



Università degli Studi di Trieste

DIPARTIMENTO DI FISICA
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Generazione di Condizioni Iniziali per Simulazioni Cosmologiche

Relatore
Prof. Stefano Borgani

Correlatore
Prof. Pierluigi Monaco

Laureanda
Maria Berti

The image shows a musical score for a four-part setting in C major, likely a short canon or exercise. It consists of four staves. The top two staves are in treble clef, and the bottom two are in bass clef. The time signature is common time (C). The key signature has one sharp (F#), indicating C major. The music is written in a simple, rhythmic style with quarter and eighth notes, and rests. The piece concludes with a double bar line.

W. A. Mozart

Indice

Introduzione	ii
1 Formazione di strutture cosmiche	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Cosmologia adottata	4
1.3 Contrasto di densità e spettro di potenza	5
1.4 Teoria delle perturbazioni	7
1.5 Simulazioni <i>N-body</i>	9
2 Descrizione del codice MUSIC: <i>Multi-Scale Initial Conditions</i>	10
2.1 Introduzione	10
2.2 Generazione delle perturbazioni di densità e soluzione numerica dell'equazione di Poisson	11
2.3 Descrizione dei parametri di configurazione	14
3 Ri-simulazione di un alone da $10^{15} M_{\odot}$	17
3.1 Introduzione	17
3.2 Simulazione da 256^3 particelle	21
3.3 Analisi delle ri-simulazioni e confronto con simulazione da 512^3 particelle	25
3.4 Ri-simulazioni a tre diversi livelli di risoluzione: l'effetto del <i>padding</i>	32
3.5 Ri-simulazione con <i>overlap</i>	35
3.6 Ri-simulazione a quattro diversi livelli di risoluzione	36
Conclusioni	38
Bibliografia	40

Introduzione

Il presente lavoro di tesi ha come scopo quello di studiare il funzionamento del codice MUSIC, acronimo di *Multi-Scale Initial Conditions* (Hahn & Abel, 2011), per la generazione di condizioni iniziali per simulazioni cosmologiche in cui coesistono due o più diversi livelli di risoluzione in massa. Tale metodo permette di produrre simulazioni in cui solo determinate porzioni del volume di simulazione sono poste a risoluzione più elevata. L'utilizzo di simulazioni di questo tipo è di interesse rilevante, in quanto permette di analizzare l'evoluzione della struttura a grande scala dell'Universo secondo il modello Λ CDM, senza richiedere l'utilizzo di vaste risorse computazionali. Infatti, per tali studi è necessario disporre di simulazioni caratterizzate contemporaneamente da volumi considerevoli e buoni livelli di risoluzione, che esigono un'ingente potenza di calcolo. Tuttavia, utilizzando condizioni iniziali come quelle generabili con MUSIC, è possibile porre ad alta risoluzione solamente la regione la cui evoluzione dà luogo alla formazione dell'oggetto d'interesse, facendo uso di risorse computazionali più contenute. Grazie ad un certo numero di simulazioni e ri-simulazioni, è stato possibile studiare gli effetti dell'utilizzo di diversi tipi di condizioni iniziali, generate con MUSIC, sulle proprietà di un alone di materia oscura di massa $\sim 10^{15}M_{\odot}$.

La trattazione è suddivisa in tre capitoli principali, più uno riassuntivo di conclusioni. Nel primo capitolo viene introdotto il tema della generazione delle condizioni iniziali dal punto di vista teorico. Dopo una presentazione generale, vengono definiti i parametri cosmologici e le grandezze fisiche necessari alla comprensione del lavoro svolto. In seguito, viene illustrata brevemente la teoria delle perturbazioni lagrangiana, per concludere con la descrizione del metodo di simulazione *N-body*. Il secondo capitolo è dedicato alla descrizione del codice MUSIC, sia da un punto di vista teorico che pratico. *In primis*, viene descritto il metodo numerico implementato per la generazione delle condizioni iniziali. *In secundis*, vengono elencati e descritti i parametri principali da impostare nell'utilizzo del programma. Nel terzo capitolo vengono illustrate nel dettaglio le diverse simulazioni che sono state eseguite e, successivamente, vengono mostrati i prodotti dell'analisi effettuata. Infine, nelle conclusioni, dopo un riassunto dei temi trattati, vengono presentati i risultati principali di tale lavoro di tesi e vengono delineate alcune proposte per un possibile sviluppo futuro dello studio portato avanti finora.

Capitolo 1

Formazione di strutture cosmiche

Il soggetto a tema in questo primo capitolo è un argomento di grande interesse nell'ambito della cosmologia scientifica degli ultimi anni e ampiamente discusso nella letteratura. Di conseguenza tale breve trattazione non vuole avere pretesa di essere esaustiva, ma ha il solo scopo di fornire gli strumenti necessari alla comprensione del lavoro svolto (per trattazioni dettagliate si vedano Mo, van den Bosch, & White (2010) e Coles & Lucchin (2002)). Dunque, dopo una breve introduzione generale, verranno presentati e discussi gli elementi fondamentali.

1.1 Introduzione

La cosmologia è quella branca della scienza che si occupa della descrizione e dello studio dell'origine, dell'evoluzione e della struttura dell'Universo su grandi scale. La cosmologia moderna fonda le sue basi principalmente su due elementi, vale a dire la teoria della relatività generale ed il principio cosmologico, che ipotizza un universo spazialmente omogeneo e isotropo. Tali assunzioni portano ad una descrizione del cosmo definita in modo completo da K , la curvatura dell'Universo, e da $a(t)$, detto fattore di scala, che descrive come questo si espanda nel tempo e che verrà definito nel seguito. Inoltre, nelle teorie più recenti, l'Universo risulta essere costituito da tre principali componenti: una visibile, detta materia *barionica*, formata da protoni, neutroni ed elettroni¹, una di *materia oscura* ed una di *energia oscura*. Al momento attuale, il modello più accreditato è il cosiddetto Λ **Cold Dark Matter** (Λ CDM), che teorizza un universo spazialmente piatto nel quale la densità di energia si ripartisce tra i tre costituenti in queste proporzioni: circa il 75% è dovuto alla costante cosmologica Λ , associata all'energia oscura, il 21% a materia oscura, detta *fredda* (CDM) per la sua bassa dispersione di velocità, ed il restante 4% a materia barionica (Mo et al., 2010, capitoli 2-3).

Tuttavia, se l'Universo fosse completamente omogeneo e isotropo non dovrebbero esistere alcun tipo di strutture cosmiche, di cui invece si hanno forti evidenze osservative. Dunque, per spiegare la caratteristica *struttura a grande scala* (Figura 1.1), è necessario introdurre nei diversi modelli cosmologici una teoria che includa deviazioni dalla perfetta uniformità. Una descrizione promettente dell'origine fisica di tali perturbazioni primordiali è data dalle varie teorie inflazionistiche, che, tuttavia, non sono ancora in grado di definirle completamente sulla base di argomentazioni teoriche. Di conseguenza, la statistica delle condizioni iniziali viene fissata a partire da parametri fenomenologici, legati all'osservazione di dati sperimentali, come le fluttuazioni del fondo cosmico nelle microonde (CMB) o l'abbondanza di ammassi di galassie al tempo attuale.

Date le condizioni iniziali, è quindi possibile calcolare l'evoluzione delle perturbazioni nel campo di densità dovuta all'interazione gravitazionale. Infatti, la crescita delle fluttuazioni

¹Nonostante gli elettroni secondo il Modello Standard siano in realtà leptoni, è consuetudine, in ambito cosmologico, assimilarli in quella che viene chiamata *materia barionica*.

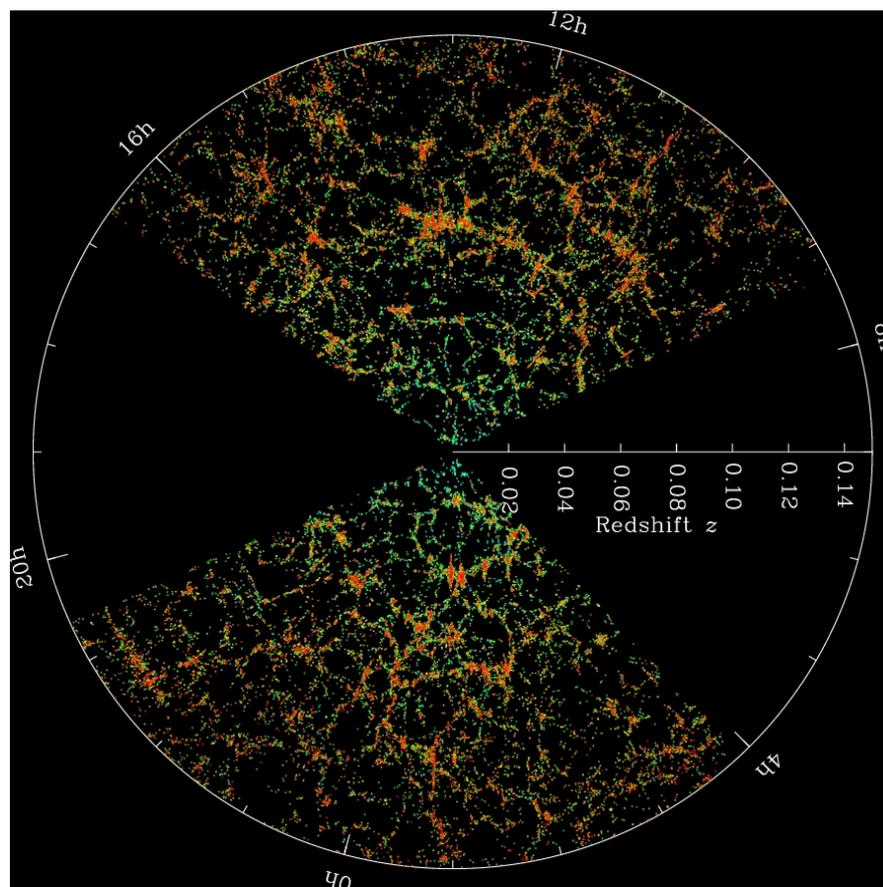


Figura 1.1: Distribuzione delle galassie locali. Si può vedere chiaramente come queste non abbiano una distribuzione casuale ed omogenea, ma siano piuttosto agglomerate in gruppi e ammassi, collegati da strutture filamentose, a formare la caratteristica configurazione ‘spugnosa’. Immagine realizzata dalla collaborazione SDSS-III (<https://www.sdss3.org>).

nel tempo segue un meccanismo relativamente semplice: una zona in cui la densità iniziale si presenta leggermente superiore a quella media tenderà ad attrarre la materia circostante con una forza più intensa; dunque, nel corso dell’evoluzione, tali regioni, dette di *sovradensità*, tenderanno a diventare sempre più popolate e, analogamente, si svuoteranno quelle di *sottodensità*, in quanto la materia fluirà verso le zone più dense. Questa dinamica, dunque, porta ad un’amplificazione delle perturbazioni, alla quale ci si riferisce con il termine **instabilità gravitazionale**. Inizialmente, l’estensione delle zone sovradense cresce in modo lineare col tempo, per poi entrare in un regime di non-linearità, il cui risultato finale dipende fortemente dalla composizione della materia delle perturbazioni. Per gli scopi del presente lavoro di tesi, il caso interessante è quello in cui si considera l’evoluzione della materia oscura fredda, la quale non può essere descritta come un gas perfetto, in quanto si assume che essa sia in regime non collisionale. Ciò implica che l’unica interazione significativa sia quella gravitazionale, la cui evoluzione temporale porta alla formazione di strutture rilassate in uno stato di quasi equilibrio dette **aloni di materia oscura**, o *dark matter halos*. La nascita e l’accrescimento di tali oggetti avviene attraverso un processo detto **gerarchico** (o *bottom-up*), secondo cui vengono a formarsi dapprima strutture più piccole che si fondono via via in aloni di dimensioni sempre maggiori. Gli aloni di materia oscura risultano di centrale interesse nel modello Λ CDM, in quanto regolano la formazione di stelle, galassie e ammassi, componenti fondamentali della struttura a grande scala dell’Universo; essi e le loro caratteristiche principali, come profilo di densità, forma, spin e sottostrutture, sono stati, e sono tuttora, ampiamente studiati grazie ad un vasto utilizzo di simulazioni numeriche.

Difatti, sebbene la dinamica appena descritta possa sembrare banale, poichè basata su un unico tipo di interazione, la costruzione formale di un modello di formazione di strutture cosmiche completo non risulta essere altrettanto semplice. Dunque, per seguire nel dettaglio il processo di evoluzione, una delle tecniche più utilizzate è quella di eseguire un particolare tipo di simulazione detto a **N-corpi** (o **N-body**), di cui è un esempio la figura 1.2 e che verrà descritto più nello specifico nel paragrafo 1.5. Il primo passo che sta alla base di questo metodo è generare il campo di densità iniziale lineare $\delta(\vec{x})$ con le proprietà statistiche desiderate a seconda della cosmologia adottata; il come realizzare numericamente tale campo di densità è quello che viene chiamato il problema della **generazione delle condizioni iniziali**, argomento principale di questo lavoro di tesi.

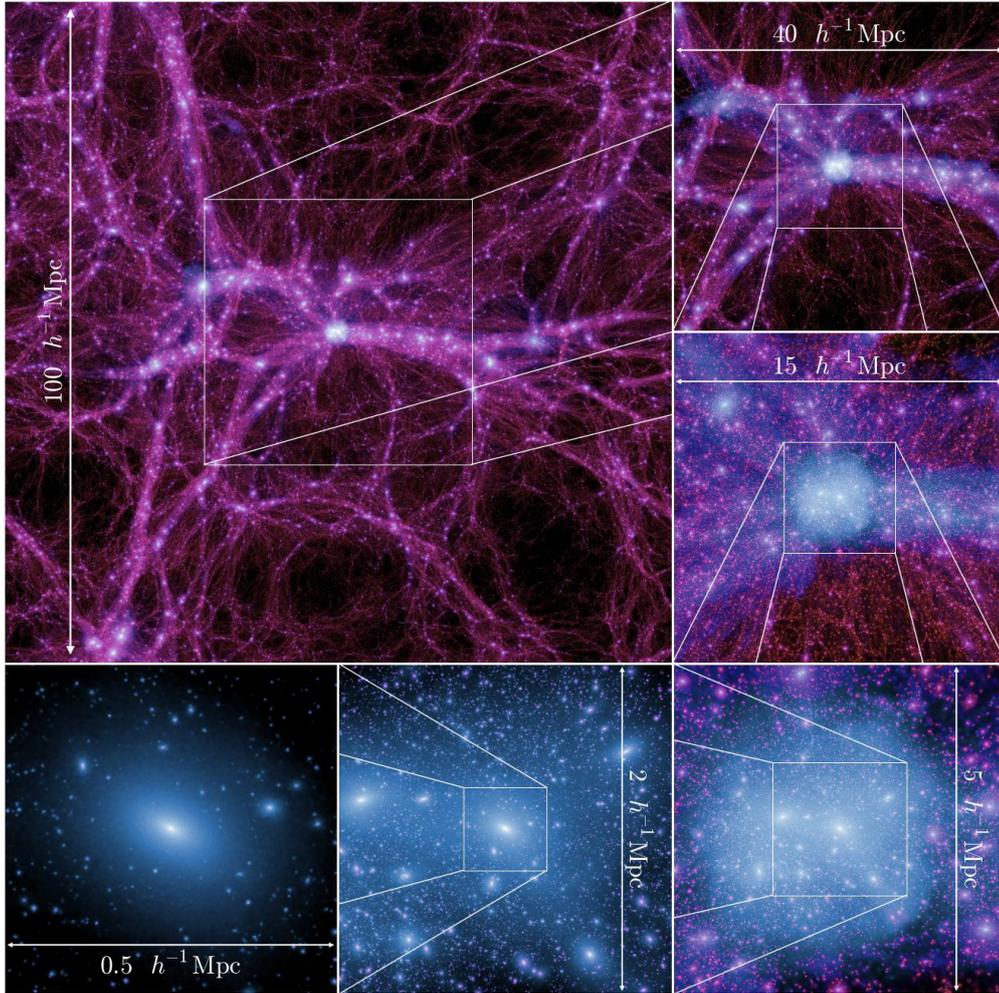


Figura 1.2: Esempio di simulazione *N-body* eseguita con GADGET Springel (2005) di un alone di massa da catalogo FoF di $8.2 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$, a redshift 0, composto da 119.5 milioni di particelle, in una scatola da $100 \text{ Mpc } h^{-1}$ (da *Millennium-II Simulation* in Boyle-Kolchin et al. (2009)).

Il processo di generazione delle condizioni iniziali può essere diviso in due fasi: nella prima viene definita una distribuzione uniforme di particelle a rappresentare l'universo imperturbato, nella seconda vengono imposte le fluttuazioni di densità ed il corrispondente campo di velocità con le caratteristiche richieste. Il metodo utilizzato abitualmente è quello di rappresentare l'Universo imperturbato tramite una griglia regolare di N particelle in una scatola cubica e con **condizioni periodiche al contorno** (o **PBC**). Data la distribuzione di particelle imperturbata una qualsiasi perturbazione lineare può essere ottenuta facilmente utilizzando l'**approssimazione di Zel'dovich** (paragrafo 1.4), che permette di realizzare una versione discretizzata del campo di densità e da questo, integrando l'**equazione di Poisson** (paragrafo

1.4), è possibile calcolare gli spostamenti dalla posizione iniziale e le velocità di ogni singola particella.

Risulta, quindi, evidente che i modelli di formazione di strutture cosmiche coinvolgono più elementi teorici, tra di loro interconnessi anche in maniera complicata. Tuttavia, dato uno strumento per poter trattare l'evoluzione non lineare in modo numerico, come ad esempio il già citato *N-body* (paragrafo 1.5), i fattori necessari utili allo scopo di questa tesi possono essere riassunti come segue (Coles & Lucchin, 2002, p. 331):

- una cosmologia di base, che equivale alla scelta dei parametri cosmologici quali il valore della costante di Hubble H_0 , del parametro di densità Ω_0 e della costante cosmologica Λ (paragrafo 1.2 e alla risoluzione delle equazioni di Einstein, alla base della relatività generale);
- uno spettro delle perturbazioni iniziali, quale quello generato dall'inflazione, che si assume segua una legge di potenza (paragrafo 1.3);
- una distribuzione statistica delle fluttuazioni iniziali, di solito gaussiana (paragrafo 1.3);
- la funzione di trasferimento (paragrafo 1.3) e una normalizzazione dello spettro di potenza delle fluttuazioni (paragrafo 1.3).

Nel resto del capitolo verranno, quindi, definiti e descritti brevemente gli elementi teorici fondamentali alla comprensione del problema delle condizioni iniziali relativo al lavoro svolto.

1.2 Cosmologia adottata

La velocità di recessione v delle galassie osservate nell'Universo vicino è descrivibile tramite la relazione:

$$v = H_0 d, \quad (1.1)$$

proposta da Edwin Hubble nel 1929 e conosciuta come **legge di Hubble**, dove d è la distanza della galassia osservata ed H_0 la **costante di Hubble** (Hubble, 1929). Tale relazione è esprimibile anche in funzione del **redshift** z :

$$cz = H_0 d, \quad \text{con} \quad z = \frac{\lambda_{\text{osservata}} - \lambda_{\text{emessa}}}{\lambda_{\text{emessa}}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

dove c è la velocità della luce e λ la lunghezza d'onda. La scoperta di tale dipendenza è una pietra miliare nella storia della cosmologia, in quanto prima evidenza sperimentale dell'espansione dell'Universo. Inoltre, un altro elemento fondamentale è il già citato **principio cosmologico**, secondo cui su grande scala non esistono nell'Universo osservatori privilegiati, ma esso appare in modo identico se osservato allo stesso istante da punti differenti; questo implica, in un'altra riformulazione, che l'Universo, a distanze cosmologiche, si presenta omogeneo e isotropo.

La misura osservativa di H_0 è uno dei problemi cardine della cosmologia e, per non doverne attendere una precisa, nel corso della storia è stata parametrizzata come segue:

$$H_0 = h \times 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.2)$$

Di conseguenza, anche nel caso di distanze, masse, densità e luminosità, è consuetudine esprimere i valori di tali grandezze in relazione al parametro h , ad esempio le distanze vengono date in $h^{-1} \text{ Mpc}$ e le masse in $h^{-1} M_\odot$ ². Inoltre, da sviluppi successivi della teoria, H_0 risulta

²Si ricorda che $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{18} \text{ cm}$ e $1 M_\odot = 1.99 \times 10^{33} \text{ g}$.

non essere effettivamente costante nel tempo, per cui è più corretto definire $H_0 = H(t_0)$, dove con il pedice “0” si vuole indicare il valore di $H(t)$, detto quindi **parametro di Hubble** e non più costante, al tempo attuale.

Definito il principio cosmologico, nasce il problema di costruire un modello dell’Universo in cui questo valga. La risposta si trova nella teoria della relatività generale, per la precisione nello studio di Friedmann sulle soluzioni non statiche delle equazioni di Einstein, ripreso e ampliato da Robertson e Walker. Difatti, la descrizione dell’Universo attualmente utilizzata è contenuta in quelli che vengono chiamati **modelli di Friedmann-Robertson-Walker**. La spiegazione di tali modelli è ampiamente al di là degli scopi della presente trattazione, di conseguenza ci si limiterà a definire i concetti di coordinate comoventi, fattore di scala e parametro di densità.

Consideriamo il modello semplicistico di una sfera di raggio $R(t)$ che si espande secondo la legge di Hubble; si può definire il **fattore di scala $\mathbf{a}(t)$** come:

$$R(t) = \mathbf{a}(t) R_0, \quad (1.3)$$

dove R_0 è il raggio al tempo attuale. Di conseguenza, il fattore di scala definisce il rapporto tra il raggio della sfera ad un generico tempo t ed il raggio R_0 , detto anche *raggio comovente*, il cui valore rimane costante nel corso dell’espansione. Si può, dunque, affermare che quello comovente sia l’effettivo raggio della sfera, misurato in unità del fattore di scala. Quindi, con un ragionamento analogo e una derivazione geometrica più rigorosa, si possono determinare più in generale le **coordinate comoventi**, sia in forma cartesiana che polare, definite nello spazio quadridimensionale di Minkowski grazie a quella che viene chiamata **metrica di Robertson-Walker** (Mo et al., 2010, pp.103-105). Una volta definito il fattore di scala, si possono scrivere in funzione di esso sia il parametro di Hubble che il *redshift*:

$$H(t) = \frac{1}{\mathbf{a}(t)} \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \quad \text{e} \quad 1 + z = \frac{1}{\mathbf{a}(t)}. \quad (1.4)$$

Infine, un altro elemento fondamentale è il **parametro di densità Ω** , definito a partire dalla densità critica ρ_c , calcolata dalla relatività generale:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \text{con} \quad \rho_c(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}, \quad (1.5)$$

dove ρ è la densità di materia ed in cui al tempo attuale la densità critica assume il valore $\rho_{c0} = 2.778 \times 10^{11} h^2 M_\odot \text{Mpc}^{-3}$. Inoltre, secondo il modello ΛCDM , la densità ρ si ripartisce nelle frazioni dei diversi costituenti, dando luogo a Ω_Λ , densità di massa-energia sotto forma di costante cosmologica, Ω_0 (o anche Ω_m) densità di materia, suddivisa in barionica (Ω_b) e oscura, ed una componente di radiazione; con la notazione appena descritta si sottointende sempre che siano tutte valutate a *redshift* $z = 0$, corrispondente al tempo attuale (Mo et al., 2010, pp.93-95).

In tutto il lavoro svolto la cosmologia utilizzata è quella definita dalle recenti misure del satellite Planck (Planck Collaboration et al., 2015), riassunta nella tabella 1.1.

1.3 Contrasto di densità e spettro di potenza

Sia $\rho(\vec{x})$ il campo di densità di materia, funzione continua del vettore posizione \vec{x} , è possibile definire il **contrasto di densità $\delta(\vec{x})$** come:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad (1.6)$$

Tabella 1.1: Valori dei parametri cosmologici utilizzati (Planck Collaboration et al., 2015).

Grandezza	Valore misurato	Errore
Ω_0	0.3089	0.0062
Ω_Λ	0.6911	0.0062
Ω_b	0.0486	0.0007
n_s	0.9667	0.0040
$H_0(\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1})$	67.74	0.46

dove $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle$ è la media calcolata su un volume rappresentativo dell'Universo sufficientemente esteso. Tale definizione implica che $\bar{\delta} = 0$ e che $\delta(\vec{x}) \geq -1$. La rappresentazione di Fourier del contrasto di densità è esprimibile come:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\vec{x} \delta(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (1.7)$$

Di conseguenza, è possibile dimostrare che lo **spettro di potenza** $P(k)$ delle perturbazioni di densità, nel caso di un volume finito, è dato da:

$$P(k) = \left\langle \left| \tilde{\delta}(\vec{k}) \right|^2 \right\rangle, \quad (1.8)$$

con k il modulo del vettore d'onda \vec{k} (Borgani, 2008).

Per quanto riguarda la forma dello spettro di potenza delle fluttuazioni primordiali, in assenza di una teoria completa che spieghi l'origine delle fluttuazioni del campo di densità, si assume che essa segua una legge di potenza:

$$P_{prim}(k) \propto k^{n_s}, \quad (1.9)$$

dove $P_{prim}(k)$ è lo spettro delle perturbazioni primordiali e n_s è il cosiddetto **indice spettrale**. I modelli inflazionistici teorizzano un andamento di questo tipo e, in particolare, prevedono n_s leggermente minore di 1. Anche in questo caso nel corso del lavoro svolto è stato adottato il valore dell'indice spettrale misurato da Planck (Tabella 1.1).

È da notare che lo spettro di potenza fornisce informazioni solamente sul modulo di $\tilde{\delta}(\vec{k})$, ma non sulla fase. Tuttavia, i modelli di evoluzione più accreditati sostengono che le fasi della struttura a grande scala non contengano alcun tipo di informazione cosmologica e, dunque, che le fasi delle perturbazioni primordiali si possano considerare casuali. Di conseguenza, il campo di fluttuazioni di densità iniziale è ben approssimabile ad un **campo gaussiano random** omogeneo ed isotropo, il quale è determinato univocamente, in senso statistico, dallo spettro di potenza.

Fino ad ora si è discusso dell'andamento dello spettro di potenza ma non della sua ampiezza effettiva. Mentre la forma di $P(k)$ è definita univocamente una volta che siano fissati i parametri cosmologici, vale a dire H_0 , Ω_b e Ω_0 , la sua **normalizzazione** non è predetta a priori da nessuna teoria e può essere calcolata solo a partire dal confronto con i dati osservativi della struttura a grande scala dell'Universo o con le anisotropie del CMB. Per motivazioni storiche, solitamente tale normalizzazione viene effettuata attraverso quella che viene chiamata la *varianza del campo di densità* σ_8 (per una trattazione dettagliata si veda (Mo et al., 2010, pp.206-209)).

Poiché i modi di Fourier evolvono indipendentemente uno dall'altro, in regime lineare lo spettro di potenza ad un dato istante di tempo è correlato allo spettro primordiale tramite la **funzione di trasferimento** $T(k)$. Essa tiene conto degli effetti causati dai meccanismi

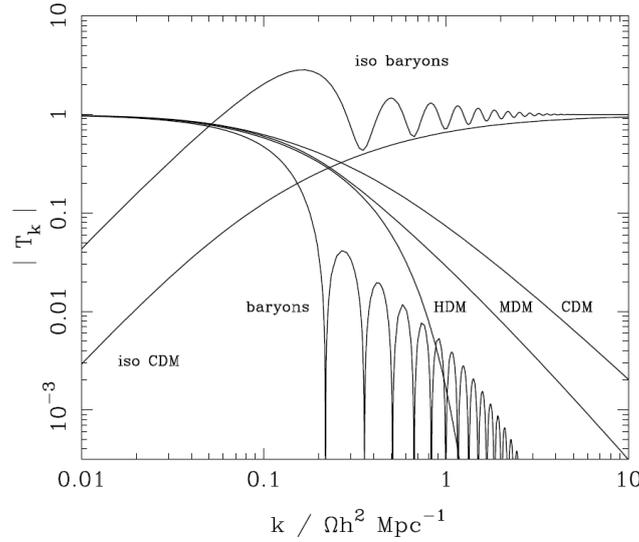


Figura 1.3: Grafico della funzione di trasferimento per diversi modelli, sia *adiabatic* che *isocurvatura*: soli barioni, sola CDM, sola HDM (*Hot Dark Matter*), sola MDM (*Mixed Dark Matter*). Immagine presa da *Cosmology Notes - Astrophysical Cosmology 4* di J.A. Peacock. (<http://www.roe.ac.uk/~jap/teaching/cos4>).

causali che agiscono dentro l'orizzonte cosmologico e che ne influenzano l'evoluzione dei modi di Fourier delle perturbazioni più piccole della dimensione dell'orizzonte. Per tale motivo si avrà che $T(k)$ tende asintoticamente ad 1 per k che tende a 0, in quanto le fluttuazioni che sono sempre fuori dall'orizzonte non vengono influenzate da tali meccanismi causali. Nello specifico, l'intento è quello di esprimere lo spettro alla ricombinazione³ in funzione di quello primordiale come:

$$P_{rec}(k) = P_{prim}(k) T^2(k). \quad (1.10)$$

La definizione rigorosa di $T(k)$ assume diverse forme in letteratura, ma dare una panoramica completa sull'argomento va oltre gli scopi di questo lavoro di tesi. Dunque, ci si limiterà a sottolineare che la forma precisa della funzione di trasferimento cambia a seconda del modello teorico considerato, come è possibile vedere in figura 1.3.

1.4 Teoria delle perturbazioni

Dopo aver definito quali siano le caratteristiche principali dello spettro delle fluttuazioni di densità, in questo paragrafo verrà illustrato come esse si evolvono nelle cosiddette teorie lineari **euleriana** e **lagrangiana** delle perturbazioni (**LPT**, *Lagrangian Perturbation Theory*) (teoria tratta da Monaco, 2016). Quest'ultima è un elemento fondamentale per la generazione di condizioni iniziali, in quanto permette di calcolare spostamenti e velocità di partenza, a partire dal contrasto di densità.

Dopo la ricombinazione, è possibile trattare la materia oscura come un fluido perfetto caratterizzato da un'equazione di stato a pressione nulla, analoga a quella della polvere. L'evoluzione temporale, dovuta all'autogravità del fluido, sarà regolata principalmente da tre equazioni, vale a dire quella di continuità, che descrive la conservazione della massa, l'equazione di Eulero, cioè le equazioni del moto, e l'**equazione di Poisson**, definita come:

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (1.11)$$

³Con *ricombinazione* si intende quel momento, nella storia evolutiva dell'Universo, in cui per la prima volta protoni e elettroni si combinano a formare l'idrogeno. Essa è osservabile nel fondo cosmico delle microonde.

dove $\vec{r} = a(t)\vec{x}$, ϕ è il potenziale del campo gravitazionale, ρ la densità e G la costante di gravitazione universale. Assumendo che le perturbazioni siano piccole e che gli spostamenti delle posizioni iniziali siano trascurabili, è possibile ignorare i termini superiori al primo e scrivere la soluzione lineare approssimata. Per quanto riguarda lo scopo di questa trattazione, il tipo di evoluzione interessante è quella in cui le perturbazioni crescono, descritta da:

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{D(t)}{D(t_i)} \delta(\vec{x}, t_i), \quad (1.12)$$

in cui $\delta(\vec{x}, t)$ è la versione dipendente dal tempo dell'equazione 1.6 e $D(t)$ è il **fattore di crescita lineare**, normalizzato al tempo attuale ($D(t_0) = 1$). Si noti che con l'indice i si vuole indicare un dato tempo iniziale. Dunque, risulta chiaro che in regime lineare le perturbazioni nel corso del tempo vengono solamente riscalate punto per punto di una quantità pari al fattore di crescita stesso. Un pregio di questo tipo di soluzione è quello di poter collegare in modo semplice il contrasto di densità al campo delle velocità. Infatti, riscrivendo l'equazione 1.11 in funzione delle coordinate comoventi \vec{x} è possibile vedere che:

$$\delta(\vec{x}, t) = D(t) \nabla_{\vec{x}}^2 \Phi, \quad (1.13)$$

con Φ il potenziale gravitazionale peculiare, vale a dire la perturbazione del potenziale. È possibile dimostrare che il campo delle velocità può essere scritto come:

$$\vec{v} = -H(t)a(t)D(t)f(\Omega_m) \nabla_{\vec{x}} \Phi, \quad (1.14)$$

in cui $f(\Omega_m) = d \ln D / d \ln a$.

Tuttavia, è anche possibile trattare il problema utilizzando la descrizione lagrangiana della fluidodinamica. Sia, dunque, \vec{q} la posizione dell'elemento di massa nell'istante iniziale, la posizione ad un tempo generico può essere definita come:

$$\vec{x}(\vec{q}, t) = \vec{q} + \vec{S}(\vec{q}, t), \quad (1.15)$$

dove \vec{S} mappa le \vec{q} dello spazio lagrangiano nelle \vec{x} di quello euleriano. Si assuma ora che ogni elemento di massa mantenga costante la sua velocità:

$$\frac{d\vec{u}}{dD} = 0, \quad \text{con} \quad \vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dD}. \quad (1.16)$$

Si noti che con d/dD si vuole indicare quella che viene chiamata la derivata *convettiva* o *lagrangiana*. Tale modo di procedere è comunemente conosciuto come **approssimazione di Zel'dovich**. Di conseguenza è possibile vedere che:

$$\vec{S}(\vec{q}, t) = -D(t) \nabla_{\vec{q}} \Phi, \quad (1.17)$$

in cui Φ è il potenziale gravitazionale riscalato introdotto in precedenza, ma scritto in funzione di \vec{q} . Da ciò, dunque, è possibile anche calcolare il contrasto di densità, grazie al determinante dello Jacobiano della trasformazione dalle \vec{q} alle \vec{x} :

$$1 + \delta(\vec{q}, t) = \frac{1}{\det(\partial x_i / \partial q_j)} = \frac{1}{|(1 - \lambda_1 D(t))(1 - \lambda_2 D(t))(\lambda_3 D(t))|}, \quad (1.18)$$

dove λ_i sono gli autovalori della matrice hessiana del potenziale Φ . Si noti che tale equazione rispetta la condizione $\delta \geq -1$ e che δ diventa infinita quando $D(t)\lambda_i = 1$.

Tale approssimazione, negli istanti iniziali, è equivalente alla trattazione lineare, con l'unica differenza che in questo caso è previsto che gli elementi di fluido si possano muovere, mentre nel precedente no. La diversità dei due approcci è visibile soprattutto nel momento in cui si

cerchi di applicare tali teorie nel regime non lineare. Come è logico, la teoria lineare euleriana smette di funzionare molto presto, mentre l'approssimazione di Zel'dovich ha il pregio di essere valida fintanto che la mappa \vec{S} sia una funzione monodroma.

Da ultimo, è importante sottolineare che l'approssimazione di Zel'dovich è solamente il primo ordine della LPT. Difatti, esistono anche estensioni della teoria ad ordini successivi, come ad esempio 2LPT e 3LPT, la cui trattazione va oltre gli scopi del presente lavoro di tesi. Per un approfondimento sull'argomento si veda ad esempio Bouchet (1996). Nelle condizioni iniziali delle simulazioni analizzate in questo lavoro (capitolo 3) si è fatto uso della teoria lagrangiana delle perturbazioni solo fino al primo ordine.

1.5 Simulazioni *N-body*

A conclusione di questo primo capitolo introduttivo, verrà ora brevemente presentato il metodo di simulazione numerica chiamato *N-body*.

Si supponga di avere un sistema di N particelle in regime non collisionale, aventi tutte la stessa massa m . Tramite le posizioni \vec{r}_i e le velocità $\vec{u}_i = \dot{\vec{r}}_i$, dove con il punto si vuole indicare la derivata temporale, di ciascuna particella è possibile descrivere interamente il sistema. L'unica forza \vec{F} a regolare il sistema è l'interazione gravitazionale, che, dunque, definisce il moto di ogni particella, descritto da:

$$m\dot{\vec{u}}_i = \vec{F}_i, \quad \text{con } i = 1, \dots, N. \quad (1.19)$$

Poiché la gravità è un'interazione a lungo raggio, la forza agente su una particella sarà dipendente dalla posizione di tutte le altre. Di conseguenza, il problema si presenta come un sistema di $2N$ equazioni differenziali ordinarie di primo ordine accoppiate. Numericamente, è possibile trovare la soluzione integrando il sistema in un numero finito di passi nel tempo. Supponendo di aver implementato un metodo per poter scegliere l'intervallo di tempo Δt tra un passo e l'altro secondo un certo criterio, usando l'equazione 1.19 è possibile calcolare posizioni e velocità di ogni particella all'istante successivo e, da queste, di nuovo la forza e così via. Dunque, se si possiede un algoritmo efficiente per calcolare le forze su tutte le particelle, il sistema può essere integrato facilmente tramite il processo appena descritto.

A questo punto dunque, è sufficiente definire un algoritmo che calcoli le interazioni gravitazionali tra ogni particella per avere uno strumento completo che calcoli l'evoluzione temporale. Il più semplice, ma anche il più dispendioso dal punto di vista computazionale, è il cosiddetto *Particle-Particle algorithm* (PP), che calcola esplicitamente per ciascuna delle N particelle la forza di gravità risultante dalla somma dei contributi dell'interazione con tutte le altre $N - 1$. Di conseguenza, il tempo di calcolo necessario è proporzionale a N^2 , che chiaramente impone limiti stringenti al numero massimo di particelle simulabile. Una soluzione che lascia margini più ampi è il *Tree algorithm*, in cui le particelle sono raggruppate a seconda della distanza dalla particella su cui si stia calcolando la forza risultante. Ciò permette di calcolare l'interazione esatta solamente con le particelle che si trovano ad essere vicine a quella di riferimento ed approssimare l'azione di quelle lontane tramite singole particelle di massa equivalente a quella dei vari gruppi. In questo modo, il risparmio di tempo di calcolo è notevole, che, infatti, in questo caso è proporzionale a $N \log N$. Un altro metodo utilizzato in letteratura è il *Particle Mesh algorithm* (PM). Esso consiste nel risolvere numericamente l'equazione di Poisson (paragrafo 1.4) discretizzando il dominio di integrazione in una serie di griglie. Da ultimo, è interessante il metodo *TreePM*, combinazione del *Particle Mesh* col *Tree*, implementato anche nel codice GADGET-2 (Springel, 2005), di cui è stata utilizzata l'ultima versione per lo svolgimento di questo lavoro.

Capitolo 2

Descrizione del codice MUSIC: *Multi-Scale Initial Conditions*

Come già accennato in precedenza, lo scopo ultimo del presente lavoro di tesi è lo studio del funzionamento del particolare metodo di generazione di condizioni iniziali, implementato nel codice **MUSIC**, acronimo di *Multi-Scale Initial Conditions*, scritto da Oliver Hahn¹ e Tom Abel² ³. Nell’articolo di presentazione del programma (Hahn & Abel, 2011) gli autori descrivono un nuovo algoritmo che produce condizioni iniziali *multiscala*, con diversi possibili livelli di raffinamento. Dopo una breve introduzione, in questo secondo capitolo verrà descritto il funzionamento del programma e le sue caratteristiche innovative.

2.1 Introduzione

Allo stato dell’arte, sono le perturbazioni nella densità di materia oscura fredda a guidare la formazione di strutture cosmologiche (si veda il capitolo 1); la loro crescita non lineare può essere esplorata grazie alle simulazioni numeriche su un ampio intervallo di scale, dalle centinaia di Mpc, adatte allo studio della struttura a grande scala dell’Universo, fino a dimensioni più modeste, consone ad ambiti quali formazione ed evoluzione di galassie, mezzo interstellare, processi di accrescimento di buchi neri e formazione di proto-stelle. Il problema si presenta nel momento in cui sono richiesti contemporaneamente volumi considerevoli e un buon livello di risoluzione all’interno di strutture non-lineari, cosa che richiederebbe una potenza di calcolo non indifferente. Una possibile soluzione è applicare la tecnica detta “**zoom-in**”; tale tecnica consiste nell’eseguire simulazioni in cui solo una parte del volume preso in considerazione è posto ad una più alta risoluzione. L’estensione e la posizione di tale porzione di volume è ricostruibile percorrendo a ritroso la storia evolutiva dell’oggetto d’interesse, per poter individuare nelle condizioni iniziali quale sia la regione la cui evoluzione ha dato luogo alla alla formazione di tale oggetto. In questo modo, è possibile eseguire nuovamente la simulazione, ponendo solamente la zona d’interesse ad un’elevata risoluzione e campionando in modo più grossolano il resto del volume. La rappresentazione meno precisa della maggior parte della materia genererà nell’evoluzione un errore trascurabile, in quanto interagirà con l’oggetto considerato solo attraverso un campo mareale esterno. Lo scopo, dunque, è quello di riuscire a rappresentare sia le fluttuazioni su grande scala, che portano alla formazione dell’oggetto, sia quelle di dimensioni più ridotte, che determinano la sua struttura interna.

Storicamente, per eseguire questo tipo di simulazioni sono stati adottati due approcci differenti. Da una parte, sono state implementate tecniche per generare condizioni iniziali

¹Attualmente professore presso l’Observatoire de la Côte d’Azur/Université de Nice, France.

²Cosmologo computazionale presso il Kavli Institute for Particle Astrophysics and Cosmology e professore presso SLAC National Accelerator Laboratory e il Dipartimento di Fisica dell’Università di Stanford.

³<https://people.phys.ethz.ch/~hahn/MUSIC>

per un numero molto elevato di particelle, ma richiedendo un ingente utilizzo di risorse computazionali. D'altra parte, risulta significativo l'approccio utilizzato da Bertschinger (2001) nel codice GRAFIC-2 per la generazione di condizioni iniziali *nested*, vale a dire "concatenate", incastrate una dentro l'altra, in cui nello stesso volume sono generati diversi livelli di risoluzione in massa. MUSIC è un'estensione di tale lavoro precedente, in cui viene implementato un nuovo metodo di generazione di condizioni iniziali, che utilizza la rappresentazione della funzione di trasferimento (paragrafo 1.3) nello spazio reale, piuttosto che nello spazio di Fourier. La generazione delle condizioni iniziali avviene combinando un algoritmo *multi-scala*, per il calcolo del campo di densità iniziale su diversi livelli di risoluzione in massa, con uno *adattivo multi-griglia*, per risolvere numericamente l'equazione di Poisson da cui per calcolare il campo delle velocità iniziali e delle posizioni, in accordo con la teoria delle perturbazioni lagrangiane (paragrafo 1.4) fino al secondo ordine. Entrambi i metodi verranno brevemente illustrati in seguito. Inoltre, particolarmente interessante è l'approccio utilizzato per determinare i vincoli sulla conservazione della massa tra due diversi livelli di raffinamento, che verrà brevemente illustrato in seguito. I risultati ottenibili utilizzando tale approccio risultano essere ottimali nella generazione di condizioni iniziali *nested* (Hahn & Abel, 2011).

Nel resto del capitolo verranno brevemente presentate le caratteristiche principali del metodo implementato per la generazione di condizioni iniziali *nested* e, successivamente, verrà data una descrizione generale del programma, dal punto di vista dell'utilizzo pratico.

2.2 Generazione delle perturbazioni di densità e soluzione numerica dell'equazione di Poisson

Il primo ingrediente necessario per la generazione di condizioni iniziali, utilizzando la teoria lagrangiana delle perturbazioni (paragrafo 1.4), è il campo di fluttuazioni di densità $\delta(\vec{x})$, da cui calcolare le velocità e gli spostamenti. Il metodo solitamente utilizzato per ottenere $\delta(\vec{x})$ è il seguente, detto anche *k-space sampling* (Bertschinger, 2001):

1. si genera un campo gaussiano casuale $\mu(\vec{x})$, tipicamente da una distribuzione normale standard;
2. si richiede che le ampiezze di tale campo seguano uno specifico spettro di potenza $P(k)$; ciò si ottiene calcolando $\tilde{\delta}(\vec{k})$, vale a dire la rappresentazione di $\delta(\vec{x})$ nello spazio di Fourier, come $\tilde{\delta}(\vec{k}) = \sqrt{P(k)} \tilde{\mu}(\vec{k})$, dove $\tilde{\mu}(\vec{k})$ è la trasformata di Fourier di $\mu(\vec{x})$;
3. si ottiene $\delta(\vec{x})$ nello spazio reale eseguendo la trasformata di Fourier inversa.

Tale metodo risulta particolarmente efficiente per la generazione di condizioni iniziali ad un'unica risoluzione su tutto il volume di simulazione, ma presenta alcuni problemi quando si è prossimi a scale dello stesso ordine di grandezza della dimensione della scatola, in quanto, nel calcolo numerico delle trasformate di Fourier, il campionamento a tali scale risulta non accurato. Tale effetto diventa in particolare modo rilevante per piccoli volumi cosmologici, vale a dire per scatole di lato $\sim 100h^{-1}\text{Mpc}$. Nel momento in cui si desidera costruire condizioni iniziali *nested*, vale a dire generare diverse scatole una dentro l'altra, ciascuna con differenti livelli di risoluzione, non è possibile avere incertezze a scale della dimensione del volume di simulazione, in quanto questo produrrebbe degli errori non trascurabili nel passaggio dai volumi più interni a quelli più esterni. Di conseguenza, il metodo *k-space sampling* non è il più ottimale per questo caso specifico. La novità di MUSIC, per ovviare a questo problema, consiste nel generare $\delta(\vec{x})$ direttamente nello spazio reale tramite la **convoluzione** $\delta(\vec{x}) = T_R(x) \star \mu(\vec{x})$, tra la funzione di trasferimento reale $T_R(x)$ ed il campo gaussiano casuale $\mu(\vec{x})$. Così facendo, infatti, è possibile trattare in modo più semplice, direttamente nello spazio reale, il problema

di volumi di simulazione *nested*. Quindi, per un solo livello di risoluzione, la tecnica utilizzata risulta essere:

1. data la funzione di trasferimento $\tilde{T}(k)$ nello spazio di Fourier, fissata per una data cosmologia, se ne calcola la rappresentazione nello spazio reale, computando numericamente la trasformata di Fourier a partire da:

$$T_R(x) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{T}(k) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k})} d^3k ;$$

2. il volume della simulazione viene discretizzato in una griglia finita di punti $\vec{x}_{ijk} = (ih, jh, kh)$, dove h è il passo della griglia;
3. per ogni punto viene generato un numero casuale $\mu(\vec{x}_{ijk})$ e viene calcolato il valore di $T(\vec{x}_{ijk}) = T_R(\|\vec{x}_{ijk}\|)$ nello stesso punto;
4. si calcola numericamente la convoluzione tramite il prodotto $\tilde{\mu}(\vec{x}_{ijk})\tilde{T}(\vec{x}_{ijk})$ tra le trasformate di Fourier di $\mu(\vec{x}_{ijk})$ e $T(\vec{x}_{ijk})$, per tutti i punti della griglia;
5. si ottiene $\delta(\vec{x}_{ijk})$ anti-trasformando nuovamente il risultato ottenuto nel punto precedente.

Tale metodo, sebbene possa sembrare più laborioso del precedente, risulta vantaggioso nel caso in cui sia applicato alla generazione di condizioni iniziali *nested*.

Al fine di generare una rappresentazione accurata delle perturbazioni di densità a più livelli di risoluzione con il metodo appena descritto, è necessario generare il campo gaussiano casuale trattando in modo accurato i vincoli sulla **conservazione della massa** tra un livello di raffinamento e l'altro. Difatti, per una buona approssimazione, è necessario che la massa venga conservata localmente e globalmente all'interno della scatola, nel momento in cui un certo numero di celle della griglia principale viene suddiviso in volumi più piccoli per andare a formare la zona a più alta risoluzione in massa (figura 2.1). Bisogna tenere conto di tale aspetto già nella generazione del campo gaussiano casuale $\mu(\vec{x})$, in quanto nel procedimento utilizzato il campo di densità viene generato a partire da $\mu(\vec{x})$. Per semplicità, d'ora in poi ci si riferirà con l al livello a risoluzione più bassa, mentre con $l + 1$, $l + 2$ e così via a quelli a risoluzione man mano più elevata (si veda la figura 2.1, (a)). L'approccio solitamente utilizzato è quello utilizzato nell'ambito dell'algoritmo Hoffman-Ribak (Hoffman & Ribak, 1991), che prevede la generazione di un campo gaussiano casuale per il livello $l + 1$, dipendente dal livello superiore l . Tuttavia, poiché tale approccio non conserva i modi di Fourier, in MUSIC è implementato un metodo differente:

1. è generato un campo gaussiano senza vincoli per il livello $l + 1$ con varianza pari a otto volte quella del campo gaussiano del livello l ;
2. per garantire la conservazione dei modi di Fourier del livello l , viene calcolata la trasformata di Fourier sia per il campo casuale del livello $l + 1$ sia per la parte di quello del livello l che si sovrappone al livello $l + 1$; dunque tutti i modi, fino al numero d'onda di Nyquist, pari a π/h con h il passo della griglia, sono sostituiti con il rispettivo coefficiente di Fourier e nuovamente anti-trasformati;
3. al fine di conservare la massa l'algoritmo Hoffman-Ribak viene applicato al contrario, vale a dire che i valori del campo gaussiano casuale della parte di livello l che si sovrappone al livello $l + 1$ vengono sostituiti con la media del campo sull'intero livello $l + 1$.

Iterando il procedimento è possibile calcolare anche ulteriore livelli di raffinamento, sempre imponendo la conservazione dal livello più fine a quello meno fine. Utilizzando tale metodo,

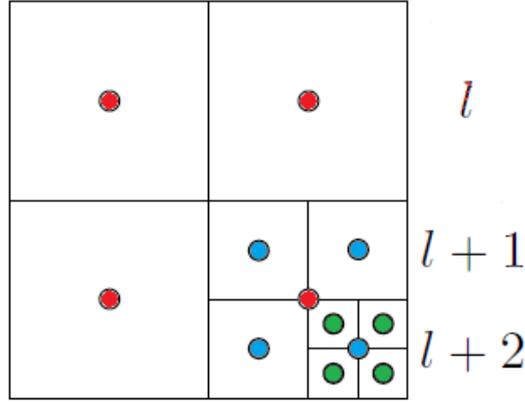


Figura 2.1: Suddivisione del volume in griglie *nested* utilizzata nell'algoritmo *multi-scala*. Nella figura sono mostrati due livelli di raffinamento, in cui una cella “progenitrice” della griglia superiore (livello l) viene suddivisa in otto celle “figlie” (livello $l + 1$). Si noti che il centro delle celle “figlie”, non coincide con quello delle celle “progenitrici”.

dunque, si è in grado di soddisfare i vincoli sulla conservazione della massa, sia globale che locale, e, allo stesso tempo, preservare i modi di Fourier all'interfaccia tra due diversi livelli di raffinamento.

Una volta generato il campo gaussiano casuale $\mu(\vec{x})$ rispettando i vincoli sulla conservazione della massa, è necessario calcolare la funzione di trasferimento $T(x)$ su più livelli, al fine di poterne calcolare la convoluzione con $\mu(\vec{x})$. Anche in questo caso, la funzione di trasferimento viene calcolata direttamente nello spazio reale a partire dal livello più fine, per poi passare a quello superiore rispettando i vincoli sulla conservazione della massa. Dunque, si comincia calcolando la funzione di trasferimento $T_{l+1}(x_{ijk})$ al livello $l + 1$, per tutti gli \vec{x}_{ijk} appartenenti alla zona a più alta risoluzione. Successivamente, è calcolata la funzione di trasferimento al livello superiore $T_l(x_{ijk})$, ma questa viene sostituita con i valori delle medie sul livello $l + 1$, per tutti gli \vec{x}_{ijk} che appartengono alla zona che si sovrappone alla regione a più alta risoluzione. Data la funzione di trasferimento, è possibile procedere al calcolo del campo di densità. Per la griglia principale, vale a dire il livello l , è sufficiente calcolare δ_l con il metodo spiegato in precedenza per un solo livello di risoluzione. Per il campo di densità per il livello $l + 1$, invece, bisogna applicare un metodo più complesso, in quanto bisogna tenere conto di diversi contributi, come segue. Tutti questi contributi sono calcolati come convoluzione tra la funzione di trasferimento e il campo gaussiano casuale, ma per ognuno viene considerata una zona diversa della scatola. Difatti, δ_{l+1} è la somma di un termine derivante dal livello l , di uno calcolato per il livello $l + 1$ come se fosse isolato e di un ultimo termine correttivo, finalizzato a minimizzare gli effetti all'interfaccia tra i due livelli. È da notare che, nel calcolo degli ultimi due, per ridurre gli errori dovuti all'interfaccia, è anche necessario considerare un volume di lato lungo il doppio quello della zona a più alta risoluzione, in particolare nel momento in cui viene calcolata numericamente la trasformata di Fourier. Tale regione aggiuntiva è detta di *padding*. Inoltre, MUSIC dispone della possibilità di aumentarne l'estensione a piacimento per mezzo del parametro *overlap*, all'interno del file di configurazione, illustrato nel seguito. Bisogna sottolineare che la regione di *padding* appena descritta non va confusa con il parametro *padding*, legato alla risoluzione in massa delle particelle della scatola e che verrà introdotto successivamente.

Generato il campo di densità iniziale δ , è possibile applicare la teoria delle perturbazioni lagrangiana (paragrafo 1.4) per calcolare i campi di velocità e spostamenti delle singole particelle. Ciò richiede di risolvere numericamente l'equazione di Poisson, con condizioni al contorno periodiche. Al contrario di quanto di quanto utilizzato comunemente, ad esempio in Bertschinger (2001), in MUSIC è implementato un particolare metodo di soluzione numerica

dell'equazione di Poisson detto *multi-griglia*, più facilmente adattabile al caso di condizioni iniziali *nested*. Esso consiste nel creare una gerarchia di livelli l di griglie, ognuna con il suo passo h_l , tale che $h_l/h_{l+1} = 2$, vale a dire con fattore 2 di raffinamento tra i vari livelli. Su ogni griglia viene discretizzata l'equazione di Poisson, utilizzando un'approssimazione numerica per rappresentare il laplaciano. Poi, per ogni livello viene risolta l'equazione di Poisson in forma discreta grazie al *Full Approximation Scheme*, anche detto FAS (Brandt, 1997), la cui descrizione va oltre gli scopi di questo lavoro di tesi. Il metodo utilizzato si basa su un algoritmo che sfrutta la soluzione al livello più profondo $l + 1$ per calcolare le correzioni alla soluzione al livello superiore l . Il procedimento viene successivamente esteso ed adattato al caso di condizioni iniziali *nested*, in quello che viene chiamato algoritmo *adattivo multi-griglia*. Data la soluzione dell'equazione di Poisson, è poi possibile calcolare numericamente i campi di velocità e spostamenti iniziali, secondo quanto previsto dalla teoria delle perturbazioni lagrangiana (equazioni 1.14-18).

2.3 Descrizione dei parametri di configurazione

Dopo aver presentato le caratteristiche teoriche del programma, in questo capitolo verrà illustrato il codice da un punto di vista pratico. I parametri selezionabili dall'utilizzatore nel file di configurazione di MUSIC si dividono in cinque sezioni:

SETUP contiene le impostazioni generali della scatola di simulazione, come il volume della scatola, il *redshift* a cui si vogliono generare le condizioni iniziali, le caratteristiche dei diversi livelli di risoluzione.

COSMOLOGY Specifica i parametri cosmologici da utilizzare.

RANDOM È dove sono definiti i semi da cui partire per la generazione dei numeri casuali. È da notare che è necessario definire un nuovo seme per ogni livello di risoluzione. In alternativa, è anche possibile fornire direttamente in *input* un file diverso per ogni livello di risoluzione, contenente i numeri casuali necessari.

OUTPUT In questa sezione è possibile definire il tipo di *output* desiderato e le sue caratteristiche, come nome del file e formato.

POISSON definisce i parametri per la soluzione numerica *multi-griglia* dell'equazione di Poisson, quali il grado di accuratezza richiesto e gli ordini dell'approssimazione numerica degli operatori laplaciano e gradiente.

Nel presente lavoro di tesi sono stati studiati soprattutto i parametri della sezione SETUP, di cui verrà data in seguito una descrizione più dettagliata. Per quanto riguarda le altre sezioni, la cosmologia utilizzata è quella riportata nella tabella 1.1; per i numeri casuali è stata lasciata autonomia al programma, inizializzando solamente i semi per i livelli utilizzati; come *output* è stato selezionato quello compatibile con GADGET (Springel, 2005), mentre per la sezione POISSON sono stati lasciati invariati i valori standard forniti come esempio da MUSIC al primo utilizzo.

I parametri della sezione SETUP sono stati particolarmente importanti per lo sviluppo del presente lavoro di tesi, in quanto definiscono le caratteristiche dell'eventuale zona a più alta risoluzione, da creare all'interno della scatola cosmologica. Le voci principali di tale sezione sono:

boxlength definisce la lunghezza del lato della scatola, in unità di h^{-1} Mpc.

zstart Definisce il *redshift* iniziale da cui far partire la simulazione.

- region** Permette di definire la forma della regione che verrà posta a risoluzione più elevata all'interno della scatola; è possibile scegliere l'opzione *box*, che viene applicata in automatico nel caso in cui non sia specificato nulla sotto questa voce, oppure *ellipsoid*, che, tuttavia, richiede anche di redarre un file contenente un elenco di posizioni da cui identificare la regione ellittica, da indicare nella voce **region_point_file**.
- levelmin** Definisce il livello di risoluzione in massa e, dunque, più basso della scatola. In MUSIC i soli livelli di risoluzione possibili sono potenze di due, vale a dire che il numero n , intero, impostato sotto questa voce, definisce una scatola con 2^n particelle per dimensione.
- levelmax** Come nel caso precedente questo numero, intero, è l'esponente di 2 che definisce la risoluzione in massa, in questo caso della zona della scatola ad alta risoluzione. **levelmax** deve sempre essere necessariamente maggiore di **levelmin**, a meno che non si voglia generare condizioni iniziali con un solo livello di risoluzione in massa, per cui **levelmax** e **levelmin** devono essere uguali.
- padding** Nel caso in cui il salto tra due livelli di risoluzione sia maggiore di un livello soltanto, vale a dire quando **levelmax** > **levelmin** + 1, è possibile richiedere che venga creata una zona a risoluzione intermedia. Il parametro **padding** regola l'estensione di tale zona. Il suo utilizzo verrà illustrato ampiamente in seguito, nel capitolo 3.
- overlap** È il numero di celle in più che si desidera aggiungere nel calcolo delle convoluzioni per la generazione del campo di perturbazioni di densità, al fine di ridurre gli effetti di interfaccia (si veda il paragrafo 2.2).
- baryons** È da impostare su *yes* nel caso in cui si voglia fare una simulazione includendo anche la materia barionica e non solo quella oscura.
- use_2LPT** È da impostare su *yes* nel caso in cui si richieda di utilizzare per il calcolo dei campi di velocità e degli spostamenti iniziali la teoria lagrangiana delle perturbazioni fino al secondo ordine.
- ref_offset** Nel caso in cui essa sia di forma cubica, questo parametro definisce la posizione dell'angolo in basso a sinistra della zona da porre a più alta risoluzione all'interno della scatola. Le coordinate vanno fornite in unità di lunghezza del lato della scatola. Non è necessario specificare questo parametro nel caso in cui si sia scelto di utilizzare una zona di forma ellittica, piuttosto che cubica.
- ref_center** Alternativamente, è possibile definire la posizione del centro della regione a più alta risoluzione, sempre in unità di lunghezza del lato della scatola. Non è necessario specificare questo parametro nel caso in cui si sia scelto di utilizzare una zona di forma ellittica, piuttosto che cubica.
- ref_extent** Definisce l'estensione, lungo le tre dimensioni della scatola, della zona a più alta risoluzione, da fornire in unità di lunghezza del lato della scatola. Non è necessario specificare questo parametro nel caso in cui si sia scelto di utilizzare una zona di forma ellittica, piuttosto che cubica.
- ref_dims** Al posto di indicare l'estensione della regione a più alta risoluzione, è anche possibile definire il numero di punti griglia che si desidera costituiscano tale regione. Non è necessario specificare questo parametro nel caso in cui si sia scelto di utilizzare una zona di forma ellittica, piuttosto che cubica.

Nel corso del lavoro svolto, illustrato nel dettaglio nel capitolo 3, sono state utilizzate regioni a più alta risoluzione in massa di forma sia cubica che ellittica, per una scatola da $500 h^{-1} \text{Mpc}$

da *redshift* $z = 50$ a $z = 0$. Inoltre, sono stati studiati gli effetti sia del *padding* che dell'*overlap*. Nel corso di tutte le simulazioni si è fatto uso della LPT solamente fino al primo ordine e, per il momento, non è ancora stata aggiunta la materia barionica.

Capitolo 3

Ri-simulazione di un alone da $10^{15} M_{\odot}$

Dopo aver introdotto il tema della generazione delle condizioni iniziali e descritto l'approccio utilizzato nel codice MUSIC, in questo capitolo verrà presentato e descritto nel dettaglio il lavoro di analisi di diverse simulazioni e ri-simulazioni che è stato svolto.

3.1 Introduzione

Come già descritto nel capitolo 2, il programma MUSIC permette di generare condizioni iniziali per simulazioni cosmologiche con diverse caratteristiche. Le opzioni che esso offre sono molteplici (si veda il paragrafo 2.3) ed un loro studio approfondito richiederebbe una trattazione molto più estesa della presente. Il lavoro di questa tesi è stato incentrato su simulazioni contenenti solamente materia oscura e, nello specifico, sull'analisi delle proprietà di un alone del tipo ammasso di galassie ($M \sim 10^{15} M_{\odot}$), ri-simulato con tecnica “*zoom-in*” per diverse configurazioni di partenza. Subito a seguire nell'introduzione verrà data una panoramica del funzionamento del programma, descrivendo i diversi test che sono stati svolti.

In una simulazione cosmologica viene campionata una certa porzione di Universo, rappresentata da una scatola cubica di volume costante in coordinate comoventi (par. 1.2) e in cui sono state imposte condizioni periodiche al contorno. La massa totale contenuta nella scatola, fissata a partire dai parametri cosmologici, è suddivisa poi in un certo numero di particelle di massa uguale. Variando il numero di particelle contenute nella scatola, cambia la **risoluzione** in massa con la quale la simulazione viene eseguita. Infatti, un maggiore numero di particelle equivale a particelle di massa minore e ad un campionamento in massa più fine e, di conseguenza, ad uno studio più preciso. Fissata la cosmologia, nella generazione di condizioni iniziali i primi parametri da definire sono: la lunghezza del lato della scatola, il numero di particelle, cioè la risoluzione, ed il *redshift* z , che equivale a scegliere un istante iniziale da cui far partire la simulazione, per poi farla evolvere fino al tempo attuale ($z = 0$). Per tutte le simulazioni effettuate è stata scelta una scatola di lato $500 h^{-1}$ Mpc, a partire da $z = 50$ ($a = 0.0196$), con i parametri cosmologici elencati nella tabella 1.1. Il valore del *redshift* utilizzato è stato scelto in quanto rientra nei limiti di applicabilità dell'approssimazione di Zel'dovich (paragrafo 1.4), ma contemporaneamente non corrisponde ad un tempo di simulazione troppo elevato. La prima parte del lavoro, dopo le operazioni preliminari di compilazione, è stata dedicata al generare condizioni iniziali di diverso tipo, ad esempio con diverse risoluzioni (figura 3.1). È da notare che in MUSIC è possibile impostare solamente numeri di particelle per lato che siano pari a potenze di due, ad esempio $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$ e così via.

Come già accennato in precedenza, la principale caratteristica di MUSIC è quella di poter generare condizioni iniziali per simulazioni in cui solo l'oggetto di interesse è posto ad una

più alta risoluzione. Infatti, con MUSIC è possibile creare zone di diverse forme (cubiche, rettangolari o ellittiche) e situate in una qualsiasi posizione con una risoluzione più alta di quella del resto della scatola. Entrambi i livelli di risoluzione sono selezionabili a piacimento, con l'unico vincolo che la zona a più alta risoluzione non sia di volume superiore a metà di quello dell'intera scatola. Inoltre, nel caso in cui il salto sia più grande di un solo livello, il programma offre la possibilità di inserire una fascia di particelle a risoluzione intermedia tra le due diverse zone, regolabile tramite il parametro *padding*. Ad esempio, passando da 64^3 particelle a 256^3 , se il *padding* è impostato ad un numero diverso da 0, MUSIC creerà una regione di particelle a risoluzione 128^3 , di ampiezza variabile a seconda del valore di *padding* scelto. In figura 3.2 sono riportati diversi esempi di condizioni iniziali con zone a più alta risoluzione. È da sottolineare che, qualora si generi una porzione di volume a più alta risoluzione all'interno della scatola, il programma sfrutta le condizioni al contorno periodiche per far sì che tale regione risulti posizionata al centro del cubo. Di conseguenza, ogni particella all'interno della scatola viene traslata dalla posizione che avrebbe avuto in un set di condizioni iniziali ad una sola risoluzione. Essendo nota l'entità dello spostamento è possibile confrontare le posizioni delle strutture che si vengono a formare in simulazioni con diversi tipi di zone a più alta risoluzione.

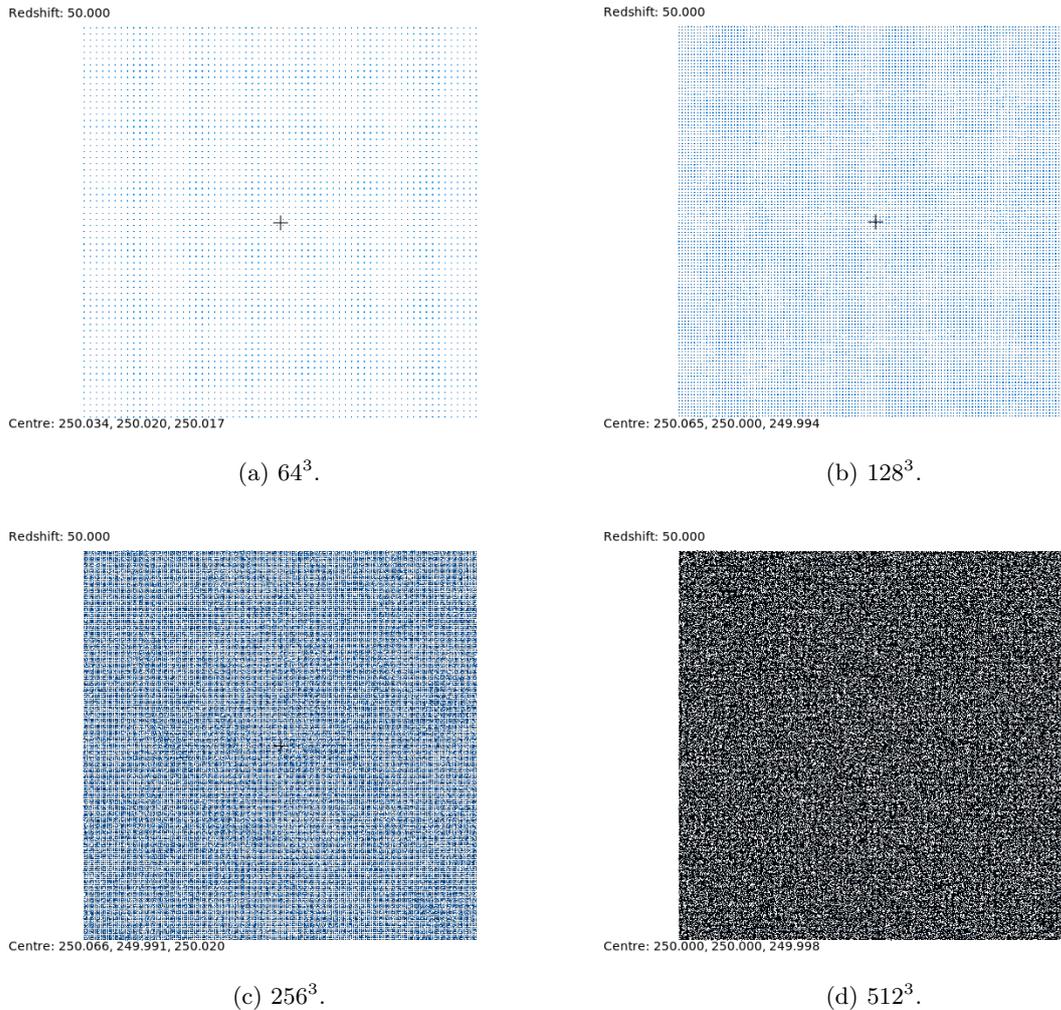


Figura 3.1: Alcuni esempi di condizioni iniziali per una scatola di lato $500 h^{-1} \text{Mpc}$, a $z = 50$, con 64^3 (a), 128^3 (b), 256^3 (c) e 512^3 (d) particelle. Le distanze indicate sono misurate in $h^{-1} \text{Mpc}$. Immagini prodotte con Gadgetviewer (<http://astro.dur.ac.uk/~jch/gadgetviewer/index>).

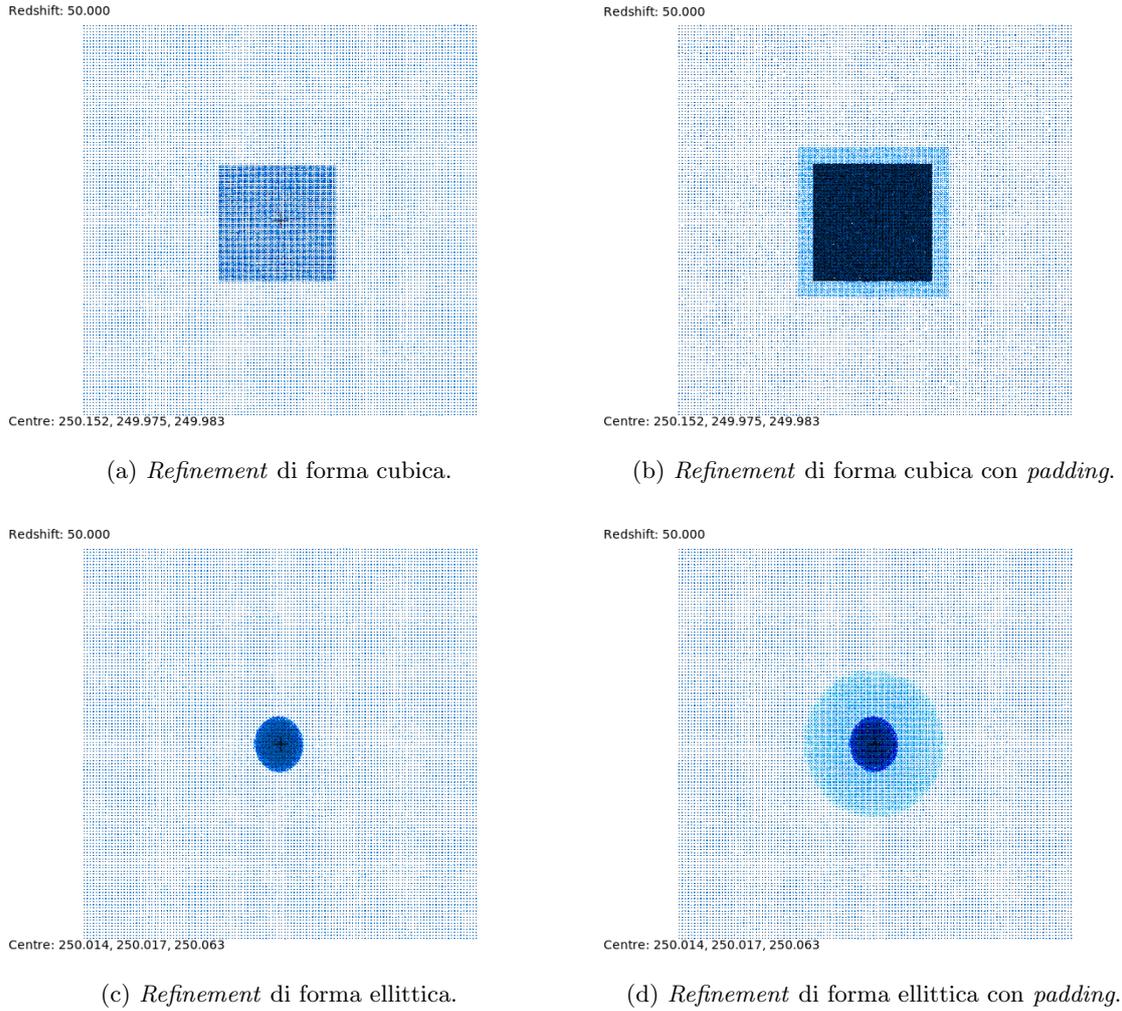


Figura 3.2: Esempi di condizioni iniziali per una scatola di lato $500 h^{-1} \text{Mpc}$, a $z = 50$ e da 128^3 particelle. Nella prima colonna è riportato un esempio di condizioni iniziali con una zona a più alta risoluzione (256^3 particelle) di forma cubica (a) ed ellittica (c); la seconda, invece, costituisce un esempio di condizioni iniziali di una zona a più alta risoluzione (512^3 particelle) ma con un livello intermedio di *padding*, corrispondente ad una risoluzione di 256^3 , sempre di forma cubica, con *padding* corrispondente a 5 punti griglia, (b) ed ellittica, con *padding* corrispondente a 15 punti griglia, (d). Le distanze indicate sono misurate in $h^{-1} \text{Mpc}$. Immagini prodotte con Gadgetviewer (<http://astro.dur.ac.uk/~jch/gadgetviewer/index>).

Dunque, avendo chiare quali siano le possibilità offerte da MUSIC, è possibile effettuare una simulazione “*zoom-in*”, secondo il seguente procedimento:

- il primo passo è eseguire una simulazione preliminare di sola materia oscura, ad una risoluzione modesta, per poter individuare la posizione ed il volume dell’oggetto che si desidera studiare, ad esempio aloni molto massivi, del tipo ammasso di galassie.
- Scelto l’oggetto di studio ed identificate le particelle che lo compongono, bisogna procedere a ritroso per individuare la posizione che queste avevano nelle condizioni iniziali utilizzate (figura 3.4).
- Avendo le coordinate e l’estensione della zona nelle condizioni iniziali che ha partecipato attivamente alla formazione dell’oggetto di studio, si genera un nuovo set di condizioni iniziali ponendo tale regione ad una risoluzione a piacimento più elevata. In questo passaggio è fondamentale mantenere gli stessi parametri cosmologici e le stesse impostazioni, ad esempio volume della scatola e *redshift*, utilizzati nella simulazione iniziale. Bisogna,

soprattutto, prestare attenzione a non cambiare il *seme* da cui vengono generati i numeri casuali, utilizzati per il calcolo delle posizioni e velocità delle particelle, in modo da non modificarle ed ottenere lo stesso tipo di simulazione. Per un esempio si veda la figura 3.4.

- In caso, è possibile, infine, aggiungere alla simulazione anche la materia barionica.

Tale modo di procedere, utilizzato anche dagli autori di MUSIC (Hahn & Abel, 2011), è quello che è stato adottato nel corso del presente lavoro di tesi. Infatti, lo scopo di tale lavoro è stato quello di studiare come il tipo di condizioni iniziali utilizzate possa influire sulle caratteristiche delle strutture che si formano nel corso della simulazione. Nello specifico, si è scelto di studiare un alone di materia oscura del tipo ammasso di galassie, di massa pari circa a $10^{15} M_{\odot}$. Dopo una simulazione di partenza da 256^3 particelle, per una scatola di lato $500 h^{-1} \text{Mpc}$ da $z = 50$ a $z = 0$, nella prima parte del lavoro sono state effettuate diverse ri-simulazioni, in cui era presente una zona a risoluzione più alta, da 512^3 particelle. Le diverse ri-simulazioni differiscono per il volume e la forma di tali regioni. Per la generazione delle condizioni iniziali di tutte le simulazioni, è stata utilizzata la LPT (paragrafo 1.4) soltanto fino al primo ordine, in quanto test preliminari. Lo studio dell'applicazione della LPT fino al secondo ordine è lasciato come obiettivo per l'ipotesi di un ulteriore studio futuro. Le proprietà che sono state analizzate, in funzione del raggio dell'alone, sono massa, velocità del centro di massa dell'alone, momento angolare e numero di particelle a bassa risoluzione contenute entro il raggio considerato. Inoltre, per avere il risultato esatto con cui confrontare i risultati dell'analisi delle simulazioni precedenti, si è deciso di produrre una simulazione con risoluzione di 512^3 particelle per tutto il volume della scatola cosmologica. Nella seconda parte, invece, sono state effettuate ri-simulazioni a tre livelli di risoluzione (128^3 , 256^3 e 512^3 particelle) per studiare l'effetto del *padding*, in particolare sulla massa dell'alone e sul numero di particelle a bassa risoluzione contenuto in esso. Per queste due proprietà, inoltre, è stato studiato brevemente anche l'effetto dell'*overlap* (par. 2.3). Da ultimo, è stata analizzato l'alone anche in una simulazione a quattro diversi livelli di risoluzione (128^3 , 256^3 , 512^3 e 1024^3 particelle), sempre facendo uso del *padding*.

In questo lavoro di tesi, tutte le simulazioni effettuate, del tipo *N-body*, sono state eseguite con il codice GADGET-3, la più recente versione di GADGET-2 (Springel, 2005) ancora non pubblicata ufficialmente. Grazie alle convenzioni vigenti con l'Università degli Studi di Trieste, è stato possibile utilizzare per le simulazioni la macchina "GALILEO", presso CINECA¹. Per l'identificazione ed un primo studio approssimativo degli aloni è stato usato l'algoritmo "*Friends-of-Friends*" o **FoF** (Davis et al., 1985), implementato in Gadget. L'analisi approfondita è stata, poi, eseguita con codici, in linguaggio PYTHON, scritti da Pierluigi Monaco e riadattati alle esigenze specifiche di questo lavoro. Per la visualizzazione grafica del risultato delle simulazioni è stato utilizzato Gadgetviewer².

¹<http://www.cineca.it/it/content/galileo>

²<http://astro.dur.ac.uk/~jch/gadgetviewer/index>

3.2 Simulazione da 256^3 particelle

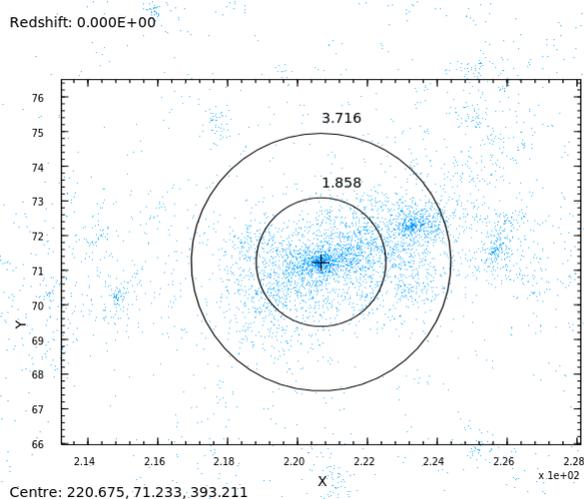
Secondo il procedimento descritto nel paragrafo precedente, come prima cosa è stata effettuata una simulazione a bassa risoluzione (256^3 particelle), per poter identificare un alone che presentasse le caratteristiche desiderate per lo studio da effettuare. Si è cercato un alone di massa da catalogo FoF circa pari a $10^{15} M_{\odot}$ per quanto possibile isolato da altre strutture massicce. Nella tabella 3.1 sono riportate le caratteristiche principali dell'alone scelto per le ri-simulazioni. Si ricorda che è stata utilizzata una scatola in condizioni al contorno periodiche di lato $500h^{-1}$ Mpc, simulata da *redshift* $z = 50$ a $z = 0$, usando i valori dei parametri cosmologici elencati nella tabella 1.1, applicando la LPT solamente fino al primo ordine. In figura 3.3 è raffigurato l'alone designato, proiettato sui piani XY, XZ ed YZ degli assi della scatola, a $z = 0$. Prima di passare alle ri-simulazioni, sono state analizzate le caratteristiche di tale alone, vale a dire posizione del centro di massa, massa ed estensione radiale.

Come misura della posizione e della massa, sono stati adottati i valori presenti nell'*output* FoF, calcolati da GADGET. Tuttavia, in seguito ad un'analisi più approfondita, è emerso che tali stime risultano essere imprecise, soprattutto per quanto riguarda la stima della massa dell'alone, incostante per le diverse ri-simulazioni e spesso sovrastimata, e la posizione del centro di massa, che risulta essere quasi sempre spostato, probabilmente a causa di altre strutture presenti nelle vicinanze dell'alone considerato. In particolare, per ottimizzare la posizione del centro di massa è stato implementato un semplice algoritmo per cercare di individuare in modo migliore il picco di densità dell'alone. Tale metodo si basa sul calcolare iterativamente il centro di massa delle particelle all'interno di una data sfera, adottando di volta in volta come nuovo centro della sfera il precedente centro di massa calcolato. Il procedimento viene ripetuto finché la distanza tra due centri successivi calcolati non diventa minore di una certa soglia prefissata. In seguito a considerazioni tratte approssimativamente studiando la rappresentazione dell'alone prodotta da Gadgetviewer, è stata impostata la soglia di $0.001 h^{-1}$ Mpc. L'utilizzo di questo algoritmo, difatti, ha portato ad esiti che, ad un confronto visivo tramite la rappresentazione grafica dell'alone, sono risultati più precisi ed è stato quindi adottato anche per tutte le altre simulazioni. Un esempio del confronto tra la posizione calcolata in questo modo e quella fornita dai cataloghi FoF è riportato nella tabella 3.1.

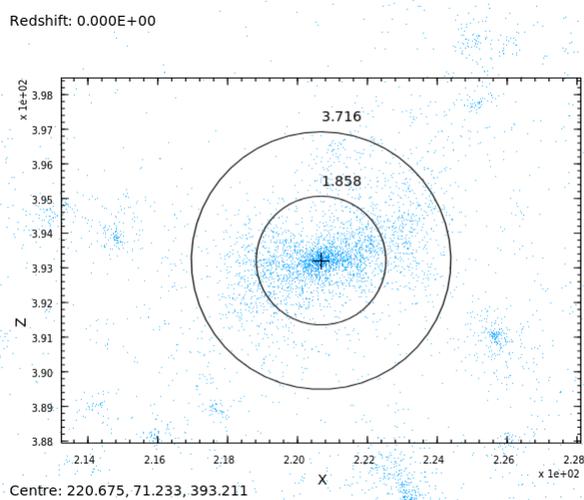
Tabella 3.1: Elenco delle principali caratteristiche dell'alone calcolate, relative alla simulazione da 256^3 particelle.

r_{200m}	$2.90 h^{-1}$ Mpc
r_{200c}	$2.07 h^{-1}$ Mpc
Massa FoF	$1.94 \times 10^{15} M_{\odot}$
Massa entro r_{200c}	$1.39 \times 10^{15} M_{\odot}$
Posizione centro da FoF	(220.869, 71.163, 393.267) in h^{-1} Mpc
Posizione centro ottimizzata	(220.675, 71.233, 393.211) in h^{-1} Mpc

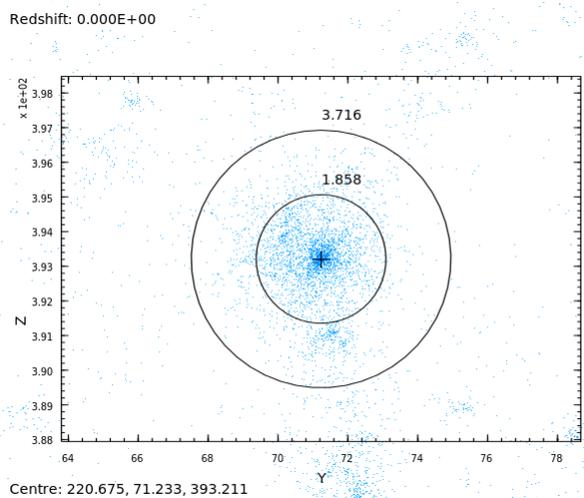
Per quanto riguarda l'estensione dell'alone, la quantità solitamente utilizzata è il **raggio viriale**. Per definizione, dato il centro di massa dell'alone, il raggio viriale definisce la regione sferica all'interno della quale la densità è pari a duecento volte la densità critica ρ_c (paragrafo 1.2). Alternativamente, è anche possibile prendere in considerazione la densità media piuttosto che ρ_c , poiché l'una è dipendente dall'altra per definizione di parametro di densità (equazione 1.5). Nel seguito della trattazione verrà chiamato r_{200m} il raggio viriale corrispondente a duecento volte la densità media, mentre quello relativo alla densità critica sarà r_{200c} . Per la simulazione a 256^3 particelle sono stati calcolati sia r_{200m} che r_{200c} (tabella 3.1). Per rendere un'idea visiva dell'entità del raggio viriale, nella figura 3.4, (c) sono state rappresentate le



(a)



(b)



(c)

Figura 3.3: Alone analizzato proiettato sul piano XY (a), XZ (b) e YZ (c) a $z = 0.00$. Le distanze indicate sono misurate in h^{-1} Mpc. Immagini prodotte con Gadgetviewer.

posizioni delle particelle dell'alone insieme ad una sfera di raggio r_{200m} , posizionata nel centro di massa.

Una volta scelto l'alone, è stato possibile procedere con la preparazione delle condizioni iniziali per le diverse ri-simulazioni. Per poter definire i confini della regione da porre a risoluzione maggiore, è stato necessario individuare quale fosse la posizione delle particelle costituenti l'alone nelle condizioni iniziali. Ciò è stato possibile in quanto ogni particella della scatola è riconoscibile per mezzo di un numero identificativo, che rimane invariato nel corso dell'evoluzione. Come primo test, si è scelto di considerare tutte le particelle presenti nell'alone, secondo il catalogo FoF (figura 3.4, (a)), contenute a $z = 0$ in un parallelepipedo di volume pari a $224.7 h^{-3} \text{Mpc}^3$, centrato sulla posizione (220.86, 71.16, 393.27), in coordinate della scatola, leggermente minore di quello di una sfera di raggio $2 r_{200c}$ ($272.1 h^{-3} \text{Mpc}^3$). Poi, per ognuna di queste particelle è stata identificata la corrispondente posizione nelle condizioni iniziali a $z = 50$ (figura 3.4, (b)). Dunque, come regione da porre a più alta risoluzione, detta anche zona di *refinement*, è stato selezionato un parallelepipedo di dimensioni $34.7 \times 42.2 \times 34.6 h^{-1} \text{Mpc}$ contenente tutte le particelle selezionate. Infine, sono state generate nuove condizioni iniziali, uguali a quelle della simulazione di partenza, con risoluzione 256^3 , ma con la regione appena descritta posta alla risoluzione di 512^3 particelle. Da tali condizioni iniziali, quindi, è stata eseguita la prima ri-simulazione.

In seguito, utilizzando lo stesso procedimento, sono state effettuate ulteriori ri-simulazioni con zone di *refinement* ellittiche, piuttosto che di forma rettangolare. MUSIC, infatti, offre la possibilità di fornire come *input* un elenco di coordinate. Il programma, poi, provvede autonomamente a costruire una regione ellittica che le contenga tutte. Dunque, sono state selezionate le particelle contenute in 2, 3, 4, 5, 6 e 7 volte r_{200m} , a partire dal centro calcolato con il metodo spiegato in precedenza. Per un esempio dell'estensione di una sfera di raggio r_{200m} si veda la figura 3.4, (c). Una volta ricostruita la posizione nelle condizioni iniziali, per ognuno di questi set è stata eseguita una ri-simulazione, sempre da 256^3 particelle e con una zona di *refinement* ellittica con risoluzione 512^3 . È stato scelto di fare ri-simulazioni di questo tipo in quanto si ritiene che utilizzare una regione ellittica sia un modo di selezionare più precisamente le particelle che contribuiscono alla formazione dell'alone.

Da ultimo, è stata eseguita una simulazione ponendo tutta la scatola a risoluzione di 512^3 particelle e, per il resto, del tutto identica alla simulazione iniziale. In questo modo, è stato possibile confrontare l'esito delle ri-simulazioni con il risultato esatto.

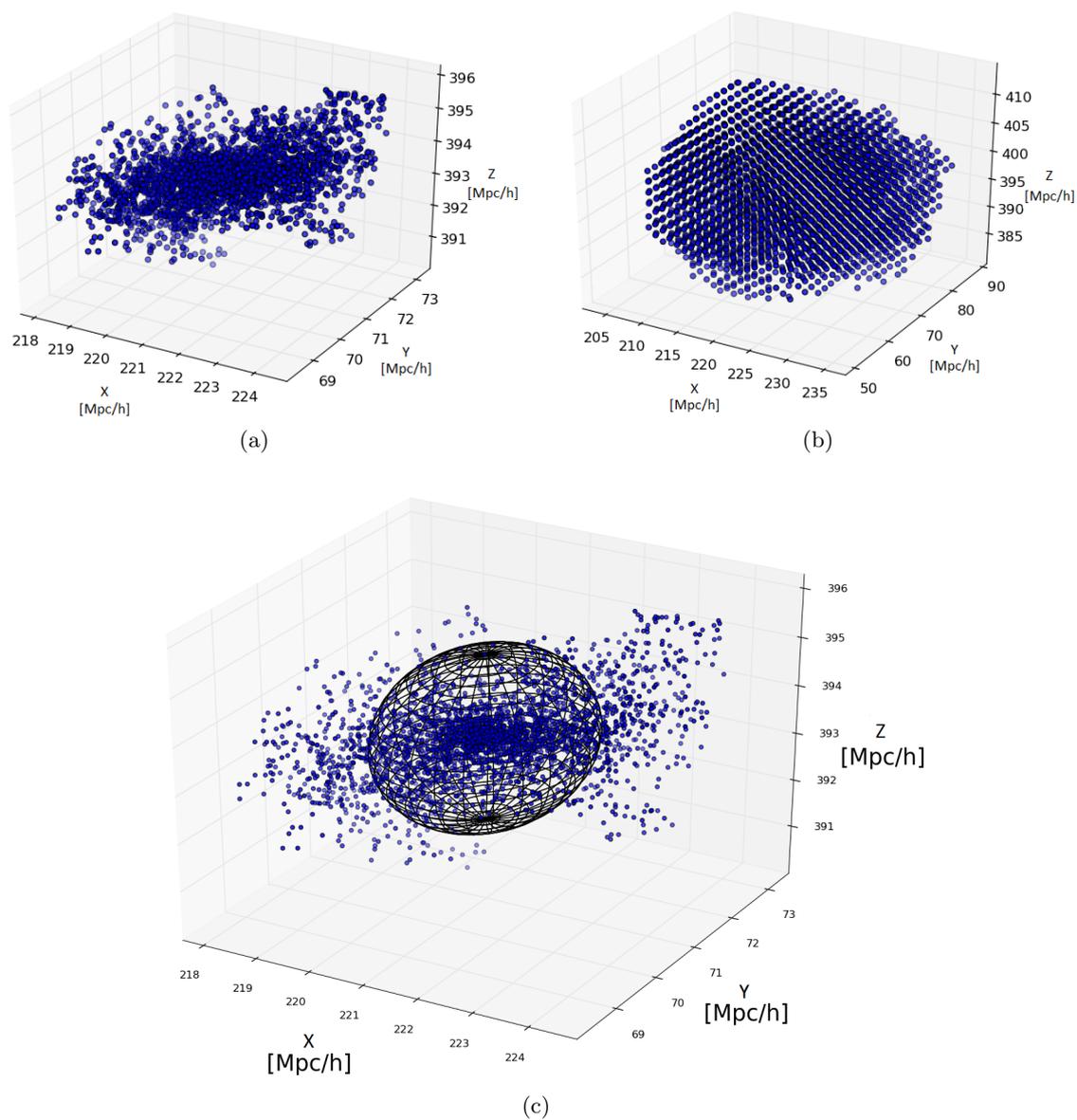


Figura 3.4: Posizione delle particelle costituenti l'alone scelto secondo catalogo FoF nel risultato finale della simulazione (a) e nelle condizioni iniziali (b). In (c) sono rappresentate le posizioni delle particelle presenti in un volume più grande di quello contenente il solo alone FoF. Inoltre, è raffigurata la sfera di raggio r_{200m} , calcolato come descritto nel paragrafo 3.2. Grafici prodotti con PYTHON.

Tabella 3.2: Tabella riassuntiva dei risultati delle analisi per le diverse simulazioni. Con M_{200} si vuole intendere la massa dell’alone entro r_{200c} . Tutte le simulazioni sono state eseguite impiegando un solo nodo della macchina, corrispondente a sedici *core*, tranne quella a 512^3 particelle, per cui ne sono stati utilizzati otto.

Simulazione	M_{FoF} [$10^{15} M_{\odot}$]	M_{200} [$10^{15} M_{\odot}$]	r_{200c} [h^{-1} Mpc]	Tempo macchina [h]
256^3	1.94	1.37	2.07	42.3
512^3	2.01	1.38	2.09	770.2
<i>Refinement</i> rettangolare	2.51	1.38	2.10	44.1
<i>Refinement</i> ellittico ($2r_{200m}$)	2.58	1.37	2.07	44.0
<i>Refinement</i> ellittico ($3r_{200m}$)	3.17	1.36	2.05	44.3
<i>Refinement</i> ellittico ($4r_{200m}$)	3.38	1.35	2.05	44.6
<i>Refinement</i> ellittico ($5r_{200m}$)	3.40	1.36	2.07	48.4
<i>Refinement</i> ellittico ($6r_{200m}$)	3.39	1.37	2.07	44.7
<i>Refinement</i> ellittico ($7r_{200m}$)	3.39	1.35	2.05	44.9

3.3 Analisi delle ri-simulazioni e confronto con simulazione da 512^3 particelle

Dal momento che lo scopo del presente studio è quello di verificare che simulazioni in cui solo l’oggetto d’interesse è posto alla risoluzione desiderata producano comunque buoni risultati, sono state messe a rapporto le caratteristiche fondamentali dell’alone, ottenute nelle diverse ri-simulazioni. Nella tabella 3.2 sono elencati i risultati principali di tale confronto.

Per prima cosa, gli aloni sono stati paragonati qualitativamente tramite la loro rappresentazione grafica, come mostrato nelle figure 3.5 e 3.6. Si nota subito la differenza tra le simulazioni a risoluzione di 512^3 e l’unica a 256^3 . Nelle prime, sono distinguibili molto più chiaramente tutte le sotto-strutture presenti nell’alone e nelle sue vicinanze, che, invece, non appaiono nella simulazione di partenza. Le uniche due ri-simulazioni che presentano delle differenze, visibili anche ad occhio, sono il *refinement* rettangolare e quello corrispondente a $2r_{200m}$, in cui si notano alcune differenze nella conformazione delle piccole strutture nei pressi dell’alone.

La presenza di **particelle a bassa risoluzione** nell’alone è una delle prime proprietà ad essere state analizzate. Bassa risoluzione, infatti, implica una massa per particella maggiore. Il passaggio di tali particelle all’interno dell’alone di una particella più massiva potrebbe creare delle distorsioni nel calcolo dell’interazione gravitazionale e falsare il risultato della simulazione. Dunque, la presenza di tali particelle nell’alone delle ri-simulazioni a due livelli di risoluzione è una tra le caratteristiche più importanti da analizzare. I risultati, riportati nel grafico di figura 3.7, sono in accordo con le previsioni, in quanto, utilizzando zone di *refinement* più ampie nelle condizioni iniziali, le prime particelle a bassa risoluzione si trovano a raggi dell’alone maggiori. Più precisamente, si è verificato che esse appaiono esattamente al raggio corrispondente al volume della regione che si è posta a più alta risoluzione. Ad esempio, per il *refinement* ellittico di due volte r_{200m} , pari a $2.90 h^{-1}$ Mpc, le prime particelle a bassa risoluzione si trovano ad un raggio di circa $6 h^{-1}$ Mpc $\simeq 2r_{200m}$. Lo stesso accade anche per le altre ri-simulazioni ellittiche. Nella ri-simulazione rettangolare, invece, esse appaiono già ad un raggio di $1.5 h^{-1}$ Mpc, vale a dire entro il raggio viriale dell’alone. Si può, quindi, concludere che il volume scelto per la ri-simulazione rettangolare risulta essere insufficiente per simulare in modo adeguato l’alone designato.

Successivamente, sono stati studiati i **profili di massa** dei vari aloni, per ognuno dei quali è stata calcolata la massa contenuta entro diversi valori del raggio, come riportato nei grafici di figura 3.8. I risultati sono stati confrontati con la simulazione a 512^3 particelle e, dallo studio delle differenze relative, si può concludere che tutte le ri-simulazioni presentano

un profilo di massa che differisce da quello esatto per meno del 3%. I profili di massa, inoltre, sono stati utilizzati per stimare il raggio viriale. Infatti, è possibile trovare una relazione tra la massa e il raggio dell'alone, calcolando il profilo di massa corrispondente a quello di un alone a densità costante, vale a dire come $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. Nel grafico di figura 3.8, (b) insieme ai profili di massa sono stati rappresentati i due profili di massa calcolati come appena descritto, corrispondenti sia a 200 volte la densità critica che media. Dall'intersezione fra queste è possibile ricavare una stima del raggio viriale, che risulta essere pari a $r_{200c} \simeq 2.1 h^{-1} \text{ Mpc}$ e $r_{200m} \simeq 3 h^{-1} \text{ Mpc}$.

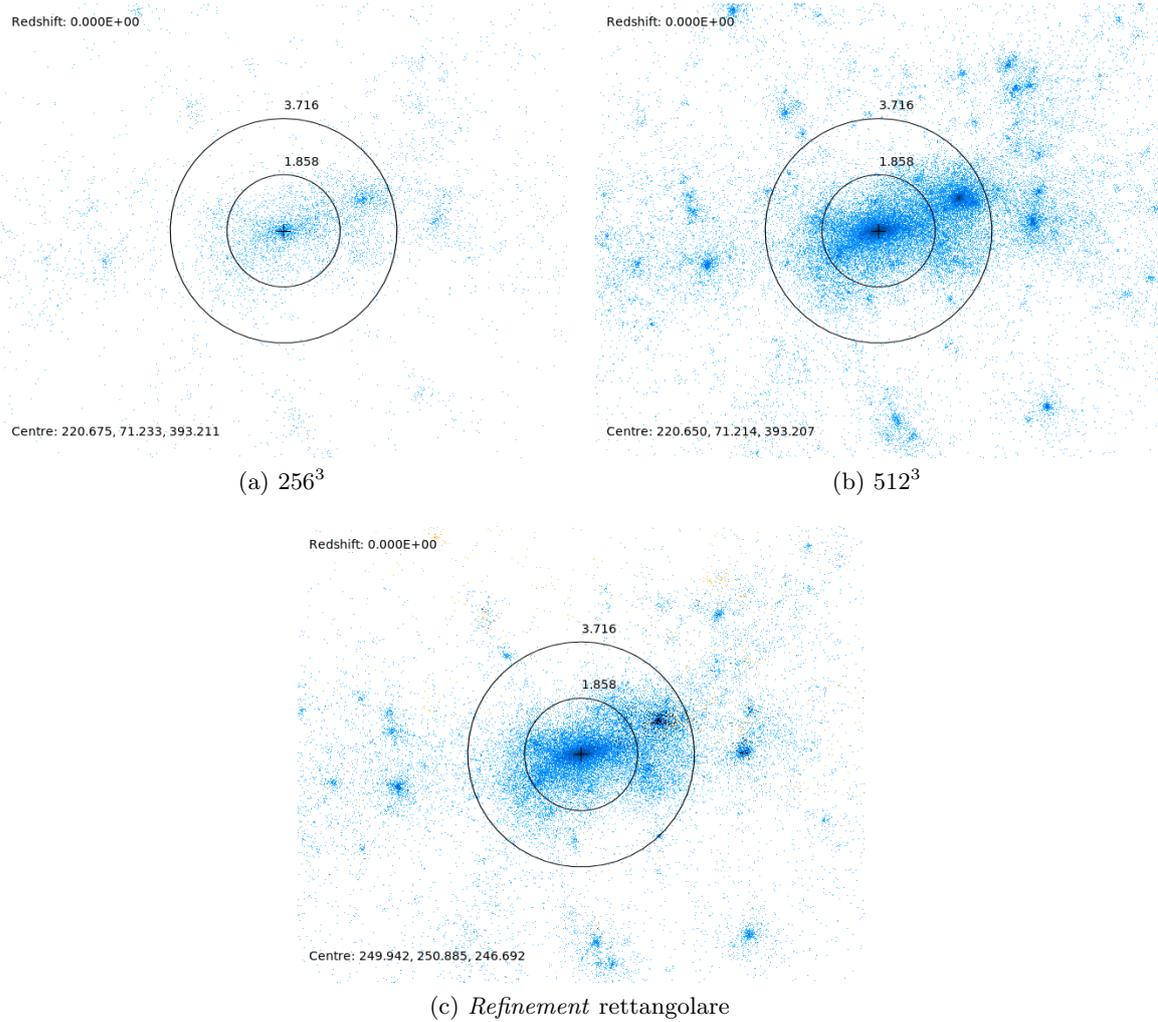


Figura 3.5: Confronto fra le diverse simulazioni dell'alone analizzato, proiettato nel piano XY della scatola a *redshift* $z = 0.00$. Le prime due immagini mostrano l'alone nella simulazione a 256^3 particelle (a) e 512^3 (b). Nell'ultima si trova la ri-simulazione dell'alone per una zona ad alta risoluzione di forma rettangolare (c). Le distanze indicate sono misurate in $h^{-1} \text{ Mpc}$. Immagini prodotte con Gadgetviewer.

Inoltre, sono stati anche studiati in funzione del raggio le velocità dei centri di massa dell'alone (figura 3.9) ed i momenti angolari specifici (figura 3.10). Dall'analisi preliminare è emerso che le proprietà gli aloni seguono generalmente tutti lo stesso andamento, con alcune eccezioni, come per la componente x del momento angolare (figura 3.10, (a)), sebbene non assumano sempre gli stessi valori. Tuttavia, per considerazioni ulteriori, sarebbe necessario uno studio più approfondito.

Infine, nella tabella 3.2, è riportato anche il **tempo macchina** che ogni simulazione ha impiegato per giungere al termine. Si può vedere che, come ci si aspetta, utilizzare due

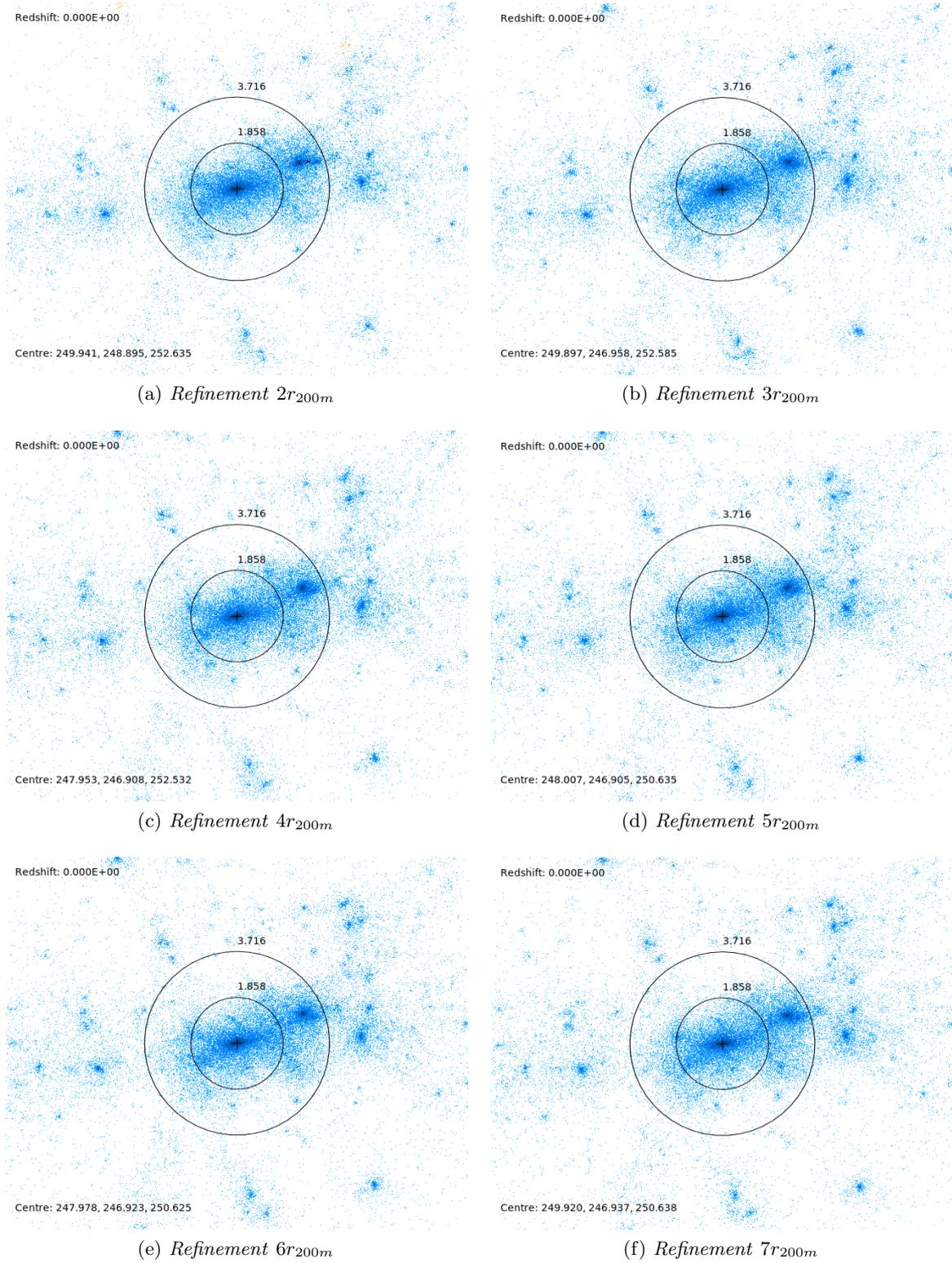
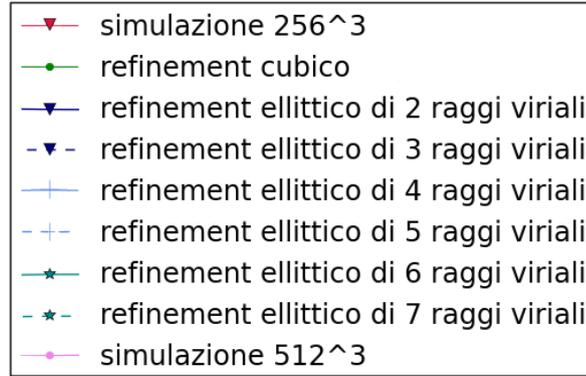
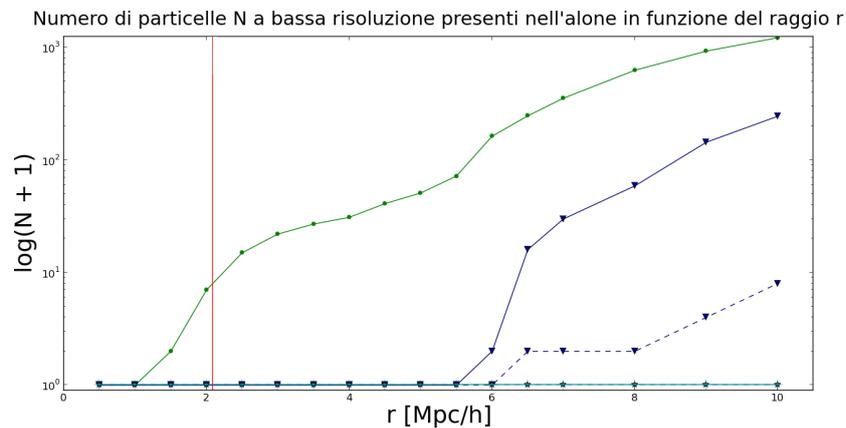


Figura 3.6: Confronto fra le diverse simulazioni dell'alone analizzato, proiettato nel piano XY della scatola a *redshift* $z = 0.00$. Nelle immagini si trovano le ri-simulazioni dell'alone per una zona ad alta risoluzione di forma ellittica corrispondente a $2r_{200m}$ (a), $3r_{200m}$ (b), $4r_{200m}$ (c), $5r_{200m}$ (d), $6r_{200m}$ (e) e $7r_{200m}$ (f). Le distanze indicate sono misurate in h^{-1} Mpc. Immagini prodotte con Gadgetviewer.

livelli di risoluzione piuttosto che porre tutta la scatola alla più alta risoluzione è conveniente in termini computazionali. Infatti, le ri-simulazioni con *refinement* per giungere a termine impiegano circa il 6% di quello utilizzato dalla simulazione 512^3 , con un risparmio del 94%



(a) Legenda.



(b)

Figura 3.7: Grafici relativi all'analisi del confronto tra le varie ri-simulazioni. Nella figura in alto (a) è riportata la legenda, valida anche per i successivi grafici in questo capitolo. In quella inferiore (b) è riportato il grafico del numero di particelle a bassa risoluzione presenti nell'alone in funzione del raggio. La linea rossa verticale corrisponde a $r_{200c} = 2.09 h^{-1}$ Mpc della simulazione 512^3 . Grafici prodotti con PYTHON.

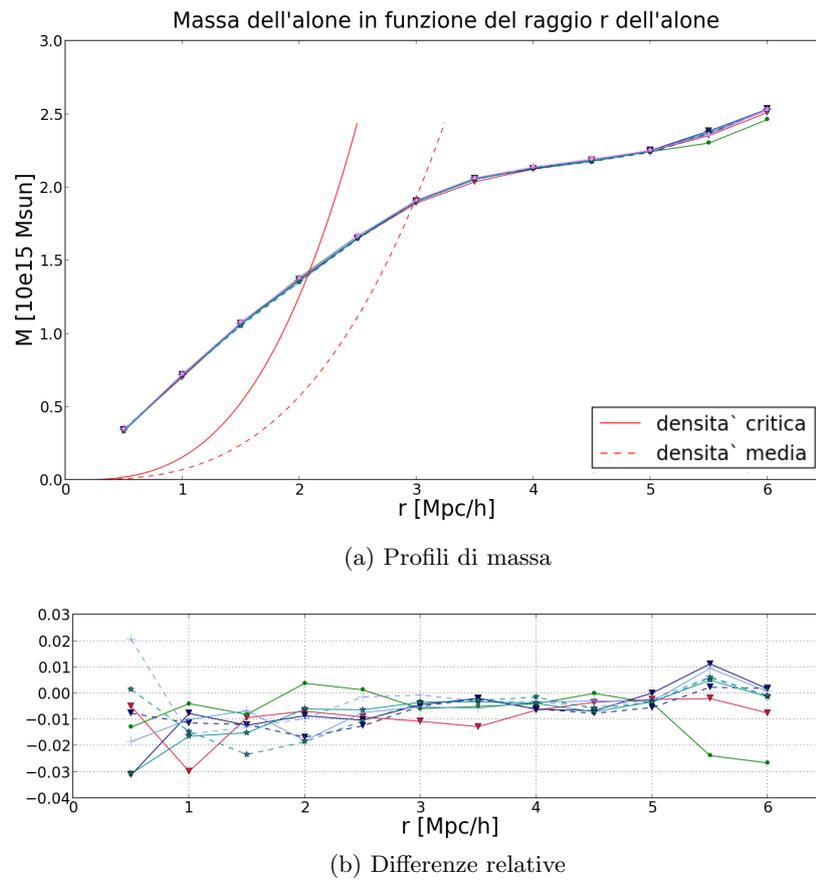


Figura 3.8: Grafici dei profili di massa relativi all'analisi del confronto tra le varie ri-simulazioni. Nel grafico superiore (a) sono riportati anche i due profili a densità costante corrispondenti alla densità sia critica che media. Nel grafico inferiore (b) sono mostrate le differenze relative rispetto alla simulazione a 512^3 particelle. La linea rossa verticale corrisponde a $r_{200c} = 2.09 h^{-1} \text{ Mpc}$ della simulazione 512^3 . La legenda è quella riportata in figura 3.7, (a). Grafici prodotti con PYTHON.

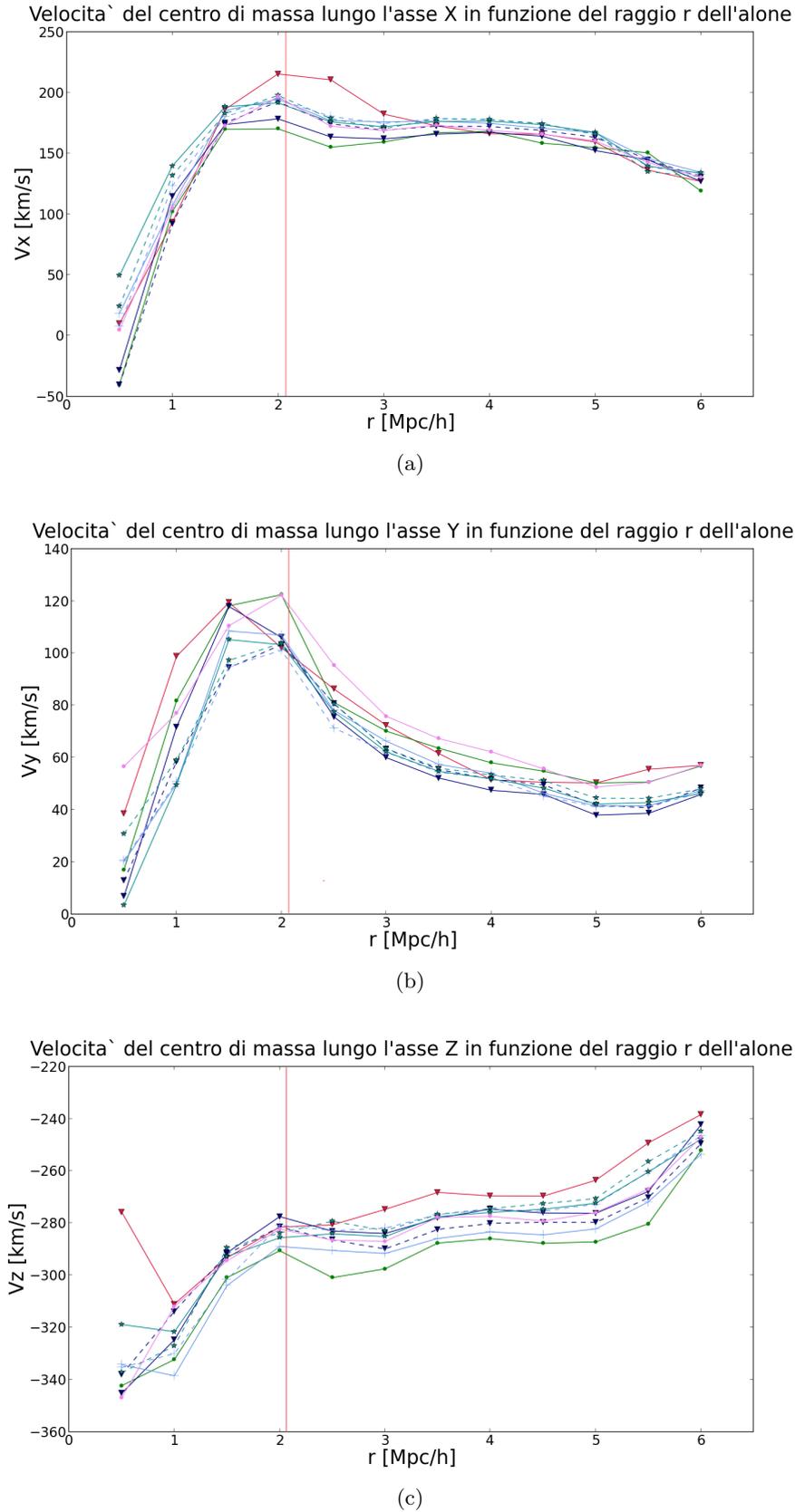


Figura 3.9: Grafici delle velocità dei centri di massa degli aloni relativi all'analisi del confronto tra le varie ri-simulazioni. La linea rossa verticale corrisponde a $r_{200c} = 2.09 h^{-1} \text{Mpc}$ della simulazione 512³. La legenda è quella riportata in figura 3.7, (a). Grafici prodotti con PYTHON.

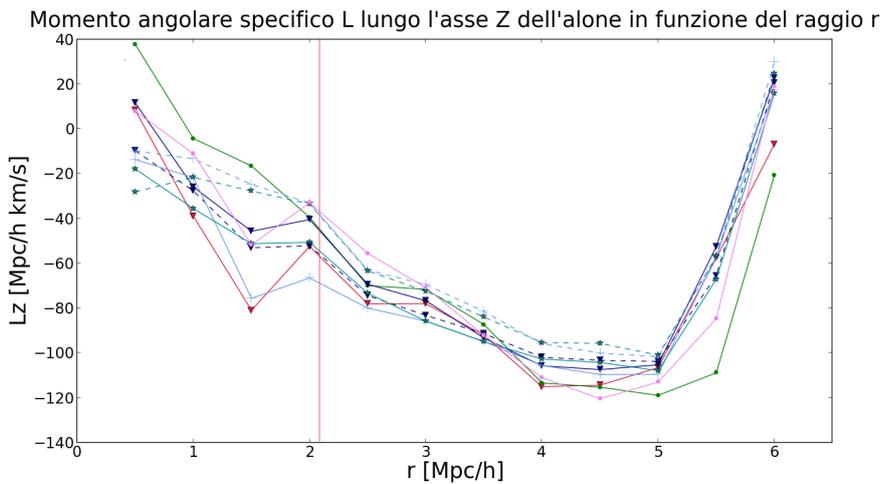
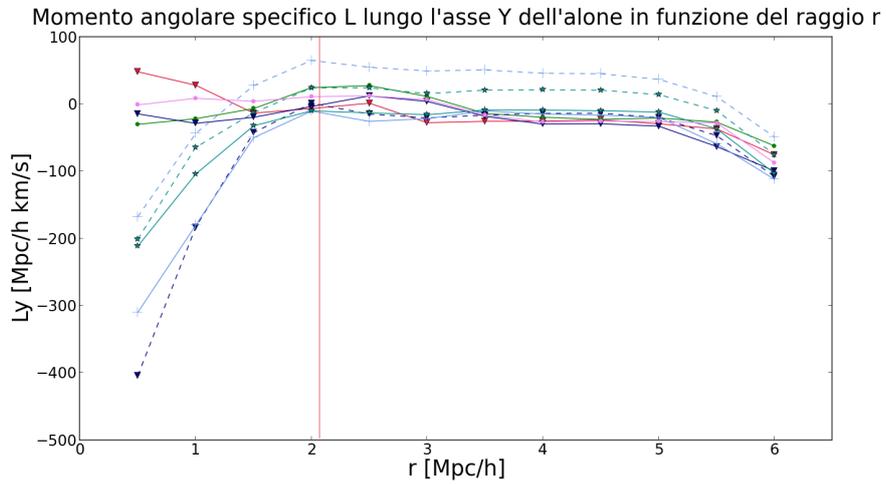
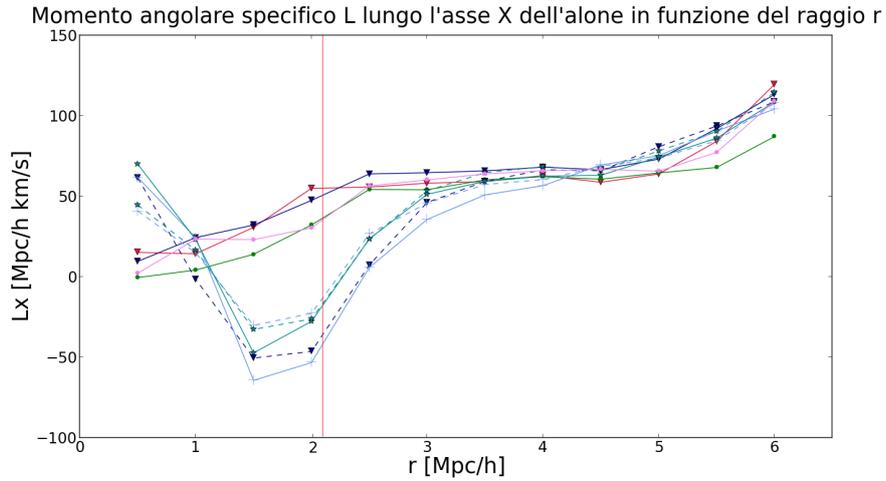


Figura 3.10: Grafici dei momenti angolari specifici degli aloni relativi all'analisi del confronto tra le varie ri-simulazioni. La linea rossa verticale corrisponde a $r_{200c} = 2.09 h^{-1} \text{Mpc}$ della simulazione 512^3 . La legenda è quella riportata in figura 3.7, (a). Grafici prodotti con PYTHON.

Tabella 3.3: Tabella riassuntiva dei risultati delle analisi per le simulazioni con *padding*. Con M_{200} si vuole intendere la massa dell’alone entro r_{200c} . Tutte le simulazioni sono state eseguite impiegando un solo nodo della macchina, corrispondente a sedici *core*, tranne quella a 512^3 particelle, per cui ne sono stati utilizzati otto.

Simulazione	M_{FOF} [$10^{15} M_{\odot}$]	M_{200} [$10^{15} M_{\odot}$]	r_{200c} [h^{-1} Mpc]	Tempo macchina [h]
Senza <i>padding</i>	9.38	2.19	3.28	4.9
<i>Padding</i> per 5 punti griglia	6.56	1.37	2.09	4.2
<i>Padding</i> per 10 punti griglia	6.15	1.38	2.09	4.5
<i>Refinement</i> ellittico ($2r_{200m}$)	2.58	1.37	2.07	44.0
512^3	2.01	1.38	2.09	770.2

3.4 Ri-simulazioni a tre diversi livelli di risoluzione: l’effetto del *padding*

Dopo l’analisi appena descritta, sono state eseguite tre ulteriori simulazioni per studiare l’effetto del *padding*. Sono state generate nuove condizioni iniziali simili a quelle per il *refinement* ellittico da $2r_{200m}$, ma con risoluzione di 128^3 particelle, piuttosto che 256^3 . È stato scelto di utilizzare come punto di riferimento il *refinement* ellittico da $2r_{200m}$ perché costituisce un caso critico a causa del il volume poco esteso. La zona a più alta definizione, invece, è stata posta alla risoluzione di 512^3 particelle, con un salto di due livelli. Nella prima ri-simulazione non è stato inserito alcun livello a definizione intermedia, mentre nelle due successive è stata creata una fascia di *padding*, a risoluzione di 256^3 particelle, di estensione pari rispettivamente a cinque e dieci punti della griglia principale della scatola. Le condizioni iniziali utilizzate ed il risultato ottenuto sono osservabili in figura 3.11. È evidente, già dalla rappresentazione grafica degli aloni, che l’utilizzo del *padding* migliora di molto l’esito della simulazione. Difatti, l’alone per il quale non è stato utilizzato alcun livello di risoluzione intermedia (figura 3.12, (b)) presenta una conformazione totalmente differente rispetto a quella degli altri due aloni simulati, che appaiono, invece, molto simili a quello prodotto nelle ri-simulazioni presentate nel paragrafo 3.3 (figura 3.6, (a)). Per un’analisi più approfondita, sono stati calcolati i profili di massa e il numero di particelle a bassa risoluzione presenti negli aloni in funzione del raggio, riportati nei grafici di figura 3.12. Anche qui risulta chiaro che, nel caso di un salto di due livelli di risoluzione, l’uso del *padding* è necessario. Infatti, l’alone della simulazione priva di *padding* presenta un profilo di massa molto differente e, inoltre, il numero di particelle a bassa risoluzione è elevato già piccoli raggi. D’altra parte, le altre due simulazioni riproducono bene i risultati ottenuti precedentemente (figure 3.7, (b) e 3.8, (a)), differendo dalla simulazione 512^3 per meno del 3%.

È da notare che in questo caso il risparmio di tempo macchina è ancora più consistente di quello ottenuto nelle simulazioni precedenti, pari circa al 99%.

In conclusione, si può affermare che, utilizzando MUSIC per la generazione delle condizioni iniziali, in simulazioni con due differenti risoluzioni che differiscono per più di un livello, l’utilizzo di una sezione di particelle a risoluzione intermedia è necessario. Tuttavia, già con un *padding* modesto, ad esempio corrispondente a soli cinque punti griglia, si riescono ad ottenere risultati stabili ed in accordo con la soluzione corretta.

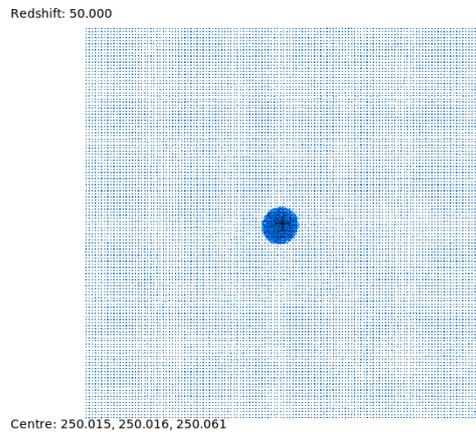
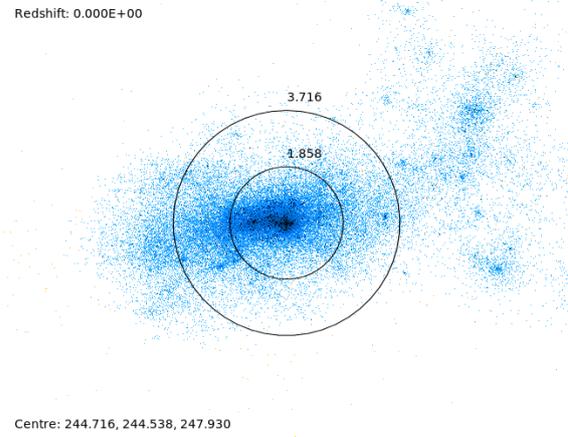
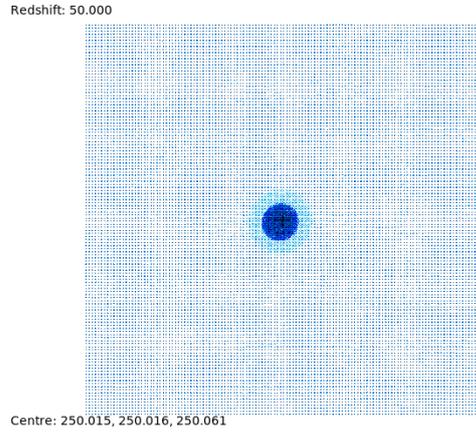
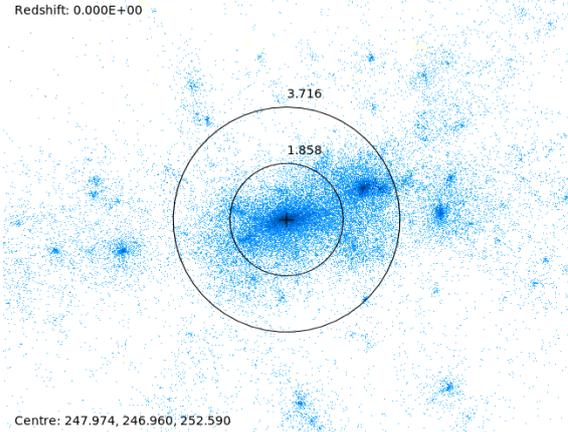
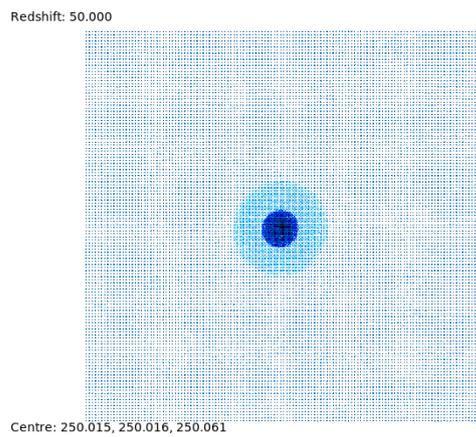
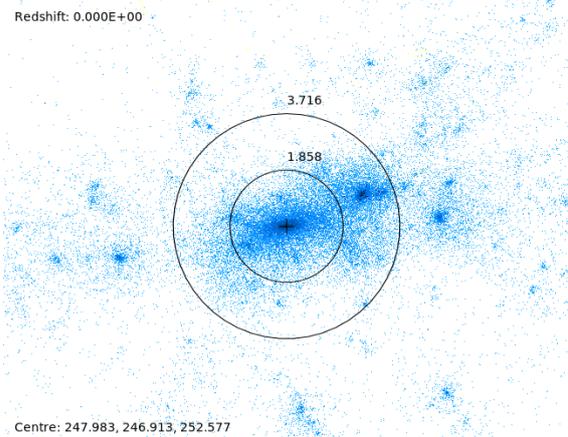
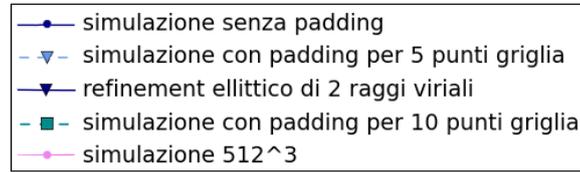
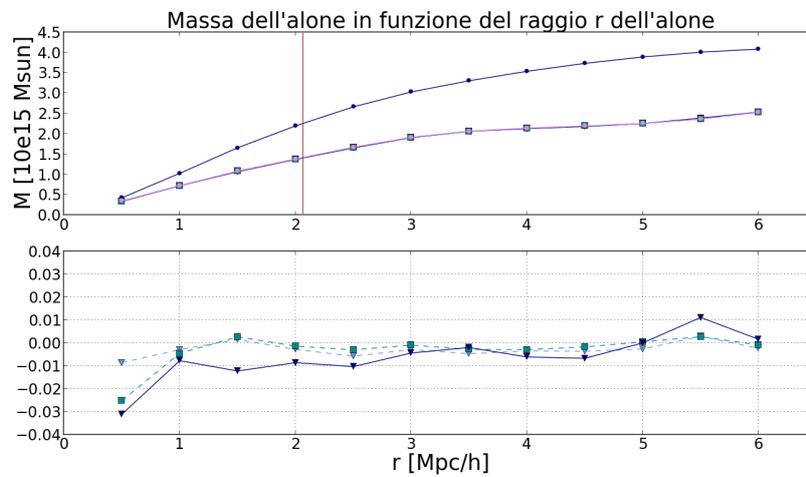

 (a) Senza *padding*.

 (b) Senza *padding*.

 (c) Con *padding*, 5 punti griglia.

 (d) Con *padding*, 5 punti griglia.

 (e) Con *padding*, 10 punti griglia.

 (f) Con *padding*, 10 punti griglia.

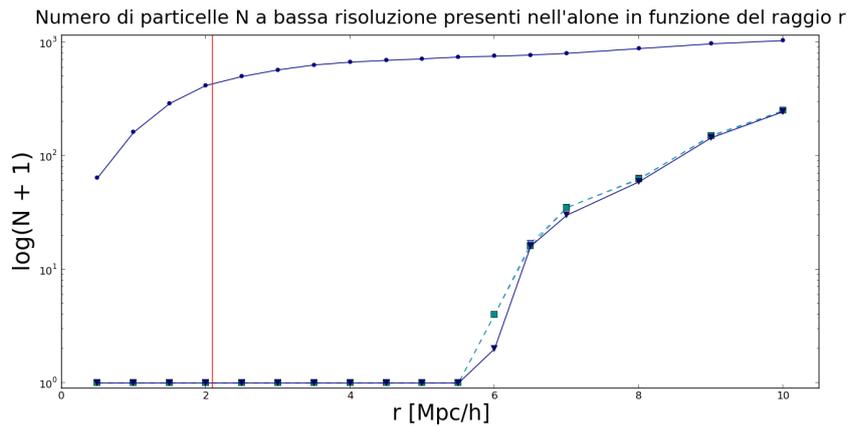
Figura 3.11: Condizioni iniziali e confronto tra gli aloni per simulazioni a due livelli di risoluzione (128^3 e 512^3) senza l'utilizzo del *padding*, (a) e (b), e con *padding* per cinque, (c) e (d), e dieci, (e) ed (f), punti griglia. Sono rappresentate in blu le particelle ad alta risoluzione (512^3) e in rosso quelle bassa (256^3 e 128^3). Le distanze indicate sono misurate in h^{-1} Mpc. Immagini prodotte con Gadgetviewer.



(a) Legenda.



(b) Nel grafico inferiore sono mostrate le differenze relative, rispetto alla simulazione a 512^3 particelle, delle sole simulazioni con *padding*.



(c)

Figura 3.12: Grafici dei profili di massa (a) e del numero di particelle a bassa risoluzione presenti nell'alone relativi all'analisi delle ri-simulazioni con tre livelli di risoluzione. La linea rossa verticale corrisponde a $r_{200c} = 2.09 h^{-1} \text{Mpc}$ della simulazione 512^3 . Grafici prodotti con PYTHON.

Tabella 3.4: Tabella riassuntiva dei risultati delle analisi per la simulazione con *overlap*. Con M_{200} si vuole intendere la massa dell'alone entro r_{200c} . Tutte le simulazioni sono state eseguite impiegando un solo nodo della macchina, corrispondente a sedici *core*.

Simulazione	$M_{FoF} [10^{15} M_{\odot}]$	$M_{200} [10^{15} M_{\odot}]$	$r_{200c} [h^{-1} \text{ Mpc}]$	Tempo macchina
Simulazione senza <i>overlap</i>	2.51	1.384	2.10	44.1
Simulazione con <i>overlap</i>	2.72	1.388	2.10	44.1

3.5 Ri-simulazione con *overlap*

Come già accennato nell'introduzione, nel corso del lavoro è stato studiato anche l'effetto dell'*overlap*, parametro che agisce sul calcolo numerico della funzione di trasferimento (paragrafo 2.3). Sono state generate condizioni iniziali uguali a quelle per la *refinement* rettangolare, ma impostando l'*overlap* ad un valore diverso da 0. I risultati, presentati nei grafici di figura 3.13, mostrano che l'aggiunta dell'*overlap* produce nel profilo di massa differenze minime, al di sotto dell'1%. Analogamente, per quanto riguarda il numero di particelle a bassa risoluzione (figura 3.14), i risultati delle due simulazioni sono fra di loro compatibili. Dunque, l'aggiunta dell'*overlap* sembrerebbe non influire sulle proprietà dell'alone risultante.

Anche in questo caso, per considerazioni più consistenti, sarebbe necessario uno studio ulteriore.

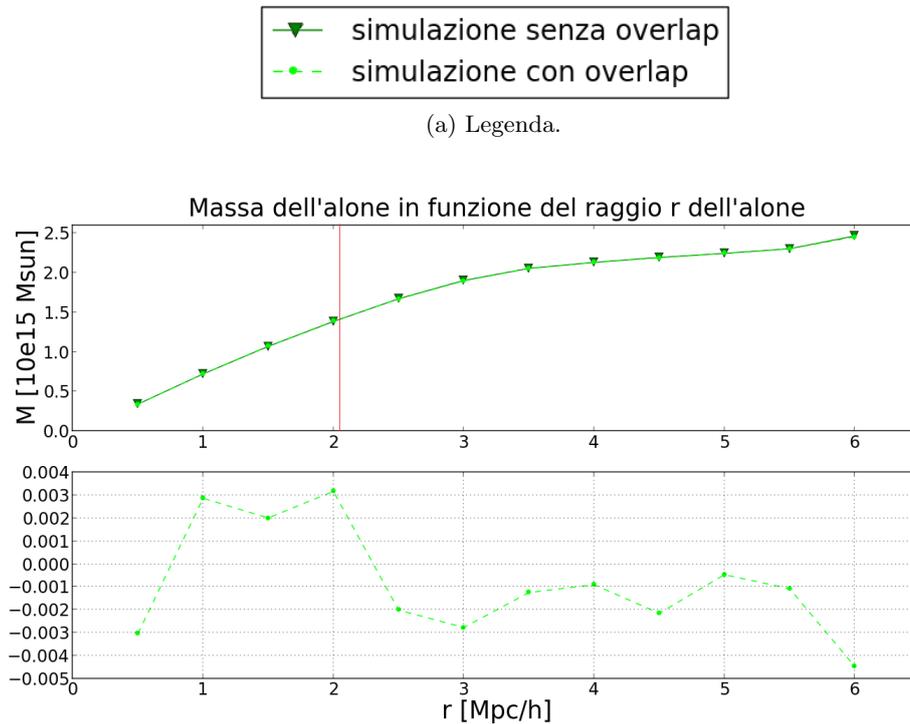


Figura 3.13: Legenda (a) e grafico dei profili di massa (b) relativi all'analisi dell'effetto dell'*overlap*. La linea rossa verticale corrisponde a $r_{200c} = 2.09 h^{-1} \text{ Mpc}$ della simulazione 512³. Grafici prodotti con PYTHON.

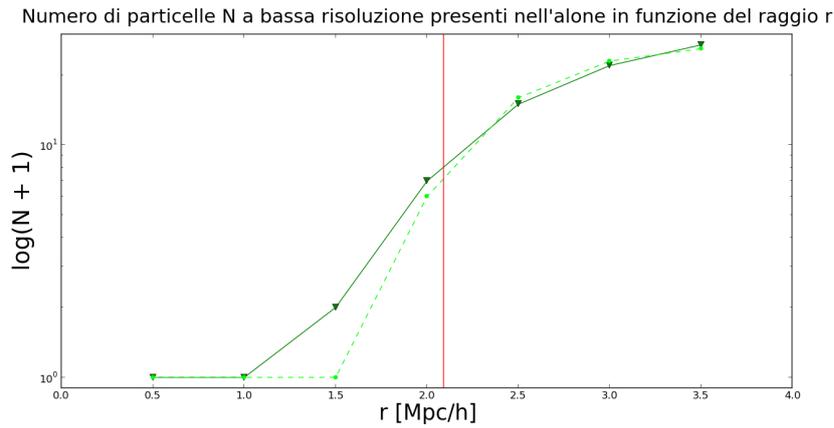
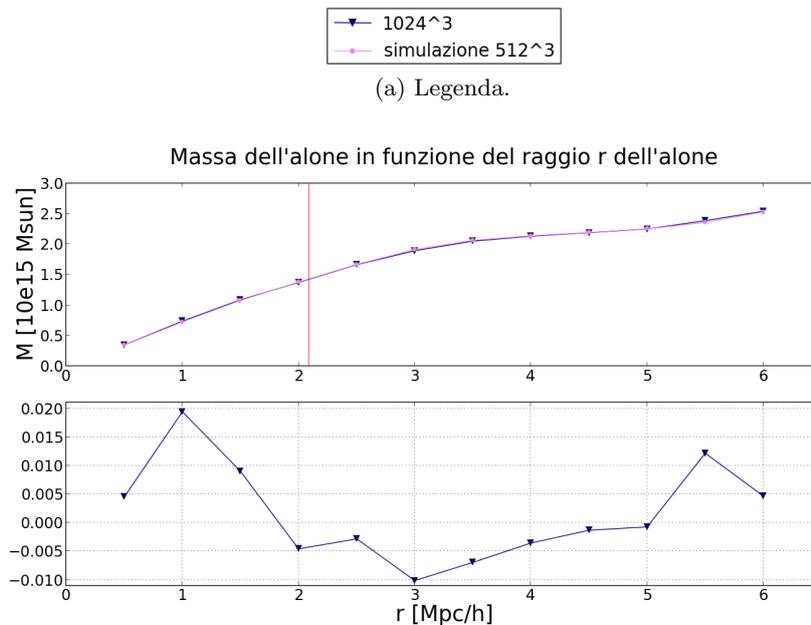


Figura 3.14: Grafico del numero di particelle a bassa risoluzione presenti nell'alone relativo all'analisi dell'effetto dell'*overlap*. La linea rossa verticale corrisponde a $r_{200c} = 2.09 h^{-1}$ Mpc della simulazione 512^3 . Grafici prodotti con PYTHON.

3.6 Ri-simulazione a quattro diversi livelli di risoluzione

Da ultimo, si è deciso di provare ad eseguire una simulazione con quattro differenti livelli di risoluzione, vale a dire 128^3 , 256^3 , 512^3 e 1024^3 particelle, con *padding* per ogni livello corrispondente a dieci punti griglia. L'esito è illustrato nella figura 3.16. Per tale alone è stato studiato il profilo di massa (figura 3.15) e, dal confronto con la simulazione a 512^3 particelle, il risultato sembra essere compatibile con le simulazioni precedentemente analizzate. Per quanto riguarda il tempo macchina utilizzato, la simulazione ha impiegato 33.2 ore per giungere al termine, vale a dire circa sette volte tanto quello impiegato per le simulazioni con *padding*, ma con un risparmio di circa il 96 % rispetto a quella 512^3 .



(b) Nel grafico inferiore sono mostrate le differenze relative alla simulazione 512^3 .

Figura 3.15: Grafici relativi all'analisi della simulazione a quattro diversi livelli di risoluzione. La linea rossa verticale corrisponde a $r_{200c} = 2.09 h^{-1}$ Mpc della simulazione 512^3 . Grafici prodotti con PYTHON

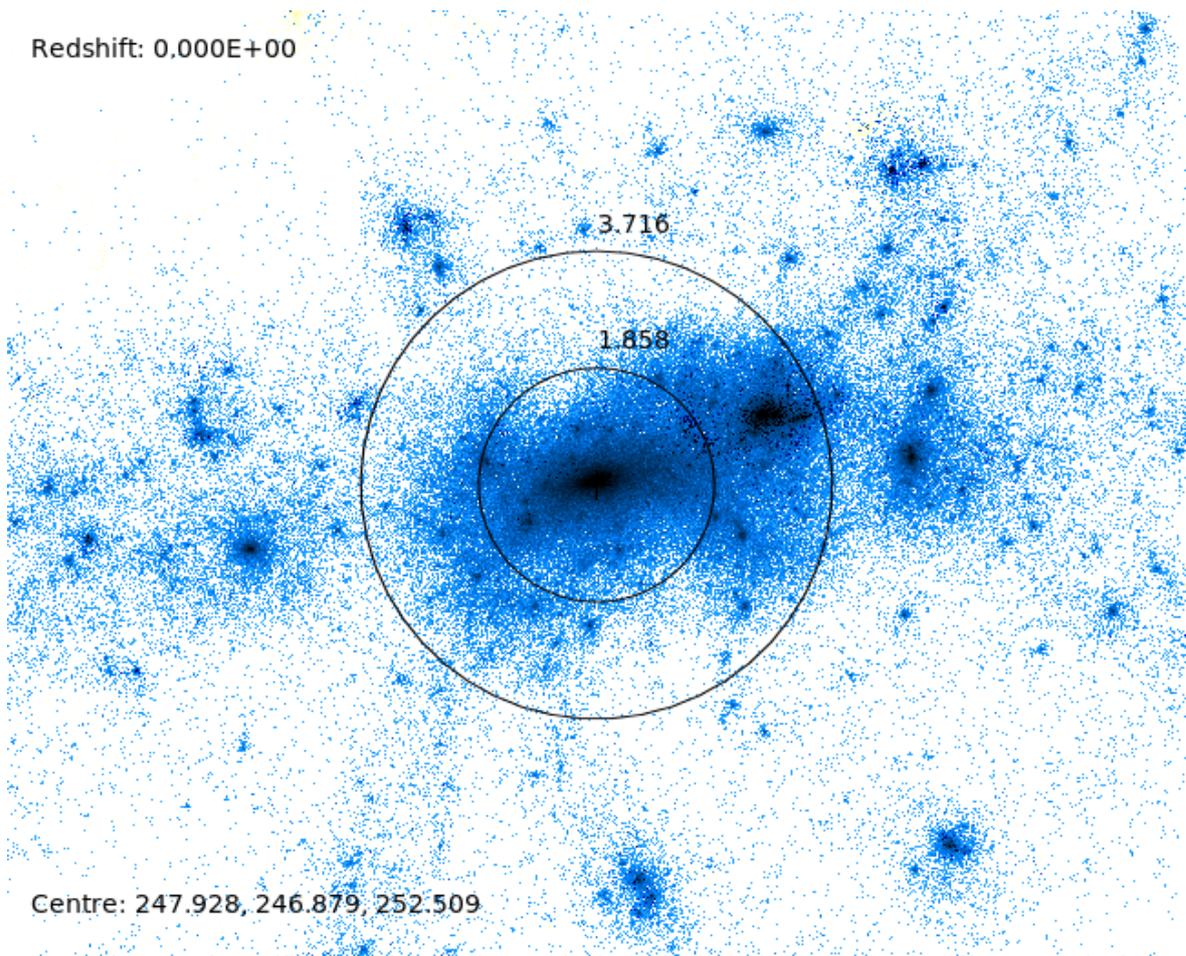


Figura 3.16: Ri-simulazione dell'alone analizzato con quattro livelli diversi di risoluzione, fino a 1024^3 particelle. L'immagine è la proiezione dell'alone sul piano XY. Le distanze indicate sono misurate in h^{-1} Mpc. Immagine prodotta con Gadgetviewer.

Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi è stato presentato il problema della generazione di condizioni iniziali per simulazioni cosmologiche. In particolare, si è studiato l’approccio proposto ed implementato nel codice MUSIC, acronimo di *Multi-Scale Initial Conditions* (Hahn & Abel, 2011). Nel primo capitolo, dopo un’introduzione generale sulla struttura a grande scala dell’universo e sul modello Λ CDM, sono stati brevemente illustrati e descritti gli strumenti teorici necessari alla comprensione del lavoro successivamente svolto. A seguito della presentazione dei parametri cosmologici utilizzati, sono stati definiti il contrasto di densità, lo spettro di potenza e la funzione di trasferimento, elementi sui quali si fonda la teoria dell’evoluzione delle perturbazioni, di cui si considera l’approccio lagrangiano (per approfondimenti si veda Monaco 2016). Infine, è stata esposta la particolare tecnica di simulazione numerica detta “a N-corpi” o *N-body*. Nel secondo capitolo è stato descritto il funzionamento del programma, sia dal punto di vista teorico che pratico. Nella prima parte, sono state delineate le tecniche implementate in MUSIC per la generazione del campo di densità iniziale e della soluzione numerica dell’equazione di Poisson, sottolineando le innovazioni introdotte dagli autori, rispetto a lavori precedenti presenti in letteratura. Nella seconda parte, sono stati elencati, con intento didascalico, i più rilevanti fra i parametri selezionabili dall’utilizzatore di MUSIC.

Il terzo capitolo, che racchiude la maggior parte della trattazione ed il lavoro originale, è stato dedicato al resoconto dell’analisi condotta sulle simulazioni prodotte *ex novo* per il presente lavoro di tesi. Su tali simulazioni sono stati condotti diversi tipi di test, al fine di verificare le proprietà delle condizioni iniziali generate da MUSIC, per diversi assetti. Oltre a simulazioni con un unico livello di risoluzione in massa, nello specifico una da 256^3 e una da 512^3 particelle per una scatola di lato $500 h^{-1}$ Mpc, sono state eseguite una serie di diverse ri-simulazioni, contenenti da due fino a quattro diversi livelli di risoluzione in massa. Infatti, scelto nelle simulazioni precedenti l’oggetto di studio, un alone di materia oscura di massa circa pari a $10^{15} M_{\odot}$, è stata generata una serie di condizioni iniziali con diversi tipi di *refinement*, vale a dire porzioni del volume di simulazione poste a risoluzione più elevata, diversi per forma e dimensione, al fine di campionare con maggior definizione in massa solamente l’oggetto d’interesse. Nelle simulazioni a tre livelli di risoluzione è stato studiato l’effetto del *padding*, zona a risoluzione intermedia, creabile a piacere nel caso in cui il salto fra la risoluzione in massa dell’intero volume e del *refinement* sia maggiore di un solo livello. Oltre a ciò, si sono volute studiare brevemente anche le conseguenze di un altro parametro, l’*overlap*, legato al calcolo numerico della trasformata di Fourier nella generazione del campo di densità per la produzione delle condizioni iniziali. In un’ultima simulazione, poi, si è voluta raggiungere la definizione in massa di 1024^3 particelle, con condizioni iniziali a quattro livelli di risoluzione. Per ogni alone simulato è stato studiato il profilo di massa ed il numero di particelle a bassa risoluzione presenti nell’alone in funzione del raggio dello stesso.

Dall’analisi svolta nel terzo capitolo, dunque, si possono trarre le seguenti conclusioni:

- nei casi studiati di simulazioni a due livelli di risoluzione (256^3 e 512^3), già un *refinement* ellittico corrispondente al volume contenuto entro $3r_{200m}$ ($\simeq 4.5r_{200c}$ per l’alone

considerato) è sufficiente a simulare l'alone con le caratteristiche desiderate, vale a dire a riprodurre la conformazione e il profilo di massa, entro una differenza del 3%, dell'alone prodotto nella simulazione in cui tutto il volume è posto alla risoluzione di 512^3 . Per quanto riguarda le particelle a bassa risoluzione, si è verificato che, come da previsione, in tutte le ri-simulazioni esse appaiono al raggio corrispondente al volume che si è scelto per definire la zona di *refinement*.

- Per simulazioni in cui il salto fra la risoluzione della scatola e quella della zona di *refinement* è maggiore di un livello (da 128^3 a 512^3 nel caso preso in considerazione) si è visto che è necessario introdurre una regione di *padding* a risoluzione intermedia (256^3). Infatti, si è verificato che, utilizzando un *padding* di estensione equivalente anche a soli 5 punti della griglia principale, l'alone presenta la stessa conformazione delle simulazioni precedenti e un profilo di massa che differisce da quello della simulazione a 512^3 particelle per meno del 3%.
- Dallo studio della simulazione con *overlap*, è emerso che, per quanto visto, la variazione di tale parametro non influisce né sulla conformazione dell'alone né sul suo profilo di massa, che differisce per meno dello 0.4% da quello dell'alone simulato senza *overlap*.

In conclusione, lo studio presentato in questo lavoro di tesi costituisce una serie di test iniziali, finalizzati alla comprensione del funzionamento del codice MUSIC, per poterlo utilizzare come generatore di condizioni iniziali per simulazioni cosmologiche. L'analisi presentata offre diverse prospettive per una possibile continuazione del lavoro in futuro. Per primo, si potrebbe studiare più nel dettaglio quanto non approfondito in questa sede, come la variazione delle velocità e del momento angolare del centro di massa in funzione del raggio dell'alone, aggiungendo anche l'analisi sui momenti d'inerzia. Inoltre, si potrebbero ripetere i test qui presentati utilizzando nelle condizioni iniziali la teoria delle perturbazioni lagrangiana fino al secondo ordine. Sarebbe soprattutto interessante aggiungere nelle simulazioni la materia barionica, per studiarne l'effetto nel caso di condizioni iniziali con più livelli di risoluzione in massa, allo scopo di realizzare simulazioni idrodinamiche. Da ultimo, ci si potrebbe avvicinare allo studio di formazione di galassie, ripetendo l'analisi per un alone di materia oscura di massa comparabile a quella della Via Lattea ($\sim 10^{12} M_{\odot}$). Le condizioni iniziali utilizzate in questo modo potranno essere il punto di partenza per campagne di simulazioni di galassie e di ammassi di galassie (vedi Murante et al. 2015, Rasia et al. 2015).

Bibliografia

- Bertschinger, E. 2001, *ApJS*, 137, 1
- Borgani, S. *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Vol. 740, , A Pan-Chromatic View of Clusters of Galaxies and the Large-Scale Structure, ed. M. Plionis O. López-Cruz & D. Hughes, 24
- Bouchet, F. R. *Dark Matter in the Universe*, ed. , S. Bonometto J. R. Primack & A. Provenzale, 565
- Boylan-Kolchin, M., Springel, V., White, S. D. M., Jenkins, A., & Lemson, G. 2009, *MNRAS*, 398, 1150
- Brandt, A. 1997, *Math. Comp.*, 31, 333
- Coles, P. & Lucchin, F. 2002, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure* (Wiley)
- Davis, M., Efstathiou, G., Frenk, C. S., & White, S. D. M. 1985, *ApJ*, 292, 371
- Hahn, O. & Abel, T. 2011, *MNRAS*, 415, 2101
- Hoffman, Y. & Ribak, E. 1991, *ApJ Lett.*, 380, L5
- Hubble, E. 1929, *Proceedings of the National Academy of Science*, 15, 168
- Mo, H., van den Bosch, F., & White, S. 2010, *Galaxy Formation and Evolution*, *Galaxy Formation and Evolution* (Cambridge University Press)
- Monaco, P. 2016, *ArXiv e-prints*
- Murante, G., Monaco, P., Borgani, S., Tornatore, L., Dolag, K., & Goz, D. 2015, *MNRAS*, 447, 178
- Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartlett, J. G., & et al. 2015, *ArXiv e-prints*
- Rasia, E., Borgani, S., Murante, G., Planelles, S., Beck, A. M., Biffi, V., Ragone-Figueroa, C., Granato, G. L., Steinborn, L. K., & Dolag, K. 2015, *ApJ Lett.*, 813, L17
- Springel, V. 2005, *MNRAS*, 364, 1105