Comp. Phys. **135**, 229 (1997)
- [46] D. S. Balsara, ApJ **420**, 197 (1994)
- [47] V. Springel, L. Hernquist, 2001, in J. Makino, P. Hut, eds, Proc. IAU Symp. 208, “Astrophysical Supercomputing using Particle Simulations”
- [48] Ya. B. Zel’dovich, A&A **5**, 84 (1970)
- [49] <http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/>
- [50] Preto, M. & Tremaine, S.: “A Class of Symplectic Integrators with Adaptive Time Step for Separable Hamiltonian Systems”, Astron. J. **118**, 2532 (1999)
- [51] Quinn, T., Katz, N., Stadel, J., & Lake, G.: 1997, “Time Stepping N-body simulations”, arXiv: astro-ph/9710043v1
- [52] Hairer E., Lubich C., Wanner G., “Geometric numerical integration”, Springer Series in Computational Mathematics, Springer, Berlin, 2002
- [53] D. J. Price, “SPLASH: An interactive visualisation tool for Smoothed Particle Hydrodynamics simulations”, arXiv: astro-ph/0709.0832v1
- [54] Springel V., Yoshida N., White S. D. M., “GADGET: A code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations”, New Astronomy **6**, 79 (2001); arXiv:astro-ph/0003162v3

- [55] Efstathiou, G., Davis, M., White, S. D. M., & Frenk, C. S., *ApJS* **57**, 241 (1985)
- [56] Taylor, Sir Geoffrey Ingram, "The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 201, No. 1065, pages 159 - 174 (22 March 1950)
- [57] John von Neumann, "The point source solution", *Collected Works*, edited by A. J. Taub, Vol. 6 [Elmsford, N.Y.: Permagon Press, 1963], pages 219 - 237
- [58] Sedov, L. I., "Propagation of strong shock waves", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 10, pages 241 - 250 (1946)
- [59] Latter, R., "Similarity solution for a spherical shock wave", *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, pages 954 - 960 (1955)
- [60] Lockwood-Taylor, J., "An exact solution of the spherical blast wave problem", *Philosophical Magazine*, Vol. 46, pages 317 - 320 (1955)
- [61] D.N. Spergel et al., 2006, "WMAP Three Year Results: Implications for Cosmology", *astro-ph/0603449*
- [62] P. Rosati, S. Borgani, C. Norman, "The Evolution of X-ray Clusters of Galaxies", *ARA&A*, 40, 539-577 (2002)
- [63] Voit, G.M., 2005, "Tracing cosmic evolution with clusters of galaxies", *Rev. Mod. Phys.*, 77, 207-258
- [64] Springel, V., Frenk, C.S., White, S.D.M., 2006, "The large-scale structure of the Universe", *Nature*, 440, 1137-1144
- [65] S. Weinberg, "Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity", John Wiley and Sons, NY 1972
- [66] S. Weinberg, "Cosmology", Oxford University Press, Oxford 2008
- [67] P. Coles, F. Lucchin, "Cosmology - The Origin and Evolution of Cosmic Structure", 2nd edition, John Wiley and Sons, Chichester 2002
- [68] P.J.E. Peebles, "Principles of Physical Cosmology", Princeton University Press, Princeton 1993
- [69] T. Padmanabhan, "Structure formation in the universe", Cambridge University Press, 1993
- [70] J. Binney, S. Tremaine, "Galactic Dynamics", Princeton University Press, Princeton 1987
- [71] E. J. Tasker, R. Brunino, et al, "A test suite for quantitative comparison of hydrodynamics codes in astrophysics", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **390**, 1267–1281 (2008), [arXiv:astro-ph/0808.1844v1]

Ringraziamenti

Un ringraziamento doveroso va al mio relatore Stefano Borgani, primo per aver sempre trovato il tempo di aiutarmi e consigliarmi nonostante i suoi impegni costanti, e secondo per avermi comunque sostenuto nella mia scelta relativa al dottorato, pur avendo opinioni differenti dalle mie; grazie per la passione per la ricerca che mi ha comunicato in questi mesi, e per tutti i preziosi consigli, non solo di fisica, che non dimenticherò. Analogo ringraziamento va al mio correlatore Giuseppe Murante, in particolare per i piccoli corsi accelerati di natura informatica e per il "giro lampo" di Torino (nonchè per le discussioni "proibite" di astrobiologia). Ho lavorato molto bene con il loro gruppo, e il clima umano è sempre stato ottimo. Mi spiace che per cause di forza maggiore questo lavoro si sia interrotto molto più rapidamente di quanto avremmo voluto; spero solo che, a dispetto di ciò, la nostra collaborazione continui anche in futuro.

Bene, questi erano i ringraziamenti "ufficiali". Venendo a quelli più personali, devo ringraziare molte persone, e so già che ne dimenticherò altrettante, ma ci provo lo stesso.

Prima di ogni altro ringrazio Ire, per il solo fatto di esserci. Immagino non debba essere facile sopportare le stranezze di un fisico teorico (specie quand'è sotto tesi), perciò un grazie ci scappa solo per questo; ma la verità è che tutto ciò che faccio, lo faccio per lei. Normalmente non amo troppo i sentimentalismi, ma qui devo fare un'eccezione: grazie per questi anni meravigliosi.

Grazie a tutti i miei amici di fisica. A Elisa per avermi fatto scoprire quanto può essere spaventoso un paraspifferi, e per avermi sempre ascoltato; a Damiana per le incredibili avventure dei serpenti di Torreano; a Florian (si pronuncia Flòrian) per le discussioni su Battlestar e sulla capacità di una batteria per auto; a Marina per la piacevole compagnia in Villa durante il lavoro di tesi; a Riccardo per quella birra che mi ha offerto; a Eugenio per tutti i siti assurdi che solo lui riesce a trovare; a Giacomo per la futura collaborazione "teorico-sperimentale"; a Mirco per le discussioni sui massimi sistemi; a Marco per tutti i libri che non gli ho prestato (e per tutte le vittorie a Konquest); a Davide per gli spunti cinematografici; a Pietro per le sue battute esilaranti; a Fabrizio e Ruth per essersi preoccupati che tornassi a casa sano e salvo; al Puppo per i "tori quantici a cavitazione di fase"; e a tutti quanti: mi ci vorrebbe un'altra tesi per elencare tutte le persone e i motivi per cui li ringrazio. Perciò non offendetevi se non vedete qui il vostro nome, sappiate che vi ringrazio ugualmente.

Un grazie ai dottorandi del dipartimento di Astronomia: anche se non c'ero molto spesso, la loro simpatia è stata importante per me. Grazie in particolare a Dunja per le continue domande su Gnuplot e dintorni, e ad Alex per il supporto con IDL.

Un grazie anche ai miei coinquilini, che mi hanno sopportato per un anno, e con cui è stato piacevole convivere.

Infine un grazie alla mia famiglia, che mi ha sempre sostenuto ed aiutato ad arrivare fino in fondo, assecondandomi soprattutto in questi ultimi giorni, un po' tesi e nervosi, in cui ho corso per finire le cose in tempo.

Grazie a tutti, a quelli che ho citato e a quelli che per la troppa fretta non ho citato, ma che comunque ci sono, e ci saranno sempre.